2024/07/31

藪友良

初版(第 2 刷)以降に追加した練習問題

初版(第 2 刷)以降に掲載された追加問題になります。

<u>3 章の練習問題</u>

13. ★単回帰モデル$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$における残差$\hat{u}_i$の性質を考えよう。

(a) $\hat{u}_i = u_i - (\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta)X_i$を示せ。

(b) $E[\hat{u}_i^2] = \sigma^2(1 - h_{ii})$を示せ。ここで、$h_{ii}$はレバレッジと呼ばれ、

$$h_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

と定義される。なお、h_{ii}は 0 以上 1 以下であり、1 に近いほど、i 番目のデータX_iが他のデータに比べて異なることを意味する(h_{ii}が 1 に近いと外れ値の可能性あり)。

(c) $E[\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2] = (n-2)\sigma^2$、$E[s^2] = \sigma^2$を示せ。Hint: $\sum_{i=1}^{n} h_{ii} = 2$

(d) 標準化残差$\bar{u}_i$を$(1 - h_{ii})^{-1/2}\hat{u}_i$と定義する。このとき、$E[\bar{u}_i] = 0$、$E[\bar{u}_i^2] = \sigma^2$を示せ。$\sigma^2$の新たな推定量を$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i^2$としたとき、$s^2$が不偏性を満たすことを示せ。

<u>5 章の練習問題</u>

14. ★(a)～(e)において、多重共線性が生じる理由を述べよ。

(a) 勤続年数が分からないため、勤続年数=年齢－教育年数－6 として計算した。説明変数は、年齢、教育年数、勤続年数とする。

(b) 説明変数は、ダミー変数D_i、その 2 乗D_i^2とする。

(c) 説明変数X_{1i}は、すべて 0 となる変数とする。

(d) 説明変数X_{1i}は、すべて 1 となる変数とする。

(e) 説明変数の数Kはサンプルサイズn以上となる($n \leq K$)。

15. ★ モデルは$Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 W_{1i} + \beta_3 W_{2i} + u_i$だが、単回帰モデル$Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + u_i^*$を推定したとする(ただし、$u_i^* = \beta_2 W_{1i} + \beta_3 W_{2i} + u_i$)。

(a) OLS 推定量$\hat{\beta}_1$の期待値は、次式になることを示せ。

$$E[\hat{\beta}_1] = \beta_1 + \beta_2 \frac{s_{XW_1}}{s_X^2} + \beta_3 \frac{s_{XW_2}}{s_X^2}$$

ただし、s_{XW_1}はXとW_1との標本共分散、s_{XW_2}はXとW_2との標本共分散である。

(b) β_2とs_{XW_1}が同じ符号なら$E[\hat{\beta}_1] > \beta_1$となるか。

6 章の練習問題

15. ★　所得Y_iの自然対数である$\ln(Y_i)$を分析したい。

(a) 男性所得の対数の平均は 6.2、女性所得の対数の平均は 5.9 とする。この結果から、男性は女性より所得が平均 30%高いといえるか。Hint: Yの幾何平均は$(Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n)^{1/n}$と定義される[1]。

(b) 被説明変数を所得の対数、説明変数を教育年数としたところ、係数は 0.1 と推定された。この結果から、教育年数が 1 年増えると、所得は平均 10%増えるといえるか。

8 章の練習問題

9. 7 章例 7-2 では、$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + u_t$を推定した。ここで、$Y_{t-1}$は非確率変数とした仮定は妥当か。

10. ★説明変数は確率変数ではあるが、外生変数としよう(つまり、$Cov(X_i, u_i) = 0$)。このとき、OLS 推定量は一致性を満たすが、不偏性は満たさないことを示せ。Hint: nが大きくなると、平均は期待値に収束し、標本分散は分散に収束するとする(『入門 実践する統計学』(巻末参考文献[5])の 5.2、5.3 節参照)。

9 章の練習問題

10. ★　均一分散が正しい状況を考えよう($E[u_i^2] = \sigma^2$)。ただし、誤差項は互いに独立とする。この問題では、均一分散が正しい状況のもとで、不均一分散に対して頑健な分散の推定量の性質を調べ、推定量を改善する方法を考察する。

