

FWL 定理と重回帰分析¹

重回帰モデルでは、 β_1 は「他変数 (X_1 以外の説明変数) を一定とし、説明変数 X_1 が 1 単位変化したとき Y がどれくらい変化するか」を表します。ここで、「他変数を一定とし」というのは、どういうことでしょうか。この疑問に答えるのが、**FWL 定理** (Frisch–Waugh–Lovell theorem)です。

FWL 定理

重回帰モデルを考えます。

$$Y = \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_\ell X_\ell + \dots + \beta_K X_K + u$$

説明変数 X_ℓ の係数 β_ℓ の OLS 推定量を $\hat{\beta}_\ell$ とします。また、 X_0 は常に 1 となる説明変数とします (つまり、 $\beta_0 X_0$ は定数項 β_0 に等しい)。このとき、 $\hat{\beta}_\ell$ は以下 3 段階の手続きを通じて求めることができます。

- ① X_ℓ を被説明変数とし、 X_ℓ 以外の説明変数で OLS 推定し、残差 \hat{u}_X を求める。
 - ② Y を被説明変数とし、 X_ℓ 以外の説明変数で OLS 推定し、残差 \hat{u}_Y を求める。
 - ③ 被説明変数を \hat{u}_Y とし、説明変数を \hat{u}_X として OLS 推定し、係数 $\hat{\beta}_\ell$ を求める。
- このとき、係数 $\hat{\beta}_\ell$ は、重回帰モデルの OLS 推定量 $\hat{\beta}_\ell$ と一致する。

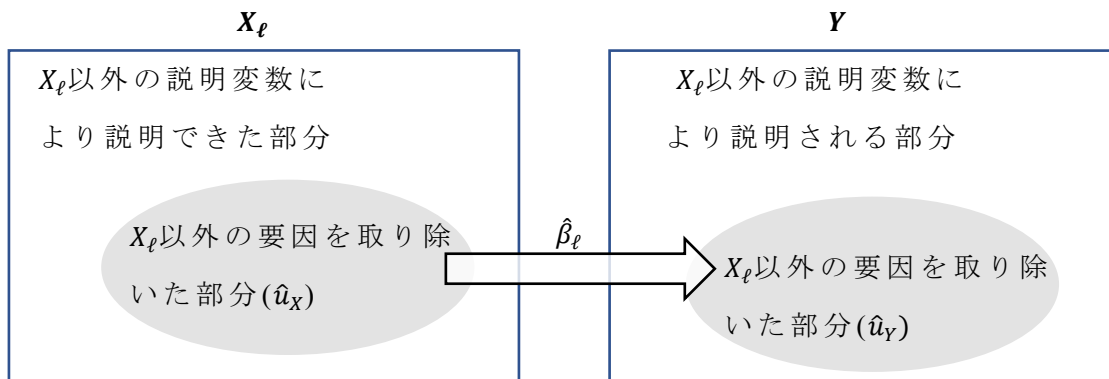
①では、 X_ℓ を被説明変数とし、 X_ℓ 以外の説明変数で回帰し、その残差を \hat{u}_X としています。2.6 節で学習した通り、予測値は「モデルで説明できた部分」、残差は「モデルで説明できなかった部分」を表します。この場合、モデルには X_ℓ 以外の説明変数が含まれていますから、残差 \hat{u}_X は、 X_ℓ の中で「モデル (X_ℓ 以外の説明変数) では説明できなかった部分」、つまり「 X_ℓ 以外の説明変数の要因を取り除いた部分」と解釈されます。図 1 の左側は、この操作のイメージを描いたものです。 X_ℓ は□で表され、これが「 X_ℓ 以外の説明変数で説明できた部分 (網掛けされていない領域)」と「 X_ℓ 以外の説明変数の要因を取り除いた部分 (網掛け領域)」に分解されます。

¹ 藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足資料です。

②では、被説明変数 Y を X_ℓ 以外の説明変数で回帰し、その残差を \hat{u}_Y としています。この場合、モデルには X_ℓ 以外の説明変数が含まれていますから、残差 \hat{u}_Y は、 Y の中で「モデル（ X_ℓ 以外の説明変数）では説明できなかった部分」、つまり、「 X_ℓ 以外の説明変数の要因を取り除いた部分」と解釈されます。図1の右側では、被説明変数 Y は□で表され、「 X_ℓ 以外の説明変数で説明できた部分（網掛けされていない領域）」と「 X_ℓ 以外の説明変数の要因を取り除いた部分（網掛け領域）」に分解されます。

