

ダービン=ワトソン統計量

どのように系列相関があるかを調べたらよいのでしょうか。ここでは実証分析で頻繁に用いられる**ダービン=ワトソン(DW)統計量**を紹介します。なお、藪友良『入門 実践する計量経済学』（2023 年、東洋経済新報社）の補足資料です。

DW 統計量では、誤差項は $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ の構造を持っていると仮定されます。この統計量は、回帰モデル $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ を OLS 推定し、残差 $\hat{u}_t$ を求めてから、次のように計算されます。

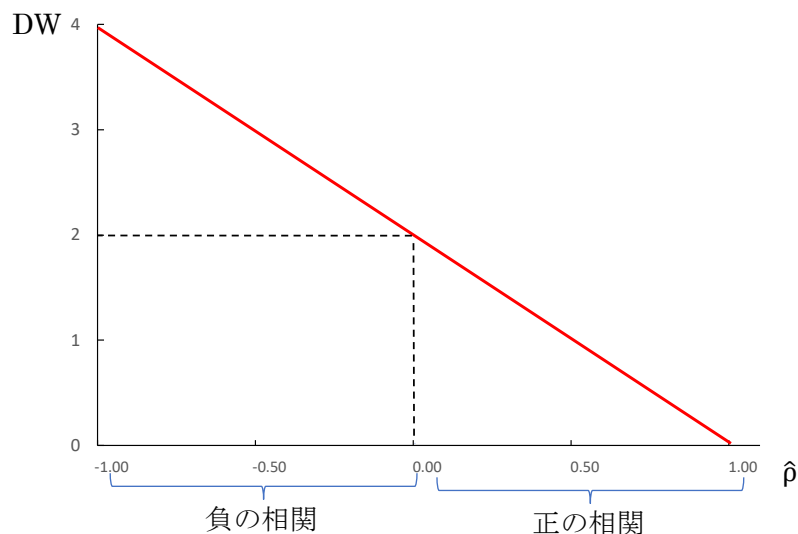
$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}$$

この統計量の意味を考えてみましょう。ここで DW 統計量は、次のように変形できます。

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} &= \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t^2 + \sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \\ &\approx \frac{2 \sum_{t=2}^T \hat{u}_t^2 - 2 \sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \\ &= 2 \left(\frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} - \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \right) \approx 2(1 - \hat{\rho}) \end{aligned}$$

式展開では、 $\sum_{t=2}^T \hat{u}_t^2 \approx \sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2 \approx \sum_{t=1}^T \hat{u}_{t-1}^2$ を用いました。また、 $\hat{\rho} = \sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} / \sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1}^2$ としています¹。つまり、 $\hat{\rho}$ が 1 なら $DW = 0$ ですし、 $\hat{\rho} = 0$ なら $DW = 2$ となり、 $\hat{\rho} = -1$ なら $DW = 4$ となります（下図参照）。

図 DW 統計量と係数 $\hat{\rho}$ の関係



¹ $\hat{\rho}$ は、被説明変数を $\hat{u}_t$ 、説明変数を $\hat{u}_{t-1}$ とした(定数項なしの)OLS 推定の係数です。定数項がない回帰モデルの OLS 推定量は、藪友良『入門 実践する計量経済学』3 章の練習問題 12 を参照してください。

誤差項 u_t に正の系列相関 ($\rho > 0$) があれば、($\hat{\rho} > 0$ となるため) DW 統計量は 0 から 2 未満の値をとります。逆に、誤差項 u_t に負の系列相関 ($\rho < 0$) があれば、($\hat{\rho} < 0$ となるため) DW 統計量は 2 より大きく 4 以下の値をとります。系列相関がなければ 2 となります。したがって、DW 統計量が 2 に近い値なら系列相関はないと判断され、2 から大きく乖離していると系列相関が疑われます。DW 統計量は、誤差の構造を $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ に限定しているという問題があるため、最近では参考値として掲載しても、あまり重要視はされない指標となっています。

私が学部生の頃は、DW 統計量は必ず掲載する統計量でしたが、いまでは論文の中で用いられることはあまりない気がします。ただし、DW 統計量が 0 に近いと「見せかけの回帰」という現象が起きている可能性があり、DW 統計量は推定結果の診断情報として、いまだ有用であると思います。