

P350 新しく例 15-5 の最後に以下の文章を追加する予定です

仮に  $Y_t$  が GDP であり、 $X_t$  が政府支出とします。このとき、GDP の構造ショックは  $\varepsilon_{Yt}$  であり、政府支出の構造ショックは  $\varepsilon_{Xt}$  です。構造型の場合、構造ショックの各変数に対する影響は、インパルス応答関数によって簡単に評価できます。しかし、誘導型の場合、誤差項は構造ショックの線形関数であるため、誤差項の各変数に対する影響をインパルス応答関数でみても何の意味もありません。

排除制約  $b_{10} = 0$  のもとで、誘導型の誤差項はどのようなになるでしょうか。このとき、誤差項は次のように表せます。

$$\begin{aligned}u_{Yt} &= \varepsilon_{Yt} \\u_{Xt} &= a_{20}\varepsilon_{Yt} + \varepsilon_{Xt}\end{aligned}$$

つまり、誤差項  $u_{Yt}$  は構造ショック  $\varepsilon_{Yt}$  と同じですが、誤差項  $u_{Xt}$  は構造ショック ( $\varepsilon_{Yt}$ ,  $\varepsilon_{Xt}$ ) の線形関数です<sup>1</sup>。なお、これは逆も正しいことに注意してください。つまり、誤差項と構造ショックに上記の関係があれば、2 変量の構造 VAR において排除制約  $b_{10} = 0$  が成立することを意味します(3 変量の VAR は練習問題 9 参照)。

---

<sup>1</sup> 誘導型を OLS 推定することで、残差として誤差項 ( $u_{Yt}$ ,  $u_{Xt}$ ) が得られます。 $u_{Yt} = \varepsilon_{Yt}$  から、被説明変数  $u_{Xt}$ 、説明変数  $\varepsilon_{Yt}$  とした OLS 推定により、 $a_{20}$  が推定でき残差として  $\varepsilon_{Xt}$  が得られます。

## 15章の新しい練習問題を追加する予定です

8.★ 20年分の月次データを用いて5変量VAR(定数項あり)を推定したい。季節性を考慮するため、ラグ次数 $p=12$ と設定する。この推定の是非を述べよ。

Hint: サンプルサイズ、パラメータ数

9.★ 3変量の構造VARを考える。排除制約( $b_{10} = c_{10} = c_{20} = 0$ )のもとで、誘導型の誤差項は構造ショックを用いて、次のように表現できることを示せ。

$$\begin{aligned}u_{Yt} &= \varepsilon_{Yt} \\u_{Xt} &= a_{20}\varepsilon_{Yt} + \varepsilon_{Xt} \\u_{Zt} &= a_{30}\varepsilon_{Yt} + b_{30}\varepsilon_{Xt} + \varepsilon_{Zt}\end{aligned}$$

なお、これは逆も正しい。つまり、誤差項と構造ショックに上記の関係があれば、3変量の構造VARにおいて排除制約( $b_{10} = c_{10} = c_{20} = 0$ )が成立する。

10.★ 金融政策の効果を分析したい。四半期データを用いて、3変量(実質GDPの成長率、インフレ率、短期金利)の構造VARモデルを推定する。排除制約を用いる場合、3変数の順番として何が適切か。その理由とともに述べよ。

11.★ 原油の需給ショックが原油価格に与える影響を分析したい。月次データを用いて、3変量(世界原油生産量の変化率(%))、世界経済活動指数、実質原油価格)の構造VARを推定する。排除制約を用いる場合、3変数の順番として何が適切か。その理由とともに述べよ。なお、世界経済活動指数は乾貨物運賃から作成された指標であり、世界経済活動から生じる原油需要を捉えるための変数である<sup>2</sup>。

### 練習問題8の答え

季節性を考慮するため、月次データならラグ次数を12とするのは適切な選択である(四半期データなら4とする)。ただし、この場合、サンプルサイズよりパラメータ数が多いため、このモデルを推定することはできない。

