2025/10/22

藪友良

変量効果モデル

パネル分析における変量効果では、説明変数と個別効果が無相関と仮定されています。これは特殊ケースであり、一般には成立しない仮定になります。本稿では、変量効果の前提に基づく推定法である変量効果推定を解説します。なお、こちらは藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足資料です。

変量効果の前提

パネルデータは、同一対象を調査した横断面データが複数時点にわたり記録されたものです(1.3.1 節参照)。ここで、パネルデータとして、以下の変数を考えましょう。

$$X_{i,t} \qquad Y_{i,t}$$

ここで、iは観測番号($i = 1,2, \dots, \mathrm{N}$)、$t$は時点($t = 1,2, \dots, \mathrm{T}$)を表します。

モデルを次のようにします。

$$Y_{i,t} = \alpha + \beta X_{i,t} + Z_i + u_{i,t}$$

Z_iは個体iの**個別要因**であり、時間を通じて一定の変数とします。これは分析者に観察できない変数(たとえば、Z_{1i}として生まれつきの能力など)であってもかまいません。**変量効果の前提**が正しいとき、説明変数$X_{i,t}$と個別要因Z_iは無相関であり、**固定効果の前提**が正しいとき、説明変数$X_{i,t}$と個別要因Z_iに相関があるとします。

例： 変量効果の前提が正しいケース

新薬の効果を知りたいため、新薬と偽薬をランダムに割り当てます。説明変数$X_{i,t}$は新薬を割り当てたら 1 となるダミー変数です。このとき、新薬割当の有無$X_{i,t}$は、個人属性Z_iと無相関ですから、変量効果の前提が正しことになります。この場合であれば、変量効果を前提にすることで効率的な推定が可能になります。

変量効果推定

変量効果モデルでは、個別要因Z_iは確率変数であり、その期待値は 0、分散はσ_z^2、異なる個体(i, j)の個別要因(Z_i, Z_j)は互いに無相関と仮定されます($\mathrm{E}[Z_i] = 0$、$E[Z_i^2] = \sigma_z^2$、$\mathrm{E}[Z_i Z_j] = 0$)。そして、変量効果のもとで、説明変数$X_{i,t}$と個別要因Z_iは無相関です[1]。つまり、全ての時点tに関して、$\mathrm{Cov}(Z_i, X_{i,t}) = 0$が成立します。最後に、誤差項$u_{i,t}$は期待値 0、分散$\sigma_u^2$、系列相関がなく($E[u_{i,t}u_{i,s}] = 0$)、また、$u_{i,t}$は$Z_i$や$X_{i,t}$とも無相関とします。

変量効果モデルは、次のように表されます。

$$
\begin{aligned}
Y_{i,t} &= \alpha + \beta X_{i,t} + (Z_i + u_{i,t}) \\
&= \alpha + \beta X_{i,t} + e_{i,t}
\end{aligned}
$$

ここで、$e_{i,t} = Z_i + u_{i,t}$は新しい誤差項です。個別要因Z_iは説明変数$X_{i,t}$と無相関ですから、説明変数$X_{i,t}$は誤差項$e_{i,t}$と無相関です(説明変数は外生変数)。

プールド OLS でも、係数βの一致推定量が得られます。しかし、誤差項$e_{i,t}$は標準的仮定 5(誤差項同士が無相関)を満たしておらず、系列相関を除いたうえで OLS 推定することで、より効率的な推定量が得られます(これは一般化最小 2 乗推定(GLS 推定)です)。

標準的仮定 5 を満たしていないことは簡単に確認できます。異なる時点の誤差項$e_{i,t} = Z_i + u_{i,t}$と$e_{i,s} = Z_i + u_{i,s}$は、同じ個別要因Z_iを含んでいますから、両者には相関が生じるわけです。これは次の式から確認できます。

$$
\begin{aligned}
E[e_{i,t}e_{i,s}] &= E[(Z_i + u_{i,t})(Z_i + u_{i,s})] \\
&= E[Z_i^2] + E[Z_i u_{i,t}] + E[Z_i u_{i,s}] + E[u_{i,t}u_{i,s}] \\
&= E[Z_i^2] = \sigma_z^2
\end{aligned}
$$

式展開では、$E[u_{i,t}u_{i,s}] = 0$、$E[Z_i u_{i,t}] = E[Z_i u_{i,s}] = 0$を用いました。

変量効果推定量(random effects estimator)は、パラメータを一般化最小 2 乗法によって推定します。つまり、元の式を変形して、誤差項の系列相関を除いてから OLS 推定するわけです。この点を詳しく見ていきましょう。

[1] 教科書では、固定効果を$\alpha_i = \alpha + Z_i$と定義し、変量効果とは説明変数と固定効果が無相関であると定義しました。ここで、$X_{i,t}$と$\alpha_i = \alpha + Z_i$が無相関なら、αは定数ですから、$X_{i,t}$とZ_iが無相関になります。

