

第 10 章の答え

1 最小 2 乗推定量の式は $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$ ですから、これを書き換えると $\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}$ となります。よって、 $X = \bar{X}$ のとき、回帰直線上の点は $Y = \bar{Y}$ となります。

2. Y の理論値の偏差 2 乗和

$$\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

を書き換えましょう。p252 から理論値は

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$$

となり、練習問題 1 から

$$\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}$$

となりますから、これらを偏差 2 乗和の式に代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 &= \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{\beta}X_i - \hat{\beta}\bar{X})^2 \\ &= \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned}$$

が得られます。この偏差 2 乗和を決定係数の式に代入すると、決定係数の別表現が得られます。

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

この式は、決定係数を計算するので便利です (X と Y それぞれの偏差 2 乗和、 $\hat{\beta}$ だけで計算できる)。

さらに上式を書き換えてみましょう。 $\hat{\beta}$ の式を上式に代入すると、

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}))^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

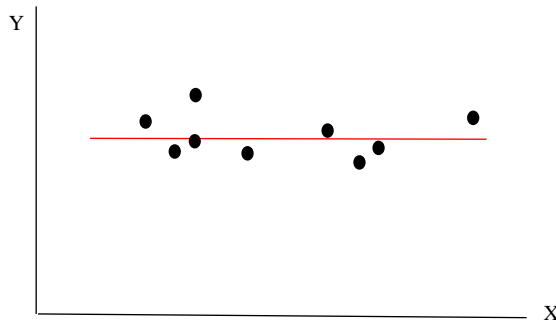
$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \right)^2 = \left(\frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} \right)^2 = r_{XY}^2$$

となります。つまり、決定係数とは、 X_i と Y_i との相関係数 r_{xy} を 2 乗したものに他ならないのです。

3 決定係数の別表現（練習問題 2 参照）から、 $\hat{\beta}=0$ なら $R^2=0$ といえます。

$$R^2 = \hat{\beta}^2 \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 0 \times \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 0$$

直観的には、 $\hat{\beta}=0$ なら、 X が変動しても Y の変動を全く説明できないため、 R^2 は 0 となるわけです(下図参照)。



4 最小 2 乗推定量の式に、表で計算された値を代入すると、

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{-13.2}{1.2} = -11$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = 11.6 - 11 \times 0.4 = 16$$

となります。 β の推定値は -11 ですから、雨が降ると (X が 1 になる) 売り上げは 11 万円減ることになります。 α の推定値は 16 ですから、天気が晴れ ($X=0$) であれば売り上げは 16 万円となります¹。2) 決定係数は、練習問題 2 の別表現を用いると、簡単に求めることができます。別表現は

$$R^2 = \hat{\beta}^2 \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = (-11)^2 \frac{1.2}{153.2}$$

¹この結果は次のようにも推定できます。雨の日は 2 日あり平均は $(6+4)/2=5$ 万円、晴れた日は 3 日あり平均は $(18+15+15)/3=16$ 万円です。よって、 α は 16、売り上げの差は $5-16=-11$ から β は -11 と推定されます。

ですから、これを計算すると 0.947 となります。よって、Y の全変動のうち 94.7%はモデルで説明できているといえます。

5. 残差の性質を用いて証明ができます（残差の性質は p263 参照）。まず、残差の和は 0 から、残差の平均も 0 となります。よって、残差と説明変数の標本共分散の分子は、

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\hat{u}_i = \sum_{i=1}^n X_i\hat{u}_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i$$

となります。残差と説明変数の積和は 0 ですから、第 1 項は 0 となります。また、残差の和は 0 ですから第 2 項も 0 となります。以上から、標本共分散は 0 となり、標本相関係数も 0 となります。

6. 実証研究をしていると、係数の解釈をどのようにするかわからなくなることがあります。とくに変数の対数をとったり、とらなかつたりすると解釈がとたんに見えにくくなるものです。係数の解釈は実証分析において重要ですので、練習問題を解くことで学習してもらえたらと思います。