サンプルサイズは240( $=12 \times 20$ )となる。5変量のVAR( $p$ )モデルは、1本の式に $1+5p$ 個のパラメータがあり、式は計5本あるので、パラメータ数は $5 \times (1+5p)$ となる。 $p=12$ の場合、パラメータ数は305( $=5 \times (1+5 \times 12)$ )となり、サンプルサイズよりパラメータ数が多い。

---

<sup>2</sup> 世界経済活動が活発になると海上運賃が上昇することから、世界経済活動指標は世界経済活動の変動を捉える指標として用いられる。FREDでは、世界経済活動指標をIndex of Global Real Economic Activityとして公開しています。

### 練習問題 9 の答え

排除制約 ( $b_{10} = c_{10} = c_{20} = 0$ ) のもとで、構造 VAR は次のようになる。

$$Y_t = \mu_1 + a_{11}Y_{t-1} + b_{11}X_{t-1} + c_{11}Z_{t-1} + \varepsilon_{Yt}$$

$$X_t = \mu_2 + a_{20}Y_t + a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + c_{21}Z_{t-1} + \varepsilon_{Xt}$$

$$Z_t = \mu_3 + a_{30}Y_t + a_{31}Y_{t-1} + b_{30}X_t + b_{31}X_{t-1} + c_{31}Z_{t-1} + \varepsilon_{Zt}$$

1 番目の式は誘導型となる (説明変数がラグだけである)。このため、 $u_{Yt} = \varepsilon_{Yt}$  となる。この式を 2 番目の式に代入すると、

$$X_t = \mu_2 + a_{20}(\mu_1 + a_{11}Y_{t-1} + b_{11}X_{t-1} + c_{11}Z_{t-1} + \varepsilon_{Yt}) + a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + c_{21}Z_{t-1} + \varepsilon_{Xt}$$

$$= \mu_2 + a_{20}\mu_1 + (a_{20}a_{11} + a_{21})Y_{t-1} + (a_{20}b_{11} + b_{21})X_{t-1} + (a_{20}c_{11} + c_{21})Z_{t-1} + a_{20}\varepsilon_{Yt} + \varepsilon_{Xt}$$

となるため、 $u_{Xt} = a_{20}\varepsilon_{Yt} + \varepsilon_{Xt}$  と分かる。最後に、 $Y_t$  と  $X_t$  の式を、 $Z_t$  の式に代入すると、 $u_{Zt} = a_{30}\varepsilon_{Yt} + b_{30}\varepsilon_{Xt} + \varepsilon_{Zt}$  とわかる (式展開が面倒なので省略した)。

### 練習問題 10 の答え

実証分析では、最後の変数  $Z$  を短期金利にすることが多い。これは中央銀行が物価と経済状況を考慮したうえで金融政策を決定しているためである。日本では、金融政策決定会合は年 8 回開催されており、四半期データなら当期の GDP とインフレ率の変化に十分に反応できるだろう。

残りの変数の順番については判断が難しい。ただし、高頻度データであれば、投資は事前に決定されており、短期金利が変化しても投資額は変化しないと考えられる。よって、短期金利は実質 GDP やインフレ率に影響せず、排除制約のうち  $c_{10} = c_{20} = 0$  が満たされる。四半期データが十分に高頻度かどうかは微妙だが、ここでは仮定が満たされるとする (なお、年次データでは仮定は満たされないだろう)。

残りの変数の順番を考えよう。排除制約 ( $b_{10} = c_{10} = c_{20} = 0$ ) のもとで、誘導型ショックは構造ショックを用いて次のように表せる (練習問題 8 参照)。

$$u_{Yt} = \varepsilon_{Yt}$$

$$u_{Xt} = a_{20}\varepsilon_{Yt} + \varepsilon_{Xt}$$

$$u_{Zt} = a_{30}\varepsilon_{Yt} + b_{30}\varepsilon_{Xt} + \varepsilon_{Zt}$$

金利  $Z$  は 3 番目に置いているため、構造ショック  $\varepsilon_{Zt}$  は政策ショックになる。総需要総供給分析では、実質 GDP と物価は、総供給曲線と総需要曲線の交点で

決定される<sup>3</sup>。このため、構造ショック( $\varepsilon_{Yt}$ 、 $\varepsilon_{Xt}$ )は、それぞれ供給ショックと需要ショックと考えられる。供給ショックは総供給曲線をシフトさせるショック、需要ショックは総需要曲線をシフトさせるショックである。ここで3つの可能性がある<sup>4</sup>。