変量効果推定の詳細

時点tに関して、$Y_{i,t} = \alpha + \beta X_{i,t} + e_{i,t}$の和を取ると、

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{i,t} = \sum_{t=1}^{T} \left(\alpha + \beta X_{i,t} + e_{i,t}\right)$$

$$= T\alpha + \beta \sum_{t=1}^{T} X_{i,t} + \sum_{t=1}^{T} e_{i,t}$$

となり、さらに上式の両辺をTで割ると、時間平均の関係式が得られます。

$$\bar{Y}_i = \alpha + \beta \bar{X}_i + \bar{e}_i$$

ただし、各変数の時間平均を次のように定義しています。

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{i,t}, \quad \bar{X}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{i,t}, \quad \bar{e}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_{i,t}$$

誤差項の平均$\bar{e}_i$は次のように分解できます。

$$\bar{e}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_{i,t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(Z_i + u_{i,t}\right) = Z_i + \bar{u}_i$$

パラメータθを次のように定義します。

$$\theta = 1 - \left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_Z^2 + T\sigma_u^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで、θの構成要素$\frac{\sigma_u^2}{\sigma_Z^2 + T\sigma_u^2}$は、$\bar{e}_i$の分散に占める$\bar{u}_i$の分散の割合になります(補足参照)[2]。この割合は 0 から 1 の間の値をとるため、パラメータθもまた 0 から 1 の間の値をとります(なお、$E[Z_i^2] = \sigma_z^2$、$E[u_{i,t}^2] = \sigma_u^2$です)。

被説明変数$Y_{i,t}$から時間平均$\bar{Y}_i$の一定割合θを引くと次のようになります[3]。

$$Y_{i,t} - \theta\bar{Y}_i = (\alpha + \beta X_{i,t} + e_{i,t}) - \theta(\alpha + \beta\bar{X}_i + \bar{e}_i)$$

$$= \alpha(1-\theta) + \beta(X_{i,t} - \theta\bar{X}_i) + (e_{i,t} - \theta\bar{e}_i)$$

このとき、新しい誤差項$e_{i,t} - \theta\bar{e}_i$から系列相関は消えるため、被説明変数$Y_{i,t} -$

---

2 Z_iの分散σ_Z^2が大きいと、θは 1 に近い値となります。つまり、$\bar{e}_i$の変動に占めるZ_iの割合が大きいとき、θは 1 に近い値となるわけです。また、Tが大きいとき、$\bar{u}_i$は 0 となるため、$\bar{e}_i$の変動に占めるZ_iの割合が大きくなり、θは 1 に近い値になります。

3 ここでθは、プールド OLS からの残差$\hat{e}_{i,t}$を用いて、分散σ_u^2とσ_z^2を推定することで得られます。σ_u^2とσ_z^2を推定する方法として、たとえば、$E[e_{i,t}e_{i,s}] = \sigma_z^2$に注目し、異なる時点の残差の積$(\hat{e}_{i,t}\hat{e}_{i,s})$を用いて、$\sigma_z^2$を推定することができます(推定量を$\hat{\sigma}_z^2$と表記する)。また、$E[e_{i,t}^2] = E\left[\left(Z_i + u_{i,t}\right)^2\right] = E[Z_i^2] + E[u_{i,t}^2] = \sigma_z^2 + \sigma_u^2$となることから(つまり、$\sigma_u^2 = E[e_{i,t}^2] - \sigma_z^2$となることから)、残差$\hat{e}_{i,t}$の分散$\hat{\sigma}_e^2$を推定し、$\hat{\sigma}_u^2$を$\hat{\sigma}_e^2 - \hat{\sigma}_z^2$として推定できます。

$\theta\bar{Y}_i$、説明変数$X_{i,t}-\theta\bar{X}_i$とした OLS 推定を実行すれば、より効率的な推定が可能です($e_{i,t}-\theta\bar{e}_i$の系列相関が 0 となることの証明は補足参照)。これは**一般化最小 2 乗(GLS)推定**であり、**変量効果推定量**(random effects estimator)と呼ばれます。

誤差項の平均は$\bar{e}_i=Z_i+\bar{u}_i$となるため、変量効果推定の誤差項は次のようになります。

$$e_{i,t}-\theta\bar{e}_i=\left(Z_i+u_{i,t}\right)-\theta(Z_i+\bar{u}_i)$$
$$=(1-\theta)Z_i+u_{i,t}-\theta\bar{u}_i$$

つまり、θが 1 なら個別要因Z_iが完全に取り除かれており、変量効果推定と固定効果推定は同じ結果になります。これに対し、θが 0 なら、個別要因Z_iが全て残されるため、変量効果推定とプールド OLS は同じ結果になります。現実のデータ分析では、θは 0 から 1 の間の値をとり、変量効果推定は、プールド OLS や固定効果推定とは異なる結果になります。

