2021/06/29

藪友良

第 4 章の答え

1. この計算は同時確率を考慮していないため誤っています。
2. A 大学に合格する事象を A とし、B 大学に合格する事象を B とします。それぞれの確率は $P\{A\}=0.1$, $P\{B\}=0.05$, $P\{A\cap B\}=0.03$ ですから、少なくともどちらかの大学に合格（$A\cup B$）する確率は、$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\cap B\}=0.1+0.05-0.03=0.12$ です。
3. 加法定理から $P\{A_1\cup A_2\}=P\{A_1\}+P\{A_2\}-P\{A_1\cap A_2\}=2\times(1/6)-(1/6)^2=11/36$ です。ド・メレの間違いは同時確率（2 回とも 6 の目が出る確率）を引かなかったことです。
4. ここで 1 個目の玉が赤である事象を A、2 番目の玉が赤である事象を B とします。両方とも赤は、$P\{A\cap B\}=P\{A\}P\{B|A\}$です。玉は合計 9 個あり、そのうち赤は 4 個ですから $P\{A\}=4/9$ です。1 個目が赤なら、残り 8 個のうち 3 個が赤ですから $P\{B|A\}=3/8$ です。よって、$P\{A\cap B\}=(4/9)\times(3/8)=1/6$。
5. 事象 A を試合に勝つ、事象 B を雨が降るとします。このとき、$P\{B\}=0.3$、$P\{\overline{B}\}=0.7$、$P\{A|B\}=0.7$、$P\{A|\overline{B}\}=0.9$ です。試合に勝つ確率は、$P\{A\}=P\{A\cap B\}+P\{A\cap\overline{B}\}=P\{A|B\}P\{B\}+P\{A|\overline{B}\}P\{\overline{B}\}=0.7\times0.3+0.9\times0.7=0.84$。
6. 52 枚から 5 枚を取り出すとき組み合わせは ${}_{52}C_5$ 通りあります（付録 A 参照）。取り出された 5 枚が全てハートであるとき、その組み合わせは計 ${}_{13}C_5$ 通りあります。したがって、52 枚から 5 枚取り出して全てハートの確率は、

$$\frac{{}_{13}C_5}{{}_{52}C_5}=\left(\frac{13!}{5!(13-5)!}\right)\Big/\left(\frac{52!}{5!(52-5)!}\right)$$

$$=\frac{13\times12\times11\times10\times9}{52\times51\times50\times49\times48}=0.000495$$

7. 1) A_1 を全員が男、A_2 を全員が女と定義します。ここで $P\{A_1\}$は 3 人全てが男の子である確率です。3 人全てが男である確率は$(1/2)^3$ です。同様に、3 人全てが女である確率は$(1/2)^3$ です。A_1 と A_2 が互いに排反ですから、全

部の子供が同姓の確率は、$P\{A_1 \cup A_2\}=P\{A_1\}+P\{A_2\}=(1/2)^3+(1/2)^3=(1/2)^2$。2) A_iをi番目が女で他が男の事象と新たに定義します（たとえば、A_1は女男男）。A_1、A_2、A_3は互いに排反ですから、女1人、男2人となる確率は $P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3\}=P\{A_1\}+P\{A_2\}+P\{A_3\}=(1/2)^3+(1/2)^3+(1/2)^3=3/8$。

8. HIV感染者をA_1、HIV非感染者をA_2、陽性反応をBとします。それぞれの確率は、$P\{A_1\}=0.001$、$P\{A_2\}=0.999$、$P\{B|A_1\}=1.0$、$P\{B|A_2\}=0.01$です。このとき、陽性反応の確率は$P\{B\}=P\{B|A_1\}P\{A_1\}+P\{B|A_2\}P\{A_2\}$ $=1.0\times0.001+0.01\times0.999=0.01099$。よって、 $(P\{B|A_1\}/P\{B\})P\{A_1\}=(1.0/0.01099)\times0.001=0.0909$

9. 同時確率は以下として書けます。

$$P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\} = P\{A_1\}\frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_1\}} \cdots \frac{P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\}}{P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}\}}\frac{P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\}}{P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\}}$$

