2025/02/21

藪友良

構造変化を考慮した単位根検定

単位根検定では、確定的部分(定数項や確定トレンドなど)を正しく定式化することが重要です。確定的部分に構造変化があるにもかかわらず、構造変化を無視して推定してしまうと､単位根仮説を採択する方向でバイアスが生じます。構造変化を考慮した単位根検定として、ペロン検定とジボット=アンドリュース検定を紹介します。構造変化点が既知ならペロン検定、構造変化点が未知ならジボット=アンドリュース検定を用います。

本稿は、藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足資料です。構造変化を考慮した単位根検定の詳しい議論は、ウォルター・エンダース『実証のための計量時系列分析』(有斐閣、新谷元嗣、藪友良訳)をご覧ください。

定数項に構造変化があるケース

構造変化の重要性をみるために、定数項に構造変化があるモデルを考えましょう。図 1 では、真のモデルを

$$Y_t = 3DU_t + 0.8Y_{t-1} + u_t$$

とし、200 期分の仮想データを生成しました($t = 1,2,\dots,200$)。ただし、変数DU_tは 100 期まではすべて 0 となり($DU_1 = DU_2 = \cdots = DU_{100} = 0$)、101 期からはすべて 1 とします($DU_{101} = DU_{102} = \cdots = DU_{200} = 1$)。また、誤差項は標準的仮定を満たすとします(つまり、u_t 〜$i.i.d.N(0,\sigma^2)$)。

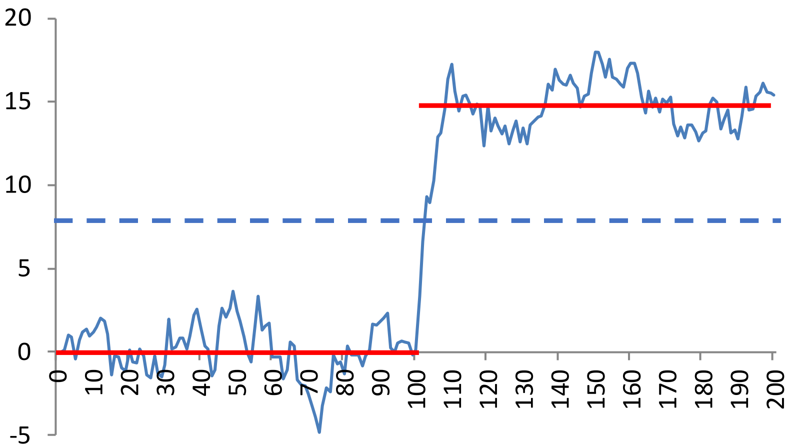
図をみると､変数Y_tは 100 期まで 0 の周りを推移し､101 期から 15(=3/(1-0.8))の周りを推移しています(実線は期待値を表す直線)[1]。定数項に構造変化はありますが、実線に収束するような動きがあるため、構造変化を考慮したなら、変数Y_tは定常といえます。

これに対して、構造変化を考慮しないで、ケース 2(定数項あり)のモデル$Y_t = a_0 + a_1Y_{t-1} + u_t$として推定したとします(16.2.2 節参照)。このとき、係数a_1は 1 の

[1] 15 章の練習問題 2 で確認した通り、AR(1)モデルの期待値は$a_0/(1-a_1)$です。よって、$a_0 = 3$、$a_1 = 0.8$なら、期待値は 15(=3/(1 − 0.8))となります。

方向でバイアスをもって推定されます(つまり、単位根を支持する方向でバイアスがかる)。構造変化を考慮しないモデル$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + u_t$では、$Y_t$が長期平均に収束する動きがあるかを検証することになります（点線が長期平均を表す)。しかし、図をみると、Y_tは長期平均ではなく、100 期までは 0、101 期以降は 15 に収束しています。したがって、構造変化を考慮しないと、Y_tは収束の動きがないと判断されてしまいます。

図 1　定数項に構造変化ありのケース



P.ペロン(Pierre Perron)は、確定部分における構造変化を考慮することの重要性を指摘し、構造変化を考慮した単位根検定を提案しました 。この検定は、**ペロン検定**と呼ばれます[2]。ここで、サンプルサイズはT期であり、構造変化点はT_B期とします。また、分析者は、構造変化点T_Bを知っているとします(構造変化点が未知のケースは後述します)。

ペロン検定では、定数項の構造変化を考慮した次式を推定し、単位根検定を行います。

$$Y_t = a_0 + \theta_0 DU_t + a_1 Y_{t-1} + u_t$$

変数DU_tはT_B期まですべて 0 となり、$T_B + 1$期からすべて 1 となるダミー変数です。このとき、仮説を次のように設定します。

$$H_0: a_1 = 1、H_1: a_1 < 1$$

上記モデルから係数a_1を推定し、対応する t 統計量によって検定を行うのがペ

[2] Perron, P. (1989) “The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis” Econometrica 57, 1361-1401.