③においては、被説明変数を \hat{u}_Y とし、説明変数を \hat{u}_X としてOLS推定することで、他の変数の影響をコントロールした上で（他の説明変数の影響を取り除いた上で）、 X_ℓ から Y への純粋な効果である β_ℓ を推定できるわけです（図1の⇒に当たる）。

図1 FWL定理



例：離婚件数と世界気温

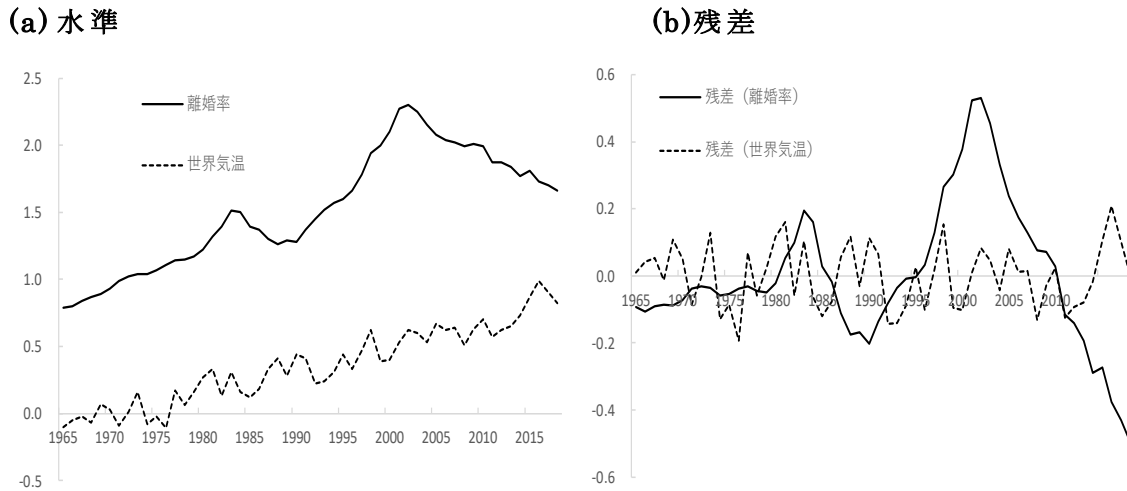
図2(a)では、1965年から2018年までの離婚件数（1000人当たり）と世界気温（1951～1980年の平均からの乖離）の推移を示しています。両変数はおそらく関係がないと思われそうですが、両方ともトレンドがある変数ですから、離婚件数を世界気温で回帰すると（カッコ内は標準誤差）、

$$\text{離婚件数} = 1.09 + 1.21 \text{ 世界気温}$$

$$(0.055) \quad (0.121) \qquad R^2 = 0.657$$

世界気温が上がると離婚件数が有意に高くなる関係になっています。しかし、気温が上がると離婚件数が増えるとは考え難いことです。もしかすると気温が上がると喧嘩が多くなり、離婚を考える夫婦もいるかもしれませんが・・・。

図 1 離婚件数と世界気温



トレンドの影響を除くため、トレンド変数を用います。説明変数として、新たにトレンド変数を加えると、推定結果は次のようになります（カッコ内は標準誤差）。

$$\begin{aligned} \text{離婚件数} &= 0.832 - 0.212 \text{ 世界気温} + 0.028 \text{ トレンド変数} \\ &\quad (0.071) \quad (0.318) \quad (0.006) \quad \bar{R}^2 = 0.752 \end{aligned}$$

トレンド変数 t の係数は有意に正ですから、離婚件数に正のトレンドがあることがわかります。ここで注目すべきは世界気温の係数です。これまで係数は 1.21 でしたが、ここでは有意に 0 と異なる結果になっています。つまり、トレンドを考慮したら、両変数に関係はないことが確認されたわけです。

FWL 定理を用いて、結果を解釈してみましょう。FWL 定理の第 1 段階では、世界気温をトレンド変数（定数項を含む）で回帰し、残差を \hat{u}_x とします。第 2 段階では、離婚件数をトレンド変数（定数項を含む）で回帰し、残差を \hat{u}_y とします。図 2 (b) では、残差系列の動きを示しており、原系列からトレンドの影響が除去されたため、何のトレンドも残っていないことがわかります。第 3 段階では、被説明変数を \hat{u}_y 、説明変数を \hat{u}_x として回帰することで、

$$\hat{u}_y = -0.212\hat{u}_x$$

が得られます。FWL 定理が主張する通り、 \hat{u}_x の係数は、重回帰分析で得られた係数と同じ値であることを確認できます。

補足：FWL 定理の証明

説明変数が 2 個 ($K = 2$)、かつ、定数項がないケースの証明を考えます。モデルは、次のとおりです。

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$$

FWL 定理を使って、係数 β_1 を推定します。

段階 1 では、被説明変数を Y 、説明変数を X_2 とした OLS 推定をします。このとき、OLS 推定量 $\hat{\gamma}_Y$ は次のようになり²、

$$\hat{\gamma}_Y = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i X_{2i}}{\sum_{i=1}^n X_{2i}^2}$$