両辺が等しくなるのは、右辺の分母と分子が上手く打ち消し合っているからです。また、条件付き確率の定義から以下が成立します。

$$P\{A_2 \mid A_1\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_1\}}、\cdots、$$

$$P\{A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1}\}}{P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}\}}$$

$$P\{A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\}}{P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\}}$$

これらを同時確率の式に代入すると、同時確率が条件付き確率の積として表現できることが分かります。

$$P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\} = P\{A_1\}P\{A_2|A_1\} \ldots P\{A_{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}\}P\{A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\}$$

10. 囚人1が恩赦ならA_1、囚人2が恩赦ならA_2、囚人3が恩赦ならA_3、「囚人2が処刑される」といわれる場合をBとします。それぞれの確率は、$P\{A_1\}=P\{A_2\}=P\{A_3\}=1/3$です。囚人1が恩赦なら、看守は囚人2も3も処刑のためランダムに囚人2が処刑といった、と考えられます（$P\{B|A_1\}=0.5$）。囚人2が恩赦なら、囚人2が処刑といわれることはありません（$P\{B|A_2\}=0.0$）。囚人3が恩赦なら、囚人2が処刑といわれます（$P\{B|A_3\}=1.0$）。以上から、

$P\{B\}=P\{B|A_1\}P\{A_1\}+P\{B|A_2\}P\{A_2\}+P\{B|A_3\}P\{A_3\}=0.5\times(1/3)+0.0\times(1/3)+1.0\times(1/3)=0.5$。よって、$P\{A_1|B\}=(P\{B|A_1\}/P\{B\})P\{A_1\}=(0.5/0.5)\times(1/3)=1/3$。したがって、看守は「囚人 2 が処刑される」といったとき、囚人 1 が恩赦となる確率は 1/3 から変わっていません。また、囚人 3 に関しては、$P\{A_3|B\}=(P\{B|A_3\}/P\{B\})P\{A_3\}=(1.0/0.5)\times(1/3)=2/3$ から、看守は「囚人 2 が処刑される」といったとき、囚人 3 が恩赦となる確率は 1/3 から 2/3 に上がっています。

11. 1 番に車が入っている場合を事象 A_1、2 番に車が入っている場合を事象 A_2、3 番に車が入っている場合を事象 A_3 とします。そして、「司会者が 2 番のドアを開ける」という場合を事象 B とします。それぞれの確率は $P\{A_1\}=P\{A_2\}=P\{A_3\}=1/3$ です。もし 1 番のドアに車が入っているなら、司会者は 2、3 番のどちらを開けてもよいので、ランダムにどちらかを開けます（$P\{B|A_1\}=0.5$）。もし 2 番のドアに車が入っているなら、2 番のドアを開けるとクイズが終わるため、司会者は 3 番のドアを開けます（$P\{B|A_2\}=0.0$）。もし 3 番のドアに車が入っているなら、司会者は 2 番のドアを開けます（$P\{B|A_3\}=1.0$）。以上から、司会者が 2 番のドアを開ける確率は、$P\{B\}=P\{B|A_1\}P\{A_1\}+P\{B|A_2\}P\{A_2\}+P\{B|A_3\}P\{A_3\}=0.5\times(1/3)+0.0\times(1/3)+1.0\times(1/3)=0.5$ です。よって、2 番のドアが開けられた後で 1 番のドアに車が入っている確率は、$P\{A_1|B\}=(P\{B|A_1\}/P\{B\})P\{A_1\}=(0.5/0.5)\times(1/3)=1/3$ で変わりません。また、2 番のドアが開けられた後で 3 番のドアに車が入っている確率は、$P\{A_3|B\}=(P\{B|A_3\}/P\{B\})P\{A_3\}=(1.0/0.5)\times(1/3)=2/3$ です。以上から、1 番のドアであれば当選確率は 1/3 で、ドアを変えると 2/3 に増えるのです。
12. たとえば、左前輪といって、これが偶然に当たる確率は 1/16 です。タイヤは計 4 つですから、偶然当たる確率は $4\times(1/16)=1/4$ です。
13. 確率の公理とは、