ロン検定です[3]。

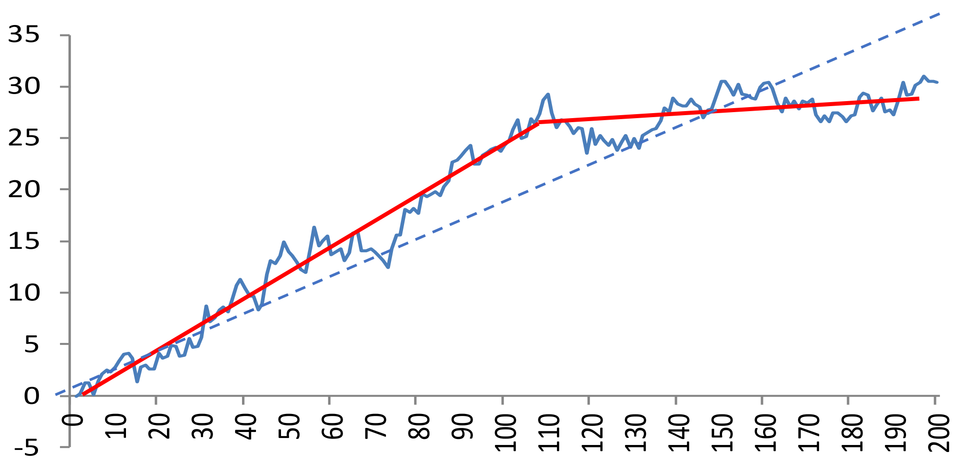
トレンド係数に構造変化があるケース

トレンドに構造変化がある場合にも、構造変化を考慮することが重要となります。図 2 では、真のモデルを

$$Y_t = 0.05\mathrm{t} - 0.04DT_t + 0.8Y_{t-1} + u_t$$

とし、200 期分の仮想データを生成しました。ただし、DT_tは 100 期までは 0、101 期からは$(t-100)$と定義しました。つまり、100 期までは 0 となり$(DT_1 = DT_2 = \cdots = DT_{100} = 0)$、101 期から 1 ずつ増加します$(DT_{101} = (101-100) = 1$、$DT_{102} = (102-100) = 2$、…)。この定式化では、構造変化によってトレンドの傾きは変わりますが、水準のジャンプはありません。

図 2 トレンド係数の構造変化



図をみると、100 期までは正のトレンドがありますが、101 期以降はなだらかになっています（図の実線を参照）。このモデルは、構造変化を考慮すると、実線に収束するような動きがあるため定常となります。しかし、構造変化を考慮しないケース 3(トレンドあり)のモデル$Y_t = a_0 + \gamma t + a_1 Y_{t-1} + u_t$)として推定したとします(16.2.3 節参照)。このとき、係数a_1は 1 の方向でバイアスをもって推定されます(つまり、単位根を支持する方向でバイアスがかる)。構造変化を考慮しないモデル$Y_t = a_0 + \gamma t + a_1 Y_{t-1} + u_t$では、$Y_t$が線形トレンド（点線）

