

説明変数が確率変数の場合

標準的仮定 1(説明変数 X_i は確率変数ではない)は、現実的な仮定ではありません。仮定 1 を取り除く方法として、仮定 3($E[u_i] = 0$)をより強い仮定に変更するやり方があります。以下では、仮定 1 は成立しないとしたうえで、新しい仮定 3 を説明し、そのもとで OLS 推定量が不偏性を満たすことを示します。

本稿は、藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足資料です。条件付き期待値や繰り返し期待値の法則に馴染みがない読者は、藪友良『入門 実践する統計学』(東洋経済新報社、2012 年)のサポートウェブサイト資料「条件付き期待値と繰り返し期待値の法則」を参照してください¹。

新しい仮定 3

$\mathbf{X}$ は $X_1, X_2, \dots, X_n$ をまとめたものと定義します(つまり、 $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$)。そして、仮定 3($E[u_i] = 0$)は、次の仮定 3'に変更します。

$$\text{仮定 3': } E[u_i|\mathbf{X}] = 0$$

仮定 3'($E[u_i|\mathbf{X}] = 0$)は、仮定 3($E[u_i] = 0$)よりも強い仮定です。これは仮定 3'が仮定 3 を意味することから明らかです(つまり、仮定 3'は仮定 3 より強い)。

$$E[u_i] = E[E[u_i|\mathbf{X}]] = E[0] = 0$$

式展開では、仮定 3'と繰り返し期待値の法則を用いました。なお、仮定 3 は仮定 3'を意味しません。

仮定 3'のもとでの OLS 推定量の性質

新たな仮定 3'のもとで、OLS 推定量 $\hat{\beta}$ が不偏性を満たすことを確認しましょう。OLS 推定量 $\hat{\beta}$ の確率的表現は(3.3.1 節参照)、

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

となります。仮定 3'のもとで、条件付き期待値は β です。

¹ <https://www.fbc.keio.ac.jp/~tyabu/tokei/ce.pdf>

$$E[\hat{\beta}|\mathbf{X}] = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) E[u_i|\mathbf{X}]}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \beta$$

これは $\mathbf{X}$ を所与としたとき、すべての X_i を定数と見なし、期待値の外に出すことができるためです。この結果から、繰り返し期待値の法則より、OLS 推定量の期待値が β であることを確認できます。

$$E[\hat{\beta}] = E[E[\hat{\beta}|\mathbf{X}]] = E[\beta] = \beta$$

以上から、説明変数が確率変数であっても、仮定 3'を課すことで OLS 推定量の不偏性が確認できました。計量経済学の上級書では、仮定 1 と仮定 3 の代わりに、仮定 3'が課されます(巻末参考文献 D の[7][8][9]参照)。

仮定 3'は現実的か

仮定 3'($E[u_i|\mathbf{X}] = 0$)は強い仮定であり、強外生性を意味します。**強外生性** (strict exogeneity)とは、誤差項 u_i がすべての X_j に対して無相関であることを意味します。つまり、どのような i や j に対しても、次式が成立します。

$$\text{Cov}(X_j, u_i) = 0$$

この点は仮定 3'から、 $E[u_i X_j] = 0$ を証明できます。

$$\begin{aligned} E[u_i X_j] &= E[E[u_i X_j|\mathbf{X}]] \\ &= E[X_j E[u_i|\mathbf{X}]] \\ &= E[X_j \times 0] = 0 \end{aligned}$$

式展開では、仮定 3'と繰り返し期待値の法則を用いました。2 行目の式展開では、 $\mathbf{X}$ を所与としているため、 X_j は固定した値となすことができ、期待値の外に出すことができます。

仮定 3'は強い仮定ですが、無作為抽出した横断面データ(Y_i, X_i)なら、弱い仮定である仮定 3''に置き換えることができます。

$$\text{仮定 3'': } E[u_i|X_i] = 0$$

これは $X_1, X_2, \dots, X_n$ は相互に独立になるため、 $u_i = Y_i - \alpha - \beta X_i$ は、 X_i 以外の X_j とは独立だからです。よって、

$$\begin{aligned} E[u_i|\mathbf{X}] &= E[u_i|X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n] \\ &= E[u_i|X_i] = 0 \end{aligned}$$

となり、仮定 3'($E[u_i|\mathbf{X}] = 0$)と仮定 3''($E[u_i|X_i] = 0$)は同じ条件になります。

仮定 3' ($E[u_i|\mathbf{X}] = 0$) は、はたして現実的なのでしょうか。無作為抽出した横断面データなら、仮定 3' は仮定 3'' と同じですから、おかしい仮定ではありません。しかし、通常の観察データなら、仮定 3' は成立しない可能性があります。とくに時系列データでは、仮定 3' は成立しないことがほとんどです。時系列データでは、以下のケースが頻繁に生じ、その場合に仮定 3' は成立しません²。

- (1) 誤差項に系列相関がある (8.2.2 節参照)
- (2) 説明変数に被説明変数のラグがある (例 7-1、例 7-2 参照)
- (3) 被説明変数から説明変数に時間を通じたフィードバックがある

繰り返しになりますが、仮定 3' は強い仮定であり、この仮定が成立しないと OLS 推定量は不偏性を満たさなくなることに注意してください。

² 仮定 3' が成立するとき、異なる時点 t や s に対して $Cov(X_t, u_s) = 0$ が成立します。以下では、各ケースで共分散が 0 とならないことを確認します。モデルは $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ とします (つまり、 $u_t = Y_t - \alpha - \beta X_t$)。 (1) として、 u_t と u_{t-1} が相関するとします。このとき、 X_{t-1} が変化すると ($u_{t-1} = Y_{t-1} - \alpha - \beta X_{t-1}$ から) u_{t-1} が変化し、系列相関から u_t も変化します。つまり、 X_{t-1} と u_t が相関します。 (2) として、 $X_t = Y_{t-1}$ とします。このとき、 u_{t-1} が変化すると ($Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} + u_{t-1}$ から) Y_{t-1} が変化します。つまり、 u_{t-1} と $X_t = Y_{t-1}$ が相関します。 (3) として、 Y_t から s 期先の X_{t+s} へのフィードバックがあるとします。このとき、 u_t が変化すると Y_t が変化し、ひいては X_{t+s} が変化します。つまり、 X_{t+s} と u_t が相関します。