**第1の可能性** 1番目の変数  $Y$  を実質 GDP 成長率、2番目の変数  $X$  をインフレ率とする。これは総供給曲線が垂直なケースに該当する(図(a)参照)。このとき、 $\varepsilon_{Yt}$ は供給ショック、 $\varepsilon_{Xt}$ は需要ショックとなる。供給ショック  $\varepsilon_{Yt}$ は総供給曲線をシフトさせ、実質 GDP とインフレ率を変化させる。これに対し、需要ショック  $\varepsilon_{Xt}$ は、総需要曲線をシフトさせ、インフレ率だけを変化させる。

**第2の可能性** 1番目の変数  $Y$  をインフレ率、2番目の変数  $X$  を実質 GDP とする。これは総供給曲線が水平なケースに該当する(図(b)参照)。供給ショック  $\varepsilon_{Yt}$ は実質 GDP とインフレ率を変化させるが、需要ショック  $\varepsilon_{Xt}$ は実質 GDP だけを変化させる。

**第3の可能性** 総供給曲線が右上がりの傾きをもっているとき、需要ショックと供給ショックは、インフレ率と実質 GDP の両方に影響を与える(図(c)参照)。このため、実質 GDP とインフレ率の順番をどのようにしても、排除制約は不適當になる( $b_{10} \neq 0$ )。ただし、金利  $Z$  は短期的には、インフレ率と実質 GDP に影響しないため、 $c_{10} = c_{20} = 0$ は成立する。このとき、政策ショック  $\varepsilon_{Zt}$  のインパルス応答関数は推定できるが、他の構造ショックのインパルス応答関数は推定できない<sup>5</sup>。

<sup>3</sup> グレゴリー・マンキュー『マクロ経済学』(東洋経済新報社、2024年)参照。

<sup>4</sup> ここでの記述は付録Dの[14]をもとに作成した。

<sup>5</sup>  $c_{10} = c_{20} = 0$ のもとで、構造VARは次のように表現できる(ただし、 $b_{10} \neq 0$ )。

$$Y_t = \mu_1 + a_{11}Y_{t-1} + b_{10}X_t + b_{11}X_{t-1} + c_{11}Z_{t-1} + \varepsilon_{Yt}$$

$$X_t = \mu_2 + a_{20}Y_t + a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + c_{21}Z_{t-1} + \varepsilon_{Xt}$$

$$Z_t = \mu_3 + a_{30}Y_t + a_{31}Y_{t-1} + b_{30}X_t + b_{31}X_{t-1} + c_{31}Z_{t-1} + \varepsilon_{Zt}$$

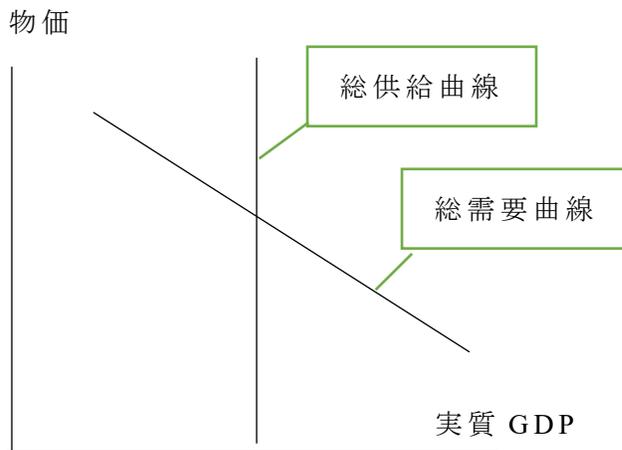
ここで、 $Z_t$ の式は内生性が生じないため、この構造型の式のOLS推定は一致性を持つ( $\varepsilon_{Zt}$ が変化すると $Z_t$ が変化するが、 $Y_t$ と $X_t$ は変化しない)。よって、その残差は構造ショック  $\varepsilon_{Zt}$ となる。構造ショックが推定できるため、それがインフレ率、実質 GDP 成長率、短期金利に与える効果が推定できる。なお、1番目と2番目の構造型は推定できないが、次の誘導型なら内生性の問題はなく、OLS推定は一致性を持つ。

