2023/03/06

藪友良

需要曲線の推定方法[1]

需要曲線を用いることで、財の価格と数量がどのように決定されるか、経済政策（消費税、TPP の参加など）が経済に与える影響を分析できます。ここでは、経済学において重要な位置を占める需要曲線の推定における問題、また、その推定方法として 2 段階最小 2 乗法を紹介します。

ある財市場のモデル

ある財市場の需要曲線、供給曲線、均衡条件を次のように定義します。

$$\text{需要曲線：}\quad Q_i^D = \alpha_D + \beta_D P_i + u_{Di}$$

$$\text{供給曲線：}\quad Q_i^S = \alpha_S + \beta_S P_i + u_{Si}$$

$$\text{均衡条件：}\quad Q_i = Q_i^D = Q_i^S$$

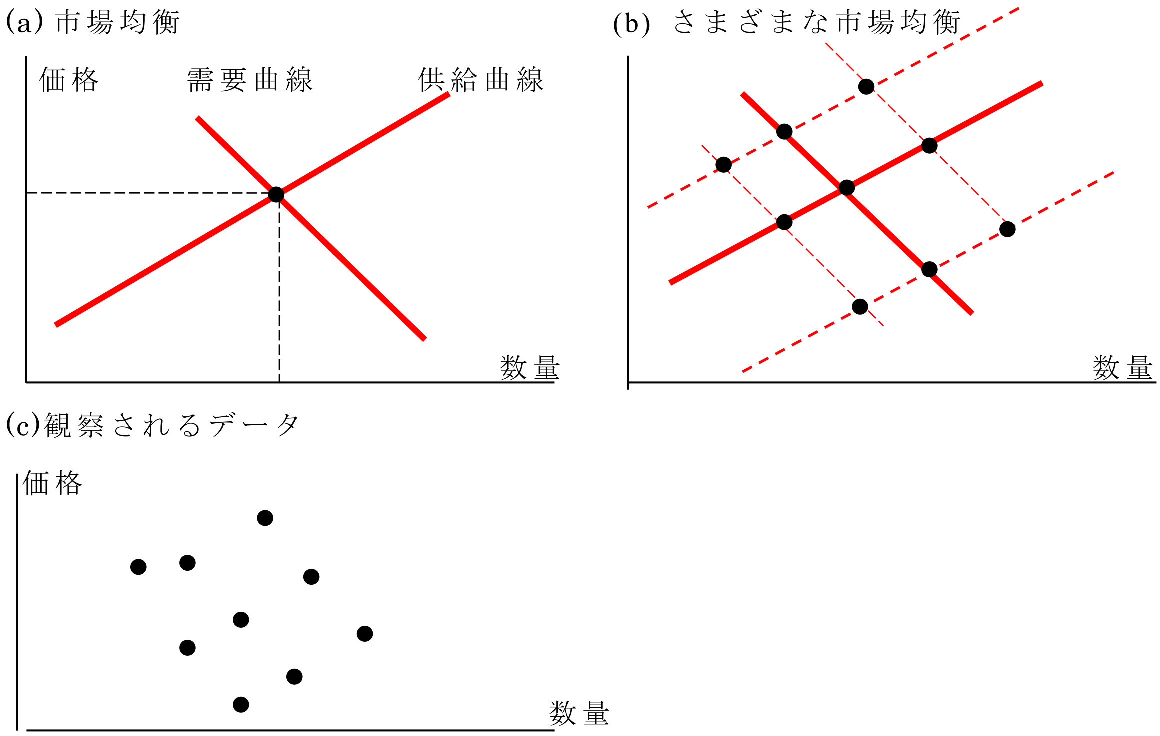
ただし、Pは価格、Q^Dは需要量、Q^Sは供給量です。すべて対数表示とすると、β_Dは需要の価格弾力性、β_Sは供給の価格弾力性にあたります（対数対数モデルは 6.3.1 節参照）。需要ショック(u_D)は期待値 0、分散σ_D^2とし、同様に、供給ショック(u_S)も期待値 0、分散σ_S^2とします。また、両ショックは互いに無相関とします$(E[u_D u_S] = 0)$。均衡条件は、需要量と供給量が一致している状態であり、そのときの数量をQ_iと表記します。

価格と数量は、需要曲線と供給曲線の交点（均衡点）で決定されます（図 1(a)参照）。しかし、需要曲線は需要ショック、供給曲線は供給ショックによって、曲線全体が上下にシフトします。このため、観察される価格と数量はさまざまな値をとります（図 1(b)参照）。図 1(c)では、観察データを示しています。したがって、被説明変数を数量Qとし、説明変数を価格Pとした OLS 推定をしても、これが需要曲線を推定しているのか、供給曲線を推定しているのか分かりません。では、このときの推定結果は何を表しているのでしょうか。