<u>変量効果推定の長所と短所</u>

変量効果推定の長所と短所を説明します。第 1 の長所は、変量効果の前提が正しいなら、一般化最小 2 乗法によって効率的な推定が可能になっている点です。つまり、パラメータを高い精度で推定でき(標準誤差が小さい)、有意な結果が得られやすくなります。

第 2 の長所は、変量効果モデルでは、時間を通じて一定の要因でも説明変数に含めることができる点です。変量効果モデルでは、時間を通じて一定の他変数を加えても、多重共線性は発生しません。

短所は、変量効果の前提(説明変数と個別効果が無相関)が特殊ケースである点です。この仮定は一般には成立しないため、変量効果推定はバイアスを持った推定量となります[4]。

最後に、$u_{i,t}$には系列相関がないと仮定しましたが、現実には、系列相関が存在します。このため、変量効果推定を行ったうえで、クラスターロバスト標

[4] 個別効果を考慮しながら、時間を通じて一定の変数の係数を推定する方法としてハウスマン=テイラー法があります。詳しくは、教科書の練習問題 13.13 を参照してください。Stata では、xthtaylor というコマンドがあります。

準誤差を用いて、信頼区間や仮説検定を行うことが推奨されます。

例:交通事故死者数と酒税

飲酒運転は交通事故の原因の 1 つとされます。このため、酒税を上げることで飲酒運転を減らせるなら、交通事故死者数を減少させることが可能かもしれません。J・ストック／M・ワトソンは、*Introduction to Econometrics*)で、1982～88 年の米国 48 州の酒税と交通事故死者数の関係を調べた研究を紹介しています(N=48、T=7、$N\times T$=336)。

ここで i 州の t 年における酒税額(ビール 1 ケース当たり)を $X_{i,t}$ とし、t 年における交通事故死者数(1 万人当たり)を $Y_{i,t}$ とします。変量効果推定量は

$$Y_{i,t} = -0.052X_{i,t}$$

(0.110)

となります(カッコ内はクラスターロバスト標準誤差)。X の係数は負にはなっていますが、0 に近い値となり有意でもありません。予想とは異なり、酒税を増やしても、死者数を減らすという効果を見出すことができませんでした。しかし、この推定では、酒税額は、州固有の要因と無相関と仮定しており、何らかのバイアスを発生させている可能性があります。州固有の要因(道路の舗装率、飲酒に関するモラル、運転マナー、道路の混雑率など)の存在は大きく、これらは酒税額と相関すると考えるのが自然です。

次に、同じデータを固定効果モデルで推定すると、

$$Y_{i,t} = -0.656X_{i,t} + \text{州固有の要因}$$

(0.29)**

となります(カッコ内はクラスターロバスト標準誤差)。ダミー変数は多いので「州固有の効果」と省略して表示しています。州固有の要因を考慮することで、酒税額の係数は有意に負となります。係数が－0.656 であるとは、酒税が 1 ドル増えると交通事故死者数が 0.656 人減少することを意味します。固定効果推定量では、個別効果が説明変数と相関する可能性を許容しており、こちらの方が信頼できる結果となります。

補足

$\boldsymbol{\sigma_u^2/(\sigma_Z^2+T\sigma_u^2)}$の意味

$\bar{e}_i = Z_i + \bar{u}_i$から、$\bar{e}_i$の分散は次のようになります。

$$V(\bar{e}_i) = V(Z_i + \bar{u}_i) = V(Z_i) + V(\bar{u}_i)$$
$$= \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2/T$$

よって、$\bar{e}_i$の分散のうち、$\bar{u}_i$の分散の割合は次のようになります。

$$\frac{V(\bar{u}_i)}{V(Z_i) + V(\bar{u}_i)} = \frac{\sigma_u^2/T}{\sigma_u^2/T + \sigma_z^2} = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2}$$

変量効果モデルの誤差項の性質

証明の前に、式展開で有用な式を導出します。

$$(1-\theta)^2 = \left(1 - \left[1 - \left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2}\right)^{1/2}\right]\right)^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2} \tag{A1}$$

また、$(1-\theta)^2 = 1 - 2\theta + \theta^2$から次のようになります。

$$\theta^2 - 2\theta = (1-\theta)^2 - 1 = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2} - 1 \tag{A2}$$