$$Y_t = a_{11}Y_{t-1} + b_{11}X_{t-1} + c_{11}Z_{t-1} + u_{Yt}$$

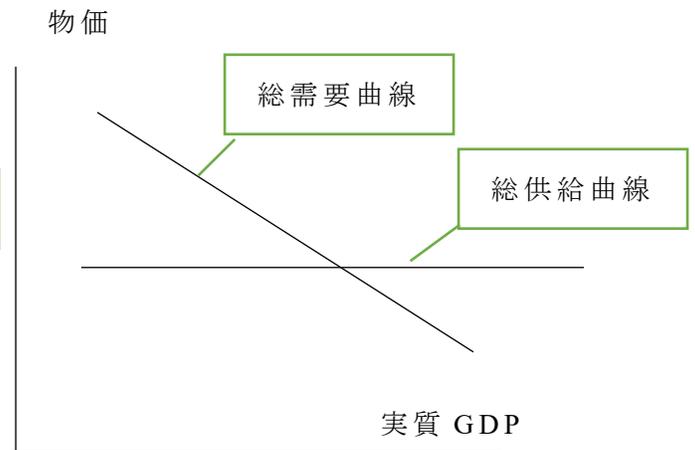
$$X_t = a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + c_{21}Z_{t-1} + u_{Xt}$$

図 総需要曲線と総供給曲線

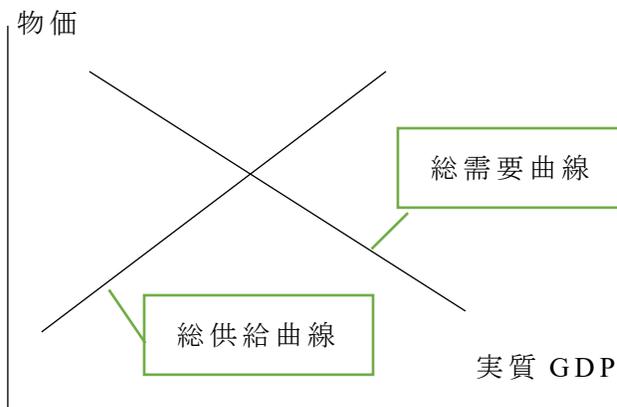
(a) 総供給曲線が垂直



(b) 総供給曲線が水平



(c) 総供給曲線が右上がり



### 練習問題 11 の答え

Kilian(2009)では、1973年3月から2007年12月までの月次データを用いて、原油の需要ショックと供給ショックが原油価格に与える影響を推定している<sup>6</sup>。この論文では、 $Y_t$ は世界原油生産量の変化率(%)、 $X_t$ は世界経済活動指数、 $Z_t$ は実質原油価格とした。また、構造ショック( $\varepsilon_{Yt}$ 、 $\varepsilon_{Xt}$ 、 $\varepsilon_{Zt}$ )は3つあり、

構造型の式から、 $\varepsilon_{Zt}$ が1単位変化すると、 $Z_t$ が1単位変化する。同時点では、 $\varepsilon_{Zt}$ からインフレ率や実質GDPに影響しないため、 $Y_t$ や $X_t$ は変化しない。そして、誘導型の式から $Y_{t+1}$ と $X_{t+1}$ がどれぐらい変化するわかる。これを繰り返していけば、インパルス応答関数が推定できる。

<sup>6</sup> Kilian, L. (2009) Not All Oil Price Shocks Are Alike: Disentangling Demand and Supply Shocks in the Crude Oil Market, *American Economic Review* 99(3), 1053-1069.