    (1)任意の事象 A に対して $0\le P\{A\}$

    (2)Ω に対して $P\{\Omega\}=1$

    (3)A と B が互いに排反ならば $P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}$

となります。以下では、先験的確率、経験的確率、条件付き確率について確率

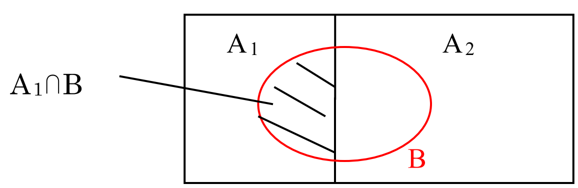
の公理が全て満たされることを証明します。

まずは、先験的確率が確率の公理を満たすことを確認しましょう。公理(1)については、$n>0$ と $n(A)\geq 0$ ですから $P\{A\}=n(A)/n\geq 0$ となります。公理(2)は、$n(\Omega)=n$ ですから、$P\{\Omega\}=n(\Omega)/n=1$ です。公理(3)についても、A と B が互いに排反であれば、A と B に何らの共通点もありませんから、$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ です。よって、$P\{A\cup B\}=n(A\cup B)/n=n(A)/n+n(B)/n=P\{A\}+P\{B\}$となります。

経験的確率も、確率の公理を満たします。公理(1)については、$n>0$、$n(A)\geq 0$ ですから、$P\{A\}=n(A)/n\geq 0$ が成立します。次に、公理(2)について考えましょう。何度試行をしても、その結果は標本空間Ωのどれかが生じます。よって、観察回数 n は $n(\Omega)$に等しくなります。よって、$P\{\Omega\} = n(\Omega)/ n =1$ です。公理(3)についても、A と B が互いに排反であれば、$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$です。たとえば、コインを投げて、表か裏が出た回数を求めるには、表が出た回数+裏が出た回数を求めればよいです。よって、

$$P\{A\cup B\}=n(A\cup B)/n= n(A)/n+ n(B)/n= P\{A\}+P\{B\}$$

条件付き確率も確率の公理を満たします。公理(1)については、$P\{A\cap B\}\geq 0$、$P\{B\}>0$ ですから、$P\{A|B\}=P\{A\cap B\}/P\{B\}\geq 0$ です。また、公理(2)については、$P\{B\cap\Omega\}=P\{B\}$ですから、$P\{\Omega|B\}=P\{\Omega\cap B\}/P\{B\}=P\{B\}/P\{B\}=1$ となります。公理(3)について考えましょう。2 つの排反する事象 A_1 と A_2 を考えます。下図の通り、事象 A_1 と A_2 は排反しているため、標本空間は A_1 と A_2 に分けられます。



新たに事象 B を考えると、$(A_1\cup A_2)\cap B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)$となります。$A_1$ と A_2 が互いに排反ですから、$(A_1\cap B)$と$(A_2\cap B)$も互いに排反です。よって、

$$\begin{aligned}
P\{A_1\cup A_2|B\}&=P\{(A_1\cup A_2)\cap B\}/P\{B\}\\
&=P\{(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\}/P\{B\}\\
&=(P\{A_1\cap B\}+P\{A_2\cap B\})/P\{B\}\\
&=P\{A_1\cap B\}/P\{B\}+P\{A_2\cap B\}/P\{B\}\\
&=P\{A_1|B\}+ P\{A_2|B\}
\end{aligned}$$

14. ここでは独立と排反が異なる概念であることを2つの方法で示します。排反と独立とは異なる概念ですが、混同しやすい概念ですから気を付けてください。

1) 事象AとBが独立なら、$P\{A \cap B\}=P\{A\}P\{B\}$が成立します。ここで$P\{A\}>0$、$P\{B\}>0$なら、積事象の確率はプラス（$P\{A \cap B\}=P\{A\}P\{B\}>0$）になります。これに対し、事象AとBが排反なら、両事象に何らの共通点もありませんから（$A \cap B$は空集合ϕ）、積事象の確率は0になります($P\{A \cap B\}= P\{\phi\}=0$)。

2) 事象AとBが独立なら、$P\{A\}=P\{A \mid B\}$が成立します。つまり、事象Bの情報は事象Aの確率に影響を与えません。これに対し、事象AとBが排反なら、事象Bの情報は事象Aの確率に影響を与えます。事象AとBが排反なら$P\{A \cap B\}=0$ですから、事象Aの条件付き確率は0になります($P\{A|B\}= P\{A \cap B\}/P\{B\}=0$)。ここで$P\{A\}>0$なら、$P\{A\} \neq P\{A \mid B\}$となります。