(a) 不均一分散に対して頑健な分散の推定量$s_{\hat{\beta}}^2$は、真の分散より小さくなること、つまり、次式が正しいことを示せ。

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \hat{u}_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)^2}\right] < \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Hint: 練習問題 3.13(b)から $E[\hat{u}_i^2] = \sigma^2(1 - h_{ii})$となる。なお、$h_{ii}$はレバレッジである。

(b) Stata では、不均一分散に対して頑健な分散の推定量として、次の推定量$\hat{V}^{HC1}$を用いている。

$$\hat{V}^{HC1} = \frac{n}{n-2} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \hat{u}_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)^2}$$

この推定量$\hat{V}^{HC1}$の是非を述べよ。Hint: 練習問題 3.13(c)から$\sum_{i=1}^n h_{ii} = 2$となる(よって、平均は$2/n$)。

(c) 標準化残差$\bar{u}_i = (1 - h_{ii})^{-1/2} \hat{u}_i$を用いた次の推定量$\hat{V}^{HC2}$を考えよう。

---

[1] 幾何平均は、平均変化率を求めるのに便利な指標である。たとえば、株価の変化率が 70%、-20%、10%としよう。このとき、株価は 1.7 倍、0.8 倍、1.1 倍となるので、幾何平均は$(1.7 \times 0.8 \times 1.1)^{1/3} = 1.14$となる。これに対して、通常の平均は$1.2 (= (1.7 + 0.8 + 1.1)/3)$となる。幾何平均は$1.7 \times 0.8 \times 1.1 = 1.14^3$となり、平均変化率として適切であることがわかる。一方、平均は$1.7 \times 0.8 \times 1.1 < 1.2^3$となり、平均変化率を過大に評価し不適切である。

$$\hat{V}^{HC2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \bar{u}_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)^2}$$

この推定量V^{HC2}の是非を述べよ。Hint: 標準化残差は練習問題 3.13(d)参照

(d) これらの推定量のうち、どれが望ましいといえるか。

11. ★　レバレッジが大きくなるケースを考えよう。回帰モデルは$Y_i = \alpha + \beta D_i + u_i$とし、$D_i$はダミー変数とする。なお、$\sum_{i=1}^{n} D_i = 1$、$E[u_i^2] = \sigma^2$、$E[u_i u_j] = 0$とする。$\sum_{i=1}^{n} D_i = 1$とは、ある$i$でだけ$D_i = 1$となるが、それ以外はすべて 0 となることを意味する(『入門 実践する統計学』(巻末参考文献[5])12.4.1 節の一時的ダミーに該当する)。

(a) 説明変数の偏差 2 乗和は、次のようになることを示せ。

$$\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2 = \frac{n-1}{n}$$

(b) $\hat{\beta}$の分散は次のようになることを示せ。

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \frac{n}{n-1}$$

(c) 推定量$\hat{V}^{HC1}$の期待値は次のようになることを示せ。

$$E\left[\hat{V}^{HC1}\right] = E\left[\frac{n}{n-2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2 \hat{u}_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2\right)^2}\right] = \frac{V(\hat{\beta})}{n-1}$$

Hint: $D_i = 1$なら$h_{ii} = 1$、$D_i = 0$なら$h_{ii} = 1/(n-1)$となる。

10 章の練習問題

10. ★(8)式のもとで$V(u_1) = \sigma^2/(1-\rho^2)$となることを証明せよ。

11 章の練習問題

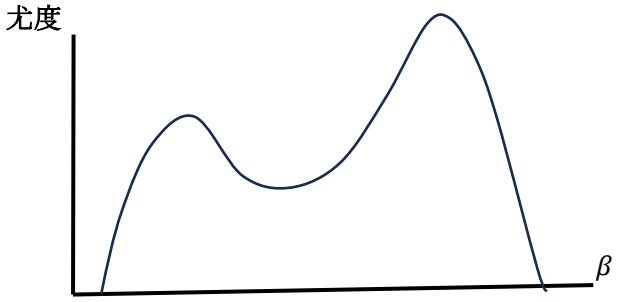
12. ★固定効果モデル$Y_{i,t} = \alpha_i + \beta X_{i,t} + u_{i,t}$を考える。