[3] 統計ソフトを使って、ペロン検定を行うと対応する臨界値を表示してくれます。

に収束する動きがあるかを検証してしまうため、収束の動きがないと判定されます(16.2.3 節参照)。

ペロン検定では、トレンド係数の構造変化を考慮した次式を推定し、単位根検定を行います。

$$Y_t = a_0 + \gamma t + \theta_1 DT_t + a_1 Y_{t-1} + u_t$$

ただし、DT_tはT_B期までは 0、$T_B + 1$期からは$(t - T_B)$と定義します。仮説は次のように設定します。

$$H_0: a_1 = 1、H_1: a_1 < 1$$

このモデルから係数a_1を推定し、対応する t 統計量によって検定を行います。

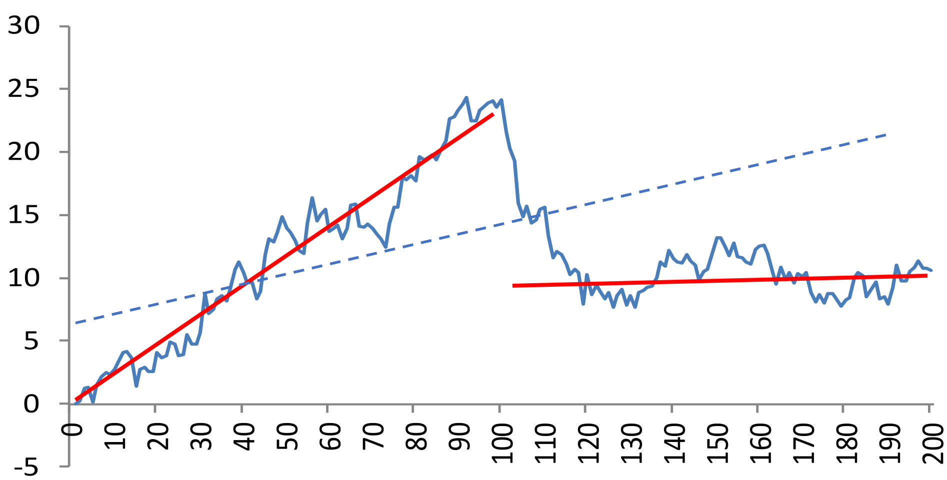
<u>定数項とトレンド係数の両方に構造変化があるケース</u>

定数項とトレンド係数が両方とも変化するケースを考えましょう。図 3 では、真のモデルを

$$y_t = 0.05\mathrm{t} - 2DU_t - 0.04DT_t + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$$

とし、200 期分のデータを生成しました。これをみると、100 期までは強い正のトレンドがありますが、101 期に水準が下方シフトし、またトレンドの傾きもなだらかになっています（図の実線を参照）。このモデルは、やはり構造変化を考慮すると収束する動きがあります。しかし、構造変化を考慮しないケース 3($Y_t = a_0 + \gamma t + a_1 Y_{t-1} + u_t$)を推定すると、線形トレンド（図の点線）に収束する動きはなく、収束の動きなしと判定されます。

図 3 水準とトレンド係数の構造変化



定数項とトレンド係数の両方に構造変化があるペロン検定では、定式化を次のようにします。

$$Y_t = a_0 + \gamma t + +\theta_0 DU_t + \theta_1 DT_t + a_1 Y_{t-1} + u_t$$

ここで、仮説を次のようにします。

$$H_0: a_1 = 1、H_1: a_1 < 1$$

このモデルから係数a_1を推定し、対応する t 統計量によって検定を行います。

構造変化点が未知のケース

ペロン検定では、構造変化点を既知としました。しかし実際、構造変化点は未知のことがほとんどです。このとき、**ジボット=アンドリュース検定**(Zivot-Andrews test)を用いることができます[4]。

構造変化は、どの時点で生じても不思議ではありません。すべての時点を構造変化点の候補としたいところですが、構造変化点の前後で十分なサンプルサイズを確保する必要があるため、標本期間の初めと最後の 15%のデータは、構造変化点の候補から除くことにします。構造変化点の候補の始期(T_{min})と終期(T_{max})を次のように定義します(小数点以下があれば、最も近い整数を用います)。

$$T_{min} = 0.15 \times T$$

$$T_{max} = (1 - 0.15) \times T$$

このとき、構造変化点の候補T_Bは、次のようになります。

$$T_{min}、T_{min} + 1、\ldots、T_{max} - 1、T_{max}$$

たとえば、$T = 100$ならば、$T_{min} = 0.15 \times 100 = 15$、$T_{max} = (1 - 0.15) \times 100 = 85$であり、構造変化点の候補は、15、16、…、84、85です。

次に、構造変化点をT_Bとしたペロン検定を行います。このとき、得られた t 統計量を $\tau(T_B)$と表記します。そして、すべての構造変化点の候補に対して、ペロン検定を行って、対応する t 統計量を計算します。これらのうち最小となる値を検定統計量 **inf-*t*** とします（「インフ・ティ」と読む)。つまり、検定統計量は、

$$\boxed{\text{inf-}t = \min\{\tau(0.15T)、\tau(0.15T+1)、\ldots、\tau(0.85T-1)、\tau(0.85T)\}}$$

[4] Zivot, E. and Andrews, DWK (2002) "Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis" *Journal of business & economic statistics* 20 (1), 25-44.

となります。ただし、min{ }とは、{ }内の最小値を用いるということです。もし inf-t 統計量が、臨界値よりも小さな値をとったなら、帰無仮説$a_1 = 1$が棄却されます。

なぜ t 値の最小値を検定統計量とするのでしょうか。これは帰無仮説が、t 値が小さいほど棄却しやすいためです。正しい構造変化点を考慮したとき、t 値は最も小さくなると考えられるため、inf-t が検定統計量として用いられるわけです。

例（構造変化と地球温暖化）

世界は温暖化が進んでいるといわれていますが、これは本当でしょうか。図 4 では、1856-2010 年の世界気温の推移を示しています。ただし、世界気温から、その平均を引いているため、縦軸は厳密な温度とはなっていません。

図をみると、世界気温は 1950 年まではゆっくり上昇していますが、1950 年以降は急激に上昇しているようにみえます。ここでは世界気温がどのようなモデルから生成されているかを分析します。

