2021/06/29

藪友良

第 5 章の答え

1　利益を X とすると、$E[X]=1\times0.5-0.5\times0.5=0.25$ 万円、$V(X)=(1-0.25)^2\times0.5+(-0.5-0.25)^2\times0.5=0.5625$ 万円、$\sqrt{V(X)}=0.75$ 万円となります[1]。

2　利益を X とすると、$E[X]=5\times0.3+8\times0.7=7.1$ 万円、$E[X^2]=25\times0.3+64\times0.7=52.3$ 万円ですから、$V(X)=E[X^2]-E[X]^2=52.3-7.1^2=1.89$ 万円、$\sqrt{V(X)}=1.3748$ 万円です[2]。

3　保険に加入しないなら 1 年で 20×0.1=2 万円の損失が期待されます。保険に加入すれば 1×0.9+(3+1)×0.1=1.3 万円の損失が期待されます。以上から、保険に加入した方が損失は小さいと期待されるため、保険加入が望ましいといえます。

4　くじを購入することで得られる期待値収入は、1000×(1/100)+300×(10/100)+ 50×(24/100)+0×(65/100)=52 円となります。よって、52 円を超える額を払えば寄付をしたことになります。

5　期待値は $E[X]=-1\times0.25+0\times0.5+3\times0.25=0.5$ です。また、$E[X^2]=1\times0.25+0\times0.5+9\times0.25=2.5$ から、$\sigma_X^2=E[X^2]-E[X]^2=2.5-0.5^2=2.25$、$\sigma_X=1.5$ となります。期待値±標準偏差（-1～2）に収まる確率は、$P\{X=-1\}+P\{X=0\}=0.75$。

6　$E[X]=0\times0.3+1\times0.7=0.7$、$E[Y]=0\times0.55+1\times0.25+2\times0.2=0.65$。$V(X)=(0-0.7)^2 0.3+(1-0.7)^2 0.7=0.21$、$V(Y)=(0-0.65)^2 0.55+(1-0.65)^2 0.25+(2-0.65)^2 0.2=0.6275$。よって、$Cov(X,Y)=(0-0.7)(0-0.65)0.05+(0-0.7)(1-0.65)0.1+(0-0.7)(2-0.65)0.15+(1-0.7)(0-0.65)0.5+(1-0.7)(1-0.65)0.15+(1-0.7)(2-0.65)0.05=-0.205$、

$\rho_{XY}=-0.205/(0.21\times0.6275)^{0.5}=-0.565$。

7　夫婦の年収の期待値は、$E[X+Y]=E[X]+E[Y]=400+450=850$。X の標準偏差 100、Y の標準偏差 80、X と Y の相関係数 0.8 から（相関係数の定義を用いて）、共分散は $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{V(X)V(Y)}=0.8\times100\times80=6400$。分散は

[1]測定単位が 1 円なら、10000X から、期待値は 10000×0.25=2500、分散は $10000^2\times0.5625=56250000$、標準偏差は 10000×0.75=7500。どちらの測定単位で答えても正解。

[2]測定単位が 1 円なら、期待値 71000、分散 189000000、標準偏差 13748。どちらの測定単位で答えても正解。

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X+Y)=100^2+80^2+2\times6400=29200$、標準偏差は 170.88。X と Y に強い正の相関があり、夫婦の年収の標準偏差も高くなっています。

8　X+Y と X－Y の共分散は、

$$Cov(X+Y, X-Y) = E[(X+Y-E[X+Y])(X-Y-E[X-Y])]$$
$$= E[\{(X-E[X])+(Y-E[Y])\}\{(X-E[X])-(Y-E[Y])\}]$$
$$= E[(X-E[X])^2]-E[(Y-E[Y])^2]+E[(X-E[X])(Y-E[Y])]-E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$
$$= E[(X-E[X])^2]-E[(Y-E[Y])^2]$$
$$= V(X)-V(Y)$$

となります。ここで V(X)=V(Y)なら Cov(X+Y,X-Y)=0 となります。

9　練習問題 8 において、X*=X+Y、Y*=X－Y と定義すると、X*と Y*はともに X と Y の関数ですから独立ではありませんが、両者の共分散は 0 となります。

別の例として、確率変数 Z_1 と Z_2 の期待値はともに 0（$E[Z_1]=E[Z_2]=0$）、互いに独立としましょう（$E[Z_1Z_2]=0$）。ここで $X=Z_1Z_2$、$Y=Z_2$ と定義すると、X と Y はともに Z_2 の関数ですから両者は独立ではありません。しかし、$E[X]=E[Z_1]E[Z_2]=0$、$E[Y]=E[Z_2]=0$ から、共分散は 0 となります。

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E[XY]-E[X]E[Y]\\&=E[XY]-0\\&=E[Z_1Z_2^2]\\&=E[Z_1]E[Z_2^2]=0\times E[Z_2^2]=0\end{aligned}$$

