2025/02/21

藪友良

トレンド変数と構造変化

時系列分析で頻繁に用いられるトレンド変数を紹介します。また、トレンドの構造変化を捉えるため、新たにダミー変数を導入します。なお、本稿は藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足資料になります。

トレンド変数

時系列データにはトレンドが存在することが多々あります。たとえば、GDP、消費、気温などは右上がり、出生数、固定電話保有数などは右下がりのトレンドを持った系列です。こうしたトレンドを考慮するため、1、2、3、4、…というように、値が 1 ずつ増加していく**トレンド変数**を考えます（以下、トレンド変数を t と表記します)。

表 1 では、1970 年から 1978 年までについてトレンド変数 t を定義しました（表の 2 列目を参照してください)。トレンド変数は、データが始まった 1970 年に 1 という値をとり、1 ずつ値が増加していることが確認できます。

表 1　トレンド変数の作り方

	t	DU	DT
1970	1	0	0
1971	2	0	0
1972	3	0	0
1973	4	0	0
1974	5	1	1
1975	6	1	2
1976	7	1	3
1977	8	1	4
1978	9	1	5

GDP の動きを説明するモデルとして、

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t$$

を考えましょう。ここで、$Y_t = \ln(GDP_t)$としています。GDP には右上がりのトレンドがあるため、説明変数としてトレンド変数tを用います。係数βは GDP の期待成長率と解釈できます。

この点を確認しましょう。上式は、$t-1$時点でも成立し、$Y_{t-1}=\alpha+\beta(t-1)+u_{t-1}$となります。このため、

$$
\begin{aligned}
Y_t - Y_{t-1} &= (\alpha+\beta t+u_t)-(\alpha+\beta(t-1)+u_{t-1}) \\
&= \beta + (u_t - u_{t-1})
\end{aligned}
$$

となります。差の期待値は、$E[u_t]=E[u_{t-1}]=0$を用いると、次のようになります。

$$E[Y_t - Y_{t-1}] = \beta$$

Y_tは GDP の対数であり、対数の差は変化率に等しいため（巻末付録 A 参照）、βは GDP の期待成長率と解釈できるわけです。

トレンドモデルの例として、地球温暖化の実証分析をすることもできます。Y_tを世界の平均気温の対数とすると、βは世界気温の期待成長率であり、$\beta>0$なら地球温暖化を意味し、$\beta=0$なら温暖化は生じていないことになります。このため、地球温暖化の実証研究では、トレンドモデルが頻繁に用いられています。

トレンドの構造変化

トレンドは安定しているわけではなく、構造変化が生じる可能性もあります。たとえば、1973 年のオイルショックにより、多くの国で経済成長率が鈍化しました（これはトレンドの傾きの変化に該当します)。また、世界大恐慌では、世界経済が急激に冷え込み、GDP の水準が急激に低下しました（定数項の変化に該当)。こうした変化は、ダミー変数を用いて捉えることできます。

構造変化点T_Bで水準が急激に変化する影響を捉えたいなら、ダミー変数DU_tを考えます。DU_tは、$t\le T_B$なら 0 となり、$t>T_B$なら 1 となる変数です。表 2 では、T_Bを 1973 年としてDU_tを作成しています(1973 年までは 0、1974 年からは 1 となる)。この変数を用いて、先のモデルを次のようにします。

$$Y_t = \alpha + \beta t + \gamma DU_t + u_t$$

このとき、$t\le T_B$なら$DU_t=0$から$Y_t=\alpha+\beta t+u_t$、$t>T_B$なら$DU_t=1$から$Y_t=(\alpha+\gamma)+\beta t+u_t$です。推定の結果、帰無仮説$\gamma=0$が採択されたなら、水準の急激な変化はないといえます。

次に、構造変化時点で係数だけがシフトする影響を捉えたいとしましょう（水準は変化していない)。たとえば、石油ショックで経済成長率は減少しましたが、GDP の水準はあまり変わりませんでした。このとき、次の交差項を作ります。

$$DT_t = DU_t(t - T_B)$$

DT_tは、$t \leq T_B$なら 0 となり、$t > T_B$なら $t - T_B$となる変数です。表 2 では、構造変化時点としてDT_tを作成しています(1973 年までは 0、1974 年からは 1、2、3 と増加する)。この変数を用いて、新しいモデルを次のように定義します。

$$Y_t = \alpha + \beta t + \theta DT_t + u_t$$

ここで、$t \leq T_B$なら、$DT_t = 0$となるため、

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t$$

となります。これに対し、$t > T_B$なら、$DT_t = t - T_B$となるため、

$$Y_t = \alpha + \beta t + \theta(t - T_B) + u_t$$

となります[1]。ここで$\theta = 0$なら、トレンドの係数変化はないと判断されます。

もしトレンドの傾きと定数項へのシフトを同時に考慮したいなら、次のモデルを推定します。

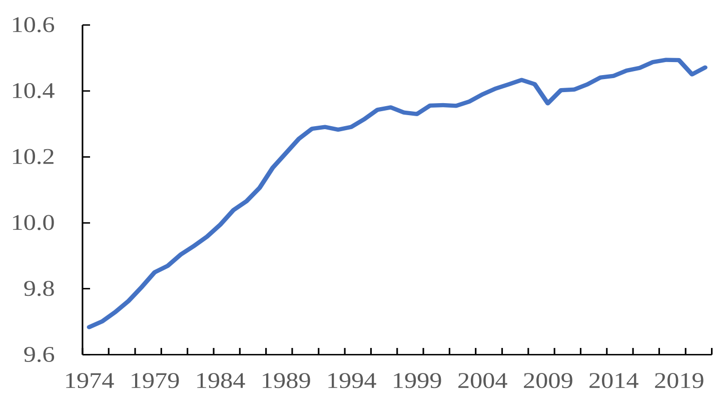
$$Y_t = \alpha + \beta t + \gamma DU_t + \theta DT_t + u_t$$

帰無仮説$\gamma = \theta = 0$が採択されたら、構造変化なしと判断されます。

例(日本の実質 GDP の成長率)

図 1 では、1974 年から 2021 年までについて、日本の実質 GDP(対数)の推移を示したものです。図をみると、バブルが崩壊した 1991 年以降、GDP 成長率が低下したことがわかります。ただし、図からは 1991 年に、水準が低下したようにはみえません

図 1：日本の実質 GDP の推移



[1] DT_tを定義するとき、tではなく$t - T_B$を用いた理由は、トレンドの傾きの変化だけを捉えたいからです（もし$DT_t = DU_t \times t$と定義してしまうと構造変化によって水準も変化します)。

ここで、構造変化日を 1990 年とし、DT_tは 1991 年から値が 1 ずつ増加する変数とします。このとき、トレンド係数に構造変化を考慮したモデルを推定すると、次のようになりました。

$$\hat{Y}_t = 9.61 + 0.038t - 0.031DT_t$$
$$(0.011) \quad (0.0009) \quad (0.0011) \qquad\qquad \bar{R}^2 = 0.991$$

つまり、1990 年までは経済成長率は 3.8%$(= 100 \times 0.038)$でしたが、それ以降は 0.7%$(= 100 \times (0.038 - 0.031))$に低下しています。

なお、構造変化を考慮しないと、次の結果となります。

$$\hat{Y}_t = 9.83 + 0.016t$$
$$(0.028) \quad (0.0009) \qquad\qquad \bar{R}^2 = 0.848$$

経済成長率は 1.6%であり、これは全期間の平均成長率となっています。しかし、これでは 1991 年以降の経済成長率を過大に評価してしまっており、問題となります。