図 4　世界平均気温の推移

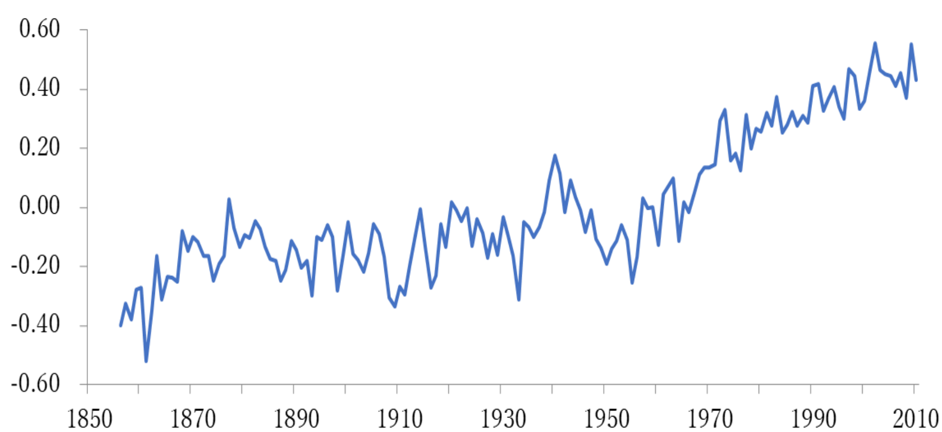


表 4 では、(構造変化を考慮しない)DF-GLS 検定、(構造変化を考慮した) ジボット=アンドリュース検定の結果を掲載しています。DF-GLS 検定は、ケース 2(定数項あり)、ケース 3(トレンドあり)としていますが、いずれでも単位根の仮説を棄却できていません。これに対して、ジボット=アンドリュース検定は、定数項に構造変化があるケース、定数項とトレンド係数の両方に構造変化があるケースを考えています。定数項とトレンド係数の両方が変化するとした

ケースでは、t 値は-7.78 となり、有意水準 1%で単位根の仮説を棄却できます。また、構造変化点を 1967 年としたとき、t 値が最小となっていました。

表 4　世界平均気温

	DF-GLS	Zivot-Andrews	
定数項のみ	1.00	-3.62	
定数項とトレンド	-2.43	-7.78	***

1967 年を構造変化点とした場合、モデルの推定値は以下となりました。

$$Y_t = -0.131 + 0.001\mathrm{t} + 0.103DU_t + 0.003DT_t + 0.432Y_{t-1} + u_t$$

(0.023)　(0.001) (0.031)　(0.001)　(0.072)

トレンド係数は、1967 年までは 0.001 ですが、1967 年以後は 0.004(=0.001 +0.003)に増加しています。また、DT_tの係数は0.003と正であり、また、対応する t 値は 2.76 と大きく有意な結果です。つまり、地球温暖化は 1967 年頃から深刻化している、といえます。最後に、Y_{t-1}の係数は 0.43 と小さく、世界気温に生じたショックの影響はすぐに消えることが分かります(15.2.2 節の図 15.2(b)をみると、係数 0.5 の場合でも、ショックの効果はすぐに消えています)。

以上の推定から、世界気温には正のトレンドが存在すること、また、1967 年頃から気温の上昇スピードは速くなっていることが分かりました。これは何らかの人為的な影響で気温が上昇していることを意味しています。

単位根検定の手続き

最先端の単位根検定の手続きはどのようなものでしょうか。これまで学習したとおり、単位根検定において、確定的部分を正しく定式化することが重要となります。構造変化があるなら、構造変化を考慮した推定を行うべきですし、構造変化がないなら構造変化を考慮すべきではありません。

分析者は事前に構造変化の有無を知らないため、単位根検定を行う前に、事前検定として確定的部分に構造変化の検定を行い、もし構造変化があればペロン検定やジボット=アンドリュース検定を行うとよいでしょう。こうした事前検定（トレンドに構造変化があるかの検定）として、ペロンと筆者が開発した

PY検定があります[5]。PY検定を行って、もし構造変化があればペロン検定などを行い、構造変化がなければ通常のADF検定などを行うことになります。複数の構造変化の可能性を考慮したいなら、PY検定を拡張した検定を行い、構造変化があったか、また何回生じたかを確認します[6]。もし構造変化が複数回あったなら、複数の構造変化を考慮した単位根検定を行います[7]。

---

[5] Perron, P. and Yabu, T. (2019) "Testing for shifts in trend with an integrated or stationary noise component" *Journal of Business and Economic Statistics* 27 (3), 369-396.

[6] Kejriwal, M. and Perron, P. (2010) "A sequential procedure to determine the number of breaks in trend with an integrated or stationary noise component" *Journal of Time Series Analysis* 31 (5), 305-328.

[7] JL Carrion-i-Silvestre, D Kim, P Perron (2009) "GLS-based unit root tests with multiple structural breaks under both the null and the alternative hypotheses" *Econometric theory* 25 (6), 1754-1792