以下では、この点を理論的に考察していきます。

[1] 藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足資料です。

図 1: ある財の市場における需要曲線と供給曲線



<u>OLS 推定の問題と特殊ケース</u>

均衡価格Pと均衡数量Qは、需要ショックu_Dと供給ショックu_Sの関数として、次のように表せます（両式の導出は補足参照）。

$$P_i = \frac{\alpha_S - \alpha_D}{\beta_D - \beta_S} + \frac{u_{Si} - u_{Di}}{\beta_D - \beta_S}$$

$$Q_i = \frac{\alpha_S \beta_D - \alpha_D \beta_S}{\beta_D - \beta_S} + \frac{\beta_D u_{Si} - \beta_S u_{Di}}{\beta_D - \beta_S}$$

価格Pと数量Qは、需要ショックu_Dと供給ショックu_Sに依存していることがわかります。

数量Qを被説明変数、価格Pを説明変数とし、以下の線形回帰モデルを推定します。

$$Q_i = \gamma_0 + \gamma_1 P_i + u_i$$

このとき、価格の係数γ_1の OLS 推定量は、次のようになります。

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P})(Q_i - \bar{Q})}{\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P})(Q_i - \bar{Q})/(n-1)}{\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P})^2/(n-1)}$$

分母は価格Pの標本分散s_P^2であり、分子はPとQの標本共分散s_{PQ}となります。

サンプルサイズnが大きくなると、標本平均は期待値に、標本分散は分散に収束しました(この点は藪友良『入門 実践する統計学』の 5 章参照)。同様に、サンプルサイズnが大きくなると、標本分散s_P^2は分散$V(P)$に収束し、標本共分散s_{PQ}は共分散$Cov(P,Q)$に収束します。したがって、nが大きくなると、OLS 推定量$\hat{\gamma}_1$は$Cov(P,Q)/\ V(P)$に収束します。

ここで、分散$V(P)$と共分散$Cov(P,Q)$は、それぞれ以下のように表現できます(両式の導出は補足参照)。

$$V(P) = \left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 (\sigma_S^2 + \sigma_D^2)$$

$$Cov(P,Q) = \left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 (\beta_D\sigma_S^2 + \beta_S\sigma_D^2)$$

以上から、サンプルサイズnが大きいとき、OLS 推定量$\hat{\gamma}_1$は次のように表現できます。

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{Cov(P,Q)}{V(P)} = \frac{\left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 (\beta_D\sigma_S^2 + \beta_S\sigma_D^2)}{\left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 (\sigma_S^2 + \sigma_D^2)}$$

$$= \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_D^2}\beta_D + \frac{\sigma_D^2}{\sigma_S^2 + \sigma_D^2}\beta_S$$

つまり、OLS 推定量$\hat{\gamma}_1$は、需要曲線の傾きβ_Dと供給曲線の傾きβ_Sの加重平均となります(加重はσ_D^2、σ_S^2からなる)。したがって、被説明変数Qを説明変数Pで OLS 推定した結果が何を表すかは不明瞭であり、あまり意味のない推定といえます。