1)について

ここでモデルは $Y = \alpha + \beta X$ ですから、 X が 1 単位増えることで Y は

$$(\alpha + \beta(X + 1)) - (\alpha + \beta X) = \beta$$

単位だけ変化します。例えば、 $\beta=2$ なら、 X が 1 単位増えると Y は 2 単位増えることとなります。

2) について

ここでモデルは $\ln(Y) = \alpha + \beta \ln(X)$ となります。このモデルでは、 Y 、 X ともに対数をとるため、対数・対数(log-log)モデルと呼ばれます。ここで X が X' に変化したとき、 Y は Y' に変化するとしましょう。このとき、モデル式から、

$$\ln(Y') - \ln(Y) = (\alpha + \beta \ln(X')) - (\alpha + \beta \ln(X)) = \beta(\ln(X') - \ln(X))$$

が成立します。上式を β について解くことで

$$\beta = \frac{\ln(Y') - \ln(Y)}{\ln(X') - \ln(X)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{Y' - Y}{Y}\right)}{\ln\left(1 + \frac{X' - X}{X}\right)} \approx \frac{\frac{Y' - Y}{Y}}{\frac{X' - X}{X}}$$

となります。したがって、 β は「 X が 1% 変化したとき Y が何% 変化するか」、つまり、 X に関する Y の弾力性となります。例えば、 $\beta=0.1$ なら、 X が 1% 増えると Y は 0.1% 増えることとなります。

3) について

ここでモデルは $Y = \alpha + \beta \ln(X)$ です。このモデルでは、 Y は対数をとらず、 X だけ対数をとりますので、線形・対数(linear-log)モデルと呼ばれます。ここで X が X' に変化したとき、 Y は Y' に変化するとします。このとき、モデル式から、

$$Y' - Y = (\alpha + \beta \ln(X')) - (\alpha + \beta \ln(X)) = \beta(\ln(X') - \ln(X))$$

が成立します。この関係式を β について解くことで

$$\beta = \frac{Y' - Y}{\ln(X') - \ln(X)} = \frac{Y' - Y}{\ln\left(1 + \frac{X' - X}{X}\right)} \approx \frac{Y' - Y}{\frac{X' - X}{X}}$$

となります。分母が X の変化率、分子が Y の変化量となります。上式は、

$$Y' - Y = \beta \frac{X' - X}{X}$$

と書き換えられますので、 X が 1% 変化（つまり、0.01）すると、 Y は 0.01β 単位変化することがわかります。例えば、 $\beta=10$ なら X が 1% 変化すると Y は $0.01 \times 10 = 0.1$ 単位だけ変化します。

4) について

ここでモデルは $\ln(Y) = \alpha + \beta X$ です。 Y は対数、 X は対数をとりませんから、対数・線形(log-linear)モデルと呼ばれます。 X が X' に変化したとき、 Y は Y' に変化するとします。このとき、モデルの関係式から、

$$\ln(Y') - \ln(Y) = (\alpha + \beta X') - (\alpha + \beta X) = \beta(X' - X)$$

が成立します。この関係式を β について解くことで

$$\beta = \frac{\ln(Y') - \ln(Y)}{X' - X} = \frac{\ln\left(1 + \frac{Y' - Y}{Y}\right)}{X' - X} \approx \frac{\frac{Y' - Y}{Y}}{X' - X}$$

となります。上式は、

$$\frac{Y' - Y}{Y} = \beta(X' - X)$$

となります。X が X' へと 1 単位変化したら(つまり、X' - X=1)

$$\frac{Y' - Y}{Y} = \beta$$

となりますから、X の 1 単位の増加は Y を $100\beta\%$ だけ変化させます。例えば、 $\beta=0.01$ であれば、X の 1 単位の増加は Y を 1% 増加させることがわかります。