式展開で、Z_1 と Z_2 は独立ですから、Z_1 と Z_2^2 も独立であることを用いました。

独立なら共分散は 0 となりますが、共分散が 0 でも独立を意味しないことを覚えておいてください。独立は共分散よりも、両変数が無関係であることを示す強い概念となります。

10　1) 期待収益率は、$E[\omega r_s+(1-\omega) r_b]= \omega E[r_s]+(1-\omega)E[r_b]=\omega 0.08+(1-\omega)0.03$ です。よって、全てを株式で運用することで（ω=1）、収益率は最大の 8%となります。

2) $\omega r_s+(1-\omega)r_b$ の分散を考えましょう。株式の標準偏差は 0.07、債券の標準

偏差 0.03、相関係数は 0.05 ですから、相関係数の定義から共分散 $Cov(r_s,r_b)=\rho_{rs,rb}\sqrt{V(r_s)V(r_b)}=0.05\times0.07\times0.03=0.000105$ です。この資産の分散は、

$$V(\omega r_s+(1-\omega)r_b)=E[\{(\omega r_s+(1-\omega)r_b)-(\omega 0.08+(1-\omega)0.03)\}^2]$$

$$=E[\{(\omega(r_s-0.08)+(1-\omega)(r_b-0.03)\}^2]$$

$$= E[\omega^2(r_s-0.08)^2+(1-\omega)^2(r_b-0.03)^2+2\omega(1-\omega)(r_s-0.08)(r_b-0.03)]$$

$$=\omega^2E[(r_s-0.08)^2]+(1-\omega)^2E[(r_b-0.03)^2]+2\omega(1-\omega)E[(r_s-0.08)(r_b-0.03)]$$

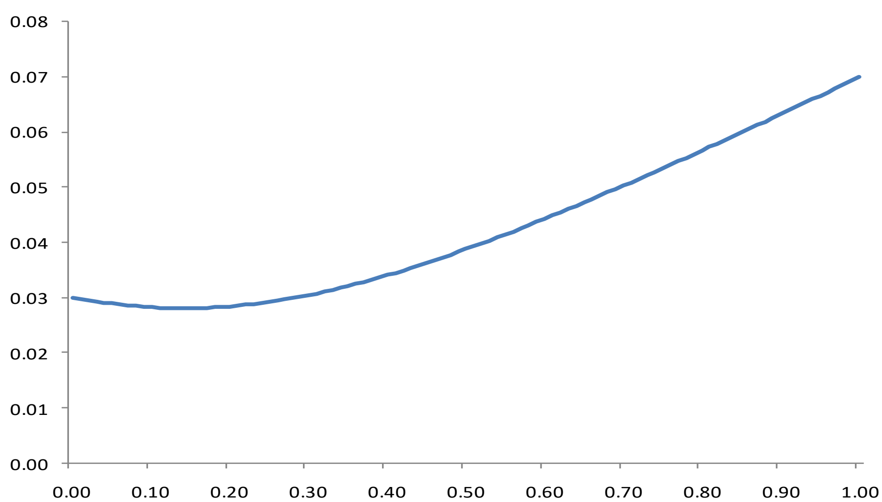
ここで $E[(r_s-0.08)^2]=V(r_s)=0.07^2$、$E[(r_b-0.03)^2]=V(r_b)=0.03^2$、$E[(r_s-0.08)(r_b-0.03)]=0.000105$ となるため、上式に、これらの値を代入することで

$$\omega^2 0.07^2 +(1-\omega)^2 0.03^2+2\omega(1-\omega)0.000105$$

$$=0.0049\omega^2+(0.0009+0.0009\omega^2-0.0018\omega)+(0.00021\omega-0.00021\omega^2)$$

$$=0.00559\omega^2-0.00159\omega+0.0009$$

下図では、上式の平方根を取った標準偏差を縦軸、横軸を ω として示しています。ω が 0.14 で標準偏差が 0.028 となり最小となっています。つまり、株で資産の 14%、債権で 86%を運用することで、標準偏差を最小化できます[3]。このとき期待収益率は、0.14×0.08+(1-0.14)0.03=0.037 です。もっとも安全な資産運用は、すべてを債券だけで運用することではありません（債権だけだと、期待収益率 3%、標準偏差 3%）。



[3] 分散の式を ω で微分して 0 と置くと、2×0.00559ω-0.00159=0 ですから ω=-0.14 が得られます。

11

1) 確率変数 X の期待値は μ、分散は σ^2 でり、実現値はx_1，$x_2,\ldots$，x_mとしましょう。確率変数$Z = X - \mu$と定義すると、Zの実現値は$z_1 = x_1 - \mu,\ldots$，$z_m = x_m - \mu$となります。Zにはm個の実現値がありますが、その中で$|z_i| \geq \kappa\sigma$を満たすz_iだけからなる集合をAとします。