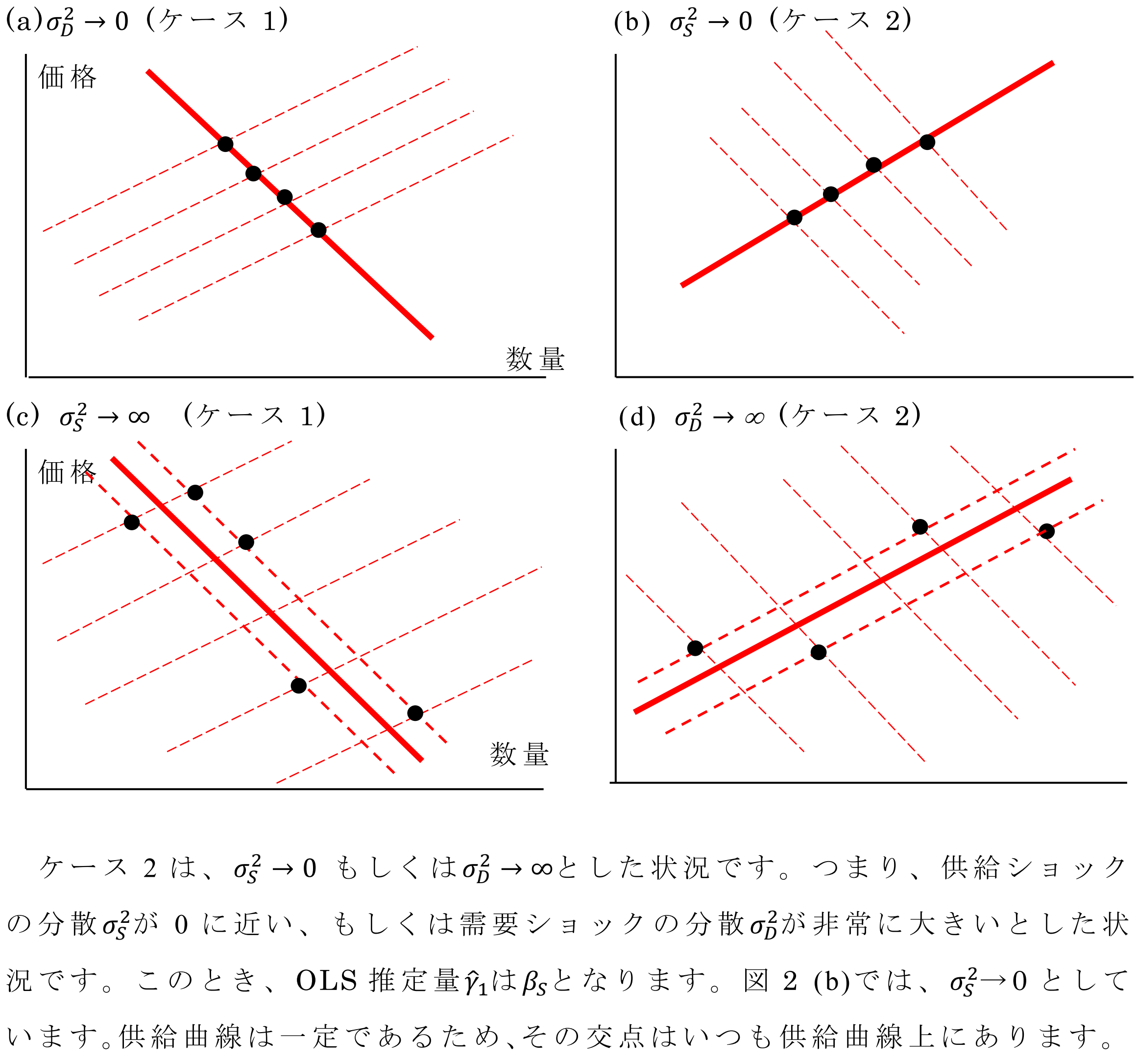
特殊ケースにおいては、OLS 推定量$\hat{\gamma}_1$は、需要曲線の傾きβ_D、もしくは供給曲線の傾きβ_Sとなります。以下では、(OLS 推定量が意味を持つ)特殊ケース 1、2 を説明します。

ケース 1 は、$\sigma_D^2 \to 0$もしくは$\sigma_S^2 \to \infty$とした状況です[2]。つまり、需要ショック

[2] ここで、→は近づけるという意味です($\sigma_D^2 \to 0$とは、σ_D^2を 0 に近づけるということ)。

の分散σ_D^2が 0 に近い、もしくは供給ショックの分散σ_S^2が非常に大きいとした状況です。このとき、OLS 推定量$\hat{\gamma}_1$はβ_Dとなります。図 2(a)では、$\sigma_D^2 \to 0$ としています。需要曲線は一定であるため、その交点は需要曲線上にあります。図 2 (c)では、$\sigma_S^2 \to \infty$ としています。このとき、供給曲線は頻繁にシフトするため、交点をみることで需要曲線の形状が分かります。たとえば、ケース 1 として、農産物などが考えられます。農産物は気候などの影響を受けて、供給曲線は頻繁にシフトしますが、消費者の嗜好は比較的安定し、需要曲線はそれほどシフトしません。

図 2: OLS 推定量が意味を持つ特殊ケース



ケース 2 は、$\sigma_S^2 \to 0$ もしくは$\sigma_D^2 \to \infty$とした状況です。つまり、供給ショックの分散σ_S^2が 0 に近い、もしくは需要ショックの分散σ_D^2が非常に大きいとした状況です。このとき、OLS 推定量$\hat{\gamma}_1$はβ_Sとなります。図 2 (b)では、$\sigma_S^2 \to 0$ としています。供給曲線は一定であるため、その交点はいつも供給曲線上にあります。図 2 (d)では、$\sigma_D^2 \to \infty$ としています。このとき、需要曲線は大きくシフトするため、交点をみることで供給曲線の形状が分かります。たとえば、ケース 2 とし