また、残差は $e_Y (= Y - \hat{\gamma}_Y X_2)$ です。残差の性質から、説明変数と残差の積和は 0 です ($\sum_{i=1}^n e_{Yi} X_{2i} = 0$)。

段階 2 では、被説明変数を X_1 とし、説明変数を X_2 とした OLS 推定をします。このとき、OLS 推定量 $\hat{\gamma}_X$ は次のようになり、

$$\hat{\gamma}_X = \frac{\sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i}}{\sum_{i=1}^n X_{2i}^2}$$

また、残差は $e_X (= X_1 - \hat{\gamma}_X X_2)$ です。また残差の性質から、説明変数と残差の積和は 0 ($\sum_{i=1}^n e_{Xi} X_{2i} = 0$) です。

段階 3 では、被説明変数を残差 e_Y 、説明変数を残差 e_X とした OLS 推定をします。残差 e_X の係数を $\hat{\theta}$ と表記すると、これは次のようになります。

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{\sum_{i=1}^n e_{Yi} e_{Xi}}{\sum_{i=1}^n e_{Xi}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\gamma}_Y X_{2i})(X_{1i} - \hat{\gamma}_X X_{2i})}{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \hat{\gamma}_X X_{2i})(X_{1i} - \hat{\gamma}_X X_{2i})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\gamma}_Y X_{2i})X_{1i} - \hat{\gamma}_X \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\gamma}_Y X_{2i})X_{2i}}{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \hat{\gamma}_X X_{2i})X_{1i} - \hat{\gamma}_X \sum_{i=1}^n (X_{1i} - \hat{\gamma}_X X_{2i})X_{2i}} \end{aligned}$$

ここで、分母と分子の第 2 項は、以下の残差の性質から 0 となります。

$$\sum_{i=1}^n e_{Yi} X_{2i} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\gamma}_Y X_{2i})X_{2i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n e_{Xi} X_{2i} = \sum_{i=1}^n (X_{1i} - \hat{\gamma}_X X_{2i})X_{2i} = 0$$

² 3 章の練習問題 12 では、定数項がない回帰モデルの OLS 推定量は、 $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i / \sum_{i=1}^n X_i^2$ となっていました。ここでは $X_i = X_{2i}$ ですから、それを代入すると $\hat{\gamma}_Y$ が得られます。

したがって、係数 $\hat{\theta}$ は次のようになります。

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\gamma}_Y X_{2i}) X_{1i}}{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \hat{\gamma}_X X_{2i}) X_{1i}}$$

最後に、通常の OLS で β_1 を推定しましょう。残差 2 乗和は

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}_1 X_{1i} - \tilde{\beta}_2 X_{2i})^2$$

となります。ここで $\tilde{\beta}_1$ と $\tilde{\beta}_2$ で偏微分してから 0 と置くと、次の正規方程式が得られます。

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}) X_{1i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}) X_{2i} = 0$$

上式を満たす $\hat{\beta}_1$ と $\hat{\beta}_2$ は OLS 推定量であるため、^を付けて表しました。2 番目の式を $\hat{\beta}_2$ について解くと、

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i}{\sum_{i=1}^n X_{2i}^2} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i}}{\sum_{i=1}^n X_{2i}^2} = \hat{\gamma}_Y - \hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_X$$

となります ($\hat{\gamma}_Y = \sum Y_i X_{2i} / \sum X_{2i}^2$ 、 $\hat{\gamma}_X = \sum X_{1i} X_{2i} / \sum X_{2i}^2$ に注意)。これを正規方程式の 1 番目の式に代入すると、

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - (\hat{\gamma}_Y - \hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_X) X_{2i}) X_{1i} = 0$$

となり、これを $\hat{\beta}_1$ について解くと

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum Y_i X_{1i} - \hat{\gamma}_Y \sum X_{2i} X_{1i}}{\sum X_{1i}^2 - \hat{\gamma}_X \sum X_{2i} X_{1i}} = \frac{\sum (Y_i - \hat{\gamma}_Y X_{2i}) X_{1i}}{\sum (X_{1i} - \hat{\gamma}_X X_{2i}) X_{1i}}$$

となります。これは先に求めた $\hat{\theta}$ に他なりません。