ここで

$$P\{|Z| \geq \kappa\sigma\} = \sum_{z \in A} P\{z_i\}$$

になります。Σ記号の$z \in A$は、集合Aの中にあるz_iについて、確率$P\{z_i\}$の和をとることを意味します。集合Aの中にあるz_iは$|z_i| \geq \kappa\sigma$を満たすため、両辺を 2 乗した$z_i^2 \geq \kappa^2\sigma^2$も満たします（つまり、$z_i^2/(\kappa^2\sigma^2) \geq 1$)。このため、上式右辺は

$$\sum_{z \in A} P\{z_i\} \leq \sum_{z \in A} \frac{z_i^2}{\kappa^2\sigma^2} P\{z_i\} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{z_i^2}{\kappa^2\sigma^2} P\{z_i\} = \frac{1}{\kappa^2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} z_i^2 P\{z_i\}$$

となります。2 番目の不等式は、集合Aだけでなく、全てのz_iについて和をとっているため、大きくなっています。最後の等号は定数$1/(\kappa^2\sigma^2)$を外に出しています。

以上から、

$$P\{|Z| \geq \kappa\sigma\} \leq \frac{1}{\kappa^2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} z_i^2 P\{z_i\}$$

となります。ここで左辺は$P\{|Z| \geq \kappa\sigma\} = P\{|X - \mu| \geq \kappa\sigma\}$であり、右辺は

$$\sum_{i=1}^{m} z_i^2 P\{z_i\} = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 P\{x_i\} = \sigma^2$$

になるため（$z_i = x_i - \mu$、X の分散は σ^2 に注意）、

$$P\{|X - \mu| \geq \kappa\sigma\} \leq \frac{1}{\kappa^2\sigma^2} \sigma^2 = \frac{1}{\kappa^2}$$

になります。これで証明は終わりです。

2) 確率の和は 1 から、

$$P\{|X - \mu| < \kappa\sigma\} + P\{|X - \mu| \geq \kappa\sigma\} = 1$$

であり、$P\{|X - \mu| \geq \kappa\sigma\}$を右辺に移項させると、

$$P\{|X-\mu| < \kappa\sigma\} = 1 - P\{|X-\mu| \geq \kappa\sigma\}$$

となります。チェビチェフの不等式$P\{|X-\mu| \geq \kappa\sigma\} \leq 1/\kappa^2$を用いると、この式は

$$P\{|X-\mu| < \kappa\sigma\} = 1 - P\{|X-\mu| \geq \kappa\sigma\}$$

$$\geq 1 - \frac{1}{\kappa^2}$$

となります。ここで上式の左辺は

$$P\{|X-\mu| < \kappa\sigma\} = P\{-\kappa\sigma < X-\mu < \kappa\sigma\}$$

$$= P\{\mu-\kappa\sigma < X < \mu+\kappa\sigma\}$$

と書けます。これまでの結果から、

$$P\{\mu-\kappa\sigma < X < \mu+\kappa\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{\kappa^2}$$

が得られました。

3) 2)の結果から、「確率変数Xが$\mu \pm \kappa\sigma$の領域に留まる割合は$1-1/\kappa^2$以上になる」といえます。この関係を使えば、確率変数Xがどのような分布に従っていても、期待値μから標準偏差σの$\pm\kappa$倍以内に留まる割合が推測できることになるわけです。たとえば、$\kappa = 1$なら

$$P\{\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{1^2} = 0$$

ですから、0%以上の確率で、Xは期待値μから$\pm\sigma$以内に留まる、ことがわかります（これは当たり前のことですが・・・）。また、$\kappa = 2$なら、

$$P\{\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

ですから、75%(=3/4)以上の確率で、Xは期待値μから$\pm 2\sigma$以内に留まります。
同様に、$\kappa = 3$なら

$$P\{\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}$$

ですから、89%(=8/9)以上の確率で、Xは期待値μから$\pm 3\sigma$以内に留まります。

教科書の第 2 章(p45)では、分布が釣鐘状のとき、平均と標本標準偏差を使って範囲と割合の関係を紹介しました。しかし、この関係は全ての分布に成立す

る訳ではありません。これに対し、チェビシェフの不等式は、確率変数に期待値と分散が存在しているなら、どのような分布でも成立する一般的関係式となります。

当然ですが、釣鐘状の分布に限定したときの方が、範囲と割合について、平均と標準偏差はより多くの情報を持っています。たとえば、$\mu \pm 2\sigma$であれば、釣鐘状分布では約 95%がその中に含まれると言えますが、チェビシェフの不等式では 75%以上が含まれるとしか言えません。チェビシェフの不等式は、前提条件が一般的であるがゆえに、弱い含意しか持っていないのです。残念ながら、この世にフリーランチは存在しません（There's no such thing as a free lunch）。前提条件が弱いなら、その含意は弱くなるのは当たりまえのことでしょう。