ここでは、新しい誤差項$e_{i,t} - \theta\bar{e}_i$には系列相関がないことを確認します(期待値が 0、分散一定は練習問題参照)。異時点間の共分散は次のとおりです。

$$E\left[(e_{i,t} - \theta\bar{e}_i)(e_{i,s} - \theta\bar{e}_i)\right] = E\left[\left(Z_i + u_{i,t} - \theta(Z_i + \bar{u}_i)\right)\left(Z_i + u_{i,s} - \theta(Z_i + \bar{u}_i)\right)\right]$$
$$= E\left[\left((1-\theta)Z_i + (u_{i,t} - \theta\bar{u}_i)\right)\left((1-\theta)Z_i + (u_{i,s} - \theta\bar{u}_i)\right)\right]$$
$$= (1-\theta)^2 E[Z_i^2] + E\left[(u_{i,t} - \theta\bar{u}_i)(u_{i,s} - \theta\bar{u}_i)\right]$$

ここで右辺 2 項目は、

$$E\left[(u_{i,t} - \theta\bar{u}_i)(u_{i,s} - \theta\bar{u}_i)\right] = E\left[\left(u_{i,t} - \theta\frac{u_{i,1} + \cdots + u_{i,T}}{T}\right)\left(u_{i,s} - \theta\frac{u_{i,1} + \cdots + u_{i,T}}{T}\right)\right]$$

$$= \theta^2\frac{T\sigma_u^2}{T^2} - \theta\frac{2\sigma_u^2}{T} = \frac{\sigma_u^2}{T}(\theta^2 - 2\theta) = \frac{\sigma_u^2}{T}\left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2} - 1\right)$$

と表現できます(式展開では(A2)式を用いました)。これと(A1)式を共分散の式に代入すると、共分散が 0 となることを確認できます。

$$E\left[(e_{i,t} - \theta\bar{e}_i)(e_{i,s} - \theta\bar{e}_i)\right] = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2}\sigma_z^2 + \frac{\sigma_u^2}{T}\left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2} - 1\right)$$

$$= \frac{\sigma_u^2\sigma_z^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2} - \frac{\sigma_u^2\sigma_z^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_z^2} = 0$$

練習問題 1

新しい誤差項$e_{i,t}-\theta\bar{e}_i$は標準的仮定を満たす。補足では、系列相関がないことを確認したので、ここでは期待値 0、分散一定を証明しなさい。

答え

期待値は 0 となることを確認します。

$$E\left[e_{i,t}-\theta\bar{e}_i\right]=\mathrm{E}\left[(Z_i+u_{i,t})-\theta(Z_i+\bar{u}_i)\right]$$
$$=\ \mathrm{E}[Z_i]+E\left[u_{i,t}\right]-\theta(E[Z_i]+E[\bar{u}_i])=0$$

式展開では、$\mathrm{E}[Z_i]=0$、$E[\bar{u}_i]=0$を用いました。

次に、分散が一定であることを確認します。分散は、次のようになります(式展開では、Z_iと$u_{i,t}$が無相関であることに注意)。

$$E\left[\left(e_{i,t}-\theta\bar{e}_i\right)^2\right]=\mathrm{E}\left[\left((1-\theta)Z_i+(u_{i,t}-\theta\bar{u}_i)\right)^2\right]$$
$$=(1-\theta)^2\mathrm{E}[Z_i^2]+E[\left(u_{i,t}-\theta\bar{u}_i\right)^2]$$

ここで右辺 2 項は

$$E\left[\left(u_{i,t}-\theta\bar{u}_i\right)^2\right]=\ \mathrm{E}\left[\left(u_{i,t}-\theta\frac{u_{i,1}+\cdots+u_{i,T}}{T}\right)^2\right]$$

$$=\ \mathrm{E}\left[u_{i,t}^2\right]+\theta^2\frac{\left(\mathrm{E}\left[u_{i,1}^2\right]+\cdots+\mathrm{E}\left[u_{i,T}^2\right]\right)}{T^2}-\frac{2\theta\mathrm{E}\left[u_{i,t}^2\right]}{T}$$

$$=\sigma_u^2+\frac{\theta^2\sigma_u^2}{T}-\frac{2\theta\sigma_u^2}{T}=\sigma_u^2+\frac{\sigma_u^2}{T}(\theta^2-2\theta)$$

となります。これを分散の式に代入すると、分散が一定を確認できます。

$$E\left[\left(e_{i,t}-\theta\bar{e}_i\right)^2\right]=(1-\theta)^2\mathrm{E}[Z_i^2]+\sigma_u^2+\frac{\sigma_u^2}{T}(\theta^2-2\theta)$$

$$=\sigma_u^2+\left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2+T\sigma_z^2}\right)\sigma_z^2+\frac{\sigma_u^2}{T}\left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2+T\sigma_z^2}-1\right)$$

$$=\sigma_u^2+\frac{\sigma_u^2\sigma_a^2}{\sigma_u^2+T\sigma_z^2}-\frac{\sigma_u^2\sigma_z^2}{\sigma_u^2+T\sigma_z^2}=\sigma_u^2$$

なお、式展開では(A1)(A2)を用いました。