2023/07/12

藪友良

ネイピア数と自然対数の微分[1]

藪友良『入門　実践する計量経済学』(東洋経済新報社、2023 年)の巻末付録 A では、ネイピア数eとネイピア数を底とした自然対数$\ln$を紹介しました。ここでは、ネイピア数とは何かを詳しく紹介し、また、自然対数の微分の仕方を説明します。

1. ネイピア数の定義

厳密には、ネイピア数eは、次のように定義されます。

$$e = lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

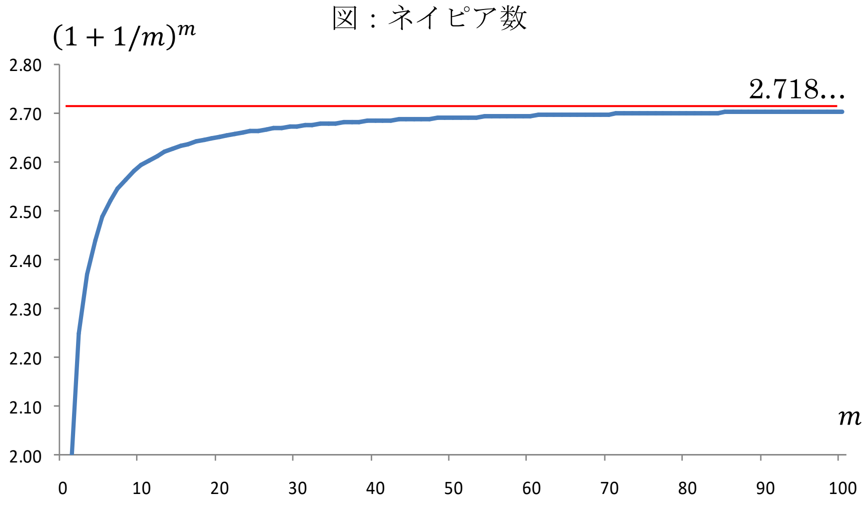
極限 lim は、mが非常に大きい状態を意味します。つまり、ネイピア数eは、mが非常に大きいときの$(1+1/m)^m$の値であり、これは 2.718…になります。

確認のため、$m=1,2,3,4$について、$(1+1/m)^m$の値を計算しました。

$$\left(1+\tfrac{1}{1}\right)^1 = 2、\left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2.25、\left(1+\tfrac{1}{3}\right)^3 = 2.37、\left(1+\tfrac{1}{4}\right)^4 = 2.44$$

ここで、mが大きくなるにつれて、値が 2.718..に近づいている様子がみてとれます。下図では、横軸をm、縦軸を$(1+1/m)^m$とした図になります。この図からも、$(1+1/m)^m$が 2.718…に近づいている様子が確認できます。

図：ネイピア数



例 1：連続複利

金利は、年率rとします(たとえば、金利 1%なら$r=0.01$)。このとき、1 円を 1 年間運用すると、翌年に資産は$1+r$円です。仮に 1 年間を 2 期間に分けて運用すると、1 年後に資産

---

11 藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足資料です。

は$(1+r/2)^2$になります。半年経過した時点で$(1+r/2)$を受け取り、利息を含めてさらに半年運用した結果、$(1+r/2)^2$となるわけです。同様に、1 年間を 12 期間に分けて運用すると、資産は$(1+r/12)^{12}$となります。一般的には、1 年をs期に分けて運用すると、資産は

$$\left(1+\frac{r}{s}\right)^s = \left[\left(1+\frac{1}{s/r}\right)^{(s/r)}\right]^r$$

となります。ここで、$m=s/r$と定義すると、この式は次のように表現できます。

$$\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^r$$

ここで、sが非常に大きい状態を連続複利といいます。これはmが非常に大きい状況ですから、ネイピア数の定義から、$[(1+1/m)^m]^r$はe^rに収束します。仮に 1 年ではなく、t年運用するのであれば、資産はe^{rt}となります（たとえば、2 年間運用すると$e^r \times e^r = e^{2r}$となる）。

2. 自然対数の微分

自然対数とは、ネイピア数eを底とした対数でした。ここでは、自然対数$\ln(x)$の微分は、$1/x$となることを証明します(なお、$\ln(x)$とはxの自然対数を意味します)。

自然対数の微分の公式

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

[証明] 微分とは、「xを微小に変化させたとき、$\ln(x)$がどのぐらい変化するか」を測ります。これは次のようになります(式展開では、巻末付録 A の指数関数の法則を用いました)。

$$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}(\ln(x+\Delta x)-\ln(x))$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

さらに$m=x/\Delta x$と定義すると、右辺は次のように表現できます。

$$\frac{1}{x}m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

ここで、Δxを 0 に近づけると、mは非常に大きくなるため、$(1+1/m)^m$はネイピア数eで置き換えることができます。つまり、上式の右辺は次のようになります(式展開では、自然対数はネイピア数eを底とした対数であるため、$\ln(e)=1$となることを用いました)。

$$\frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}$$

[終]