それぞれ原油供給ショック、総需要ショック、原油需要ショックと呼んでいる。総需要ショックは経済活動の高まりから生じる原油需要、原油需要ショックは原油供給の将来不安から予備的動機として生じる原油需要である。

変数の順番として、世界原油生産量の変化率(%)、世界経済活動指数、実質原油価格とした理由を考えよう。

1 番目の変数は世界原油生産量である。原油生産量は事前の需要見込みから決定されており、世界経済活動指数や実質原油価格が上がっても、生産量は当月内では反応できない。これは原油市場の供給曲線が短期的には垂直であることを意味し、生産量は供給ショックだけの影響を受ける。よって、 $\varepsilon_{Yt}$ は供給ショックと解釈できる。なお、この仮定は月次データなら正当化されるが、四半期データなら成立しないことに注意してほしい。

2 番目の変数としては、世界経済活動指標が適当だろう。世界経済活動の変化は遅いため、原油価格の変化は世界経済活動に当月内では影響しないと考えられる<sup>7</sup>。なお、 $\varepsilon_{Xt}$ は世界経済活動指標の構造ショックであり、総需要ショックと解釈できる。

3 番目の変数は、実質原油価格である。実質原油価格は、供給ショックと総需要ショックから影響を受ける。また、実質原油価格の構造ショック  $\varepsilon_{Zt}$ は、原油需要ショックと解釈できる。原油需要ショックは、原油供給の将来不安などから予備的動機として原油需要が増大するようなショックとなる。

サポートウェブサイトにあるデータ(oil2.csv)を用いて、Kilian(2009)の実証結果を再現してみよう。まず、ラグ次数を 3 として、3 変量 VAR を推定した(AIC は 3、BIC は 2 を選択したので長い次数である 3 を用いた)。下図では、供給ショック、総需要ショック、原油需要ショックの 1 標準誤差の増加が原油価格に与える影響をみている(供給ショックだけ 1 標準誤差の減少とした)。図(a)をみると、供給ショックは原油価格にほとんど影響を与えていない。これに対し、図(b)をみると、総需要ショックは、当初はあまり原油価格に影響を与えないが、その影響は徐々に大きくなっている。最後に、図(c)をみると、原油需要ショックは、原油価格を大きく上昇させるが、その影響は徐々に

---

<sup>7</sup> 当月内で用いられる原油はすでに取引が終わっており、その月内の経済活動には影響しないということも言えるだろう。

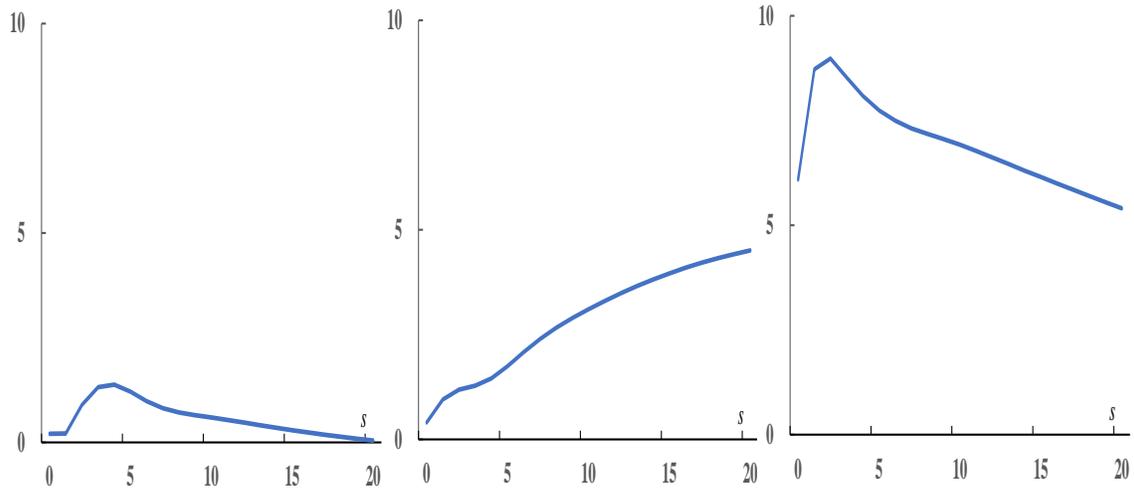
低下している。

図 構造ショックに対する原油価格の反応

(a) 供給ショック

(b) 総需要ショック

(c) 原油ショック



この結果から、原油価格の急激な変動は、供給ショックや総需要ショックではなく、将来不安から生じる原油需要ショックが大きな原因になっていることがわかる。