(a) $Y_{i,t} - \bar{Y}_i = \beta(X_{i,t} - \bar{X}_i) + (u_{i,t} - \bar{u}_i)$を示せ。$\bar{Y}_i$、$\bar{X}_i$、$\bar{u}_i$は時間平均である($\bar{Y}_i = \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T} Y_{i,s}$、$\bar{X}_i = \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T} X_{i,s}$、$\bar{u}_i = \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T} u_{i,s}$)。なお、この式の OLS 推定はダミー変数を用いた固定効果推定と等しい。

(b) 固定効果推定量が一致性を持つには、強外生性の仮定が必要となる。**強外生性**は、全時点t、sに対し$Cov(X_{i,t},\ u_{i,s}) = 0$を意味する。なぜ強外生性の仮定が必要かを述べよ。Hint: (a)の推定における外生性

12 章の練習問題

11. 尤度関数は、パラメータβにだけ依存しているとする。図では、横軸がβ、縦軸が対応する尤度としている。このとき、ニュートン法で尤度を最大にするβを見つけたい。どのような問題が生じるか述べよ。



13 章の練習問題

11.★ 13.6.2 節では、操作変数の条件②により、$\hat{X}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 Z_i$は$u_i$と無相関とした。しかし、この説明は$n$が小さいとき不正確である。これはなぜか、どうすれば問題に対処できるか。Hint: サンプル分割

12.★　内生性の有無を検証する方法を述べよ。Hint: ハウスマン検定

13.★　パネル分析においてモデル$Y_{i,t} = \alpha + \beta X_{i,t} + \theta W_i + Z_i + u_{i,t}$を考える。個別要因$Z_i$を考慮しながら、係数($\beta$、$\theta$)を推定したい。誤差項は$Z_i + u_{i,t}$である。なお、$X_{i,t}$と$W_i$は$u_{i,t}$と無相関、$Z_i$は$X_{i,t}$と相関するが$W_i$とは無相関とする($W_i$は時間を通じて一定の外生変数、$X_{i,t}$は内生変数)。係数の推定方法を述べよ。Hint: 操作変数

14.★　モデルは$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$であり、操作変数は$Z_i$とする。

(a)2SLS 推定量は、次式として表せることを示せ(練習問題 7 参照)。

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})(X_i - \bar{X})}$$

(b)2SLS 推定量は一致性を満たすことを示せ。Hint: nが大きくなると、標本共分散は共分散に収束する。

15.★異質性を考慮したモデル$Y_i = \alpha + \beta_i X_i + u_i$を考える。係数$\beta_i$は個人$i$によって異なり、確率的に決まるとしよう。

(a)　X_iはランダムに決定され、β_i、u_iとは独立とする(X_iは外生変数)。nが大きいとき、OLS 推定量$\hat{\beta}$は$E[\beta_i]$に収束することを示せ。また、$E[\beta_i]$は何を意味するか。Hint: nが大きくなると、標本分散と標本共分散は、それぞれ分散と共分散に収束する。X_iはβ_iとは独立であり、$Cov(\alpha + \beta_i X_i + u_i, X_i) = E[\beta_i]Var(X_i)$

(b)　X_iは内生変数であり、$X_i = \gamma_0 + \gamma_i Z_i + e_i$とする($Z_i$は操作変数、$E[\gamma_i] \neq 0$)。反応度$\gamma_i$は個人によって異なり、確率的に決まる。$Z_i$はランダムに決定され、$\beta_i$、$\gamma_i$、$u_i$、$e_i$とは独立とする。$n$が大きくなると、$\hat{\beta}_{2SLS}$は$E[\gamma_i\beta_i]/E[\gamma_i]$に収束することを示せ。また、$E[\gamma_i\beta_i]/E[\gamma_i]$は何を意味するか。Hint: nが大きくなると、$\hat{\beta}_{2SLS}$は$Cov(Z_i, Y_i)/Cov(Z_i, X_i)$に収束する(練習問題 7 参照)。また、$Cov(Z_i, X_i) = E[\gamma_i]Var(Z_i)$

(c) どのようなとき$E[\gamma_i\beta_i]/E[\gamma_i] = E[\beta_i]$は成立するか。