て、工業生産に用いられる財などが考えられます。たとえば、砂鉄は景気変動により需要が大きく変動しますが、生産工程が安定しているため、供給は安定しています。

コラム：需要曲線か供給曲線か

蓑谷千凰彦『計量経済学ハンドブック』（朝倉書店、2007 年）の第 30 章では、計量経済学の創立者の 1 人といえる H. ムーア(Henry Moore)が紹介されています。ムーアは、15 人兄弟の長男として生まれ、ジョンズ・ホプキンス大学で博士号の取得後、コロンビア大学で賃金と経済循環を研究しました。彼の研究は、経済理論を数量化するという先端的試みであったため、多方面から大きな批判を受けました。彼は温和で傷つきやすい性格であり、自分の研究に対する不当な評価に苦しんでいました。そして、1929 年まだ 59 歳のとき病気を理由に大学を退職しています。

ムーアは、需要曲線の推定を他者に先駆けて行い、その後の研究に大きな影響を与えました。被説明変数をトウモロコシの数量(対数)、説明変数を価格(対数)としたところ、係数は－1.12 となりました。これは価格が 1%上がると需要量は 1.12%減少することを意味します。しかし、砂鉄を分析した結果、係数は負ではなく、+1.91 と正の値になっていました。彼は「需要曲線には負の型とともに正の型があることを発見した」と述べています。こうしたパズルともいえる現象が、多くの研究者の関心を需要曲線の識別問題に向かわせ、フィリップ・ライト(Philip Wright)、シューアル・ライト(Sewall Wright)らによる操作変数法の考案へと繋がります(コラム 13-2 参照)。

フィリップ・ライトは、ムーアの研究にコメントをしています。「『新しい型』の需要曲線（正の勾配をもつ砂鉄の需要曲線）は経済理論とはまったく調和しえないのであろうか。けっしてそうではない。おそらく景気上昇によって砂鉄の需要は急速に、連続的に増加に向かう。これは需要曲線を右へシフトさせる。このシフトする需要曲線と供給曲線の交点はムーア教授の『新しい型』をもたらすであろう」。つまり、フィリップは、砂鉄の

供給曲線は安定している一方、需要曲線は頻繁にシフトしており、それらの交点は供給曲線上で観察される。したがって、ムーアは需要曲線ではなく供給曲線を推定していた、と主張したのです。ムーアの研究には誤りもありましたが、彼の問題提起は計量経済学の進歩に大きな影響を与えました。

OLS 推定の問題とその解決法

内生性の観点から、需要曲線を OLS 推定することの問題を考えます。需要曲線は次のとおりです。

$$Q_i^D = \alpha_D + \beta_D P_i + u_{Di}$$

市場均衡では$Q_i = Q_i^D = Q_i^S$となるため、上式の需要量Q_i^Dを均衡数量Q_iで置き換えると、次のようになります。

$$Q_i = \alpha_D + \beta_D P_i + u_{Di}$$

既に確認したとおり、価格P_iは

$$P_i = \frac{\alpha_S - \alpha_D}{\beta_D - \beta_S} + \frac{u_{Si} - u_{Di}}{\beta_D - \beta_S}$$

と表現できるため、価格P_iは需要ショックu_{Di}と相関しています。つまり、被説明変数をQ_i、説明変数をP_iとした OLS 推定では、内生性の問題が生じています。

そこで、操作変数を考えます。操作変数Z_iは、説明変数P_iと相関しますが、需要ショックu_{Di}とは無相関となる変数とします。操作変数Z_iとして、供給曲線だけをシフトさせる要因が考えられます。このとき、操作変数Z_iは、供給曲線をシフトさせるため、価格P_iと相関しますが、需要ショックu_{Di}とは無相関です。このような操作変数があれば、供給曲線だけをシフトさせ、需要曲線を一定とした状況を作りだせるため、需要曲線の傾きβ_Dを正しく推定できます (図 2(a)参照)。具体例を通じて、理解を深めていきましょう。

例：メロン市場の需要曲線を推定する

メロン市場の需要曲線を推定しましょう[3]。メロン消費量はメロン価格と所得

3　この例は、高岡広、久高和人、山口尚也「関税撤廃による消費への効果」（三田商学学生論文集 2012 年）に収録された論文を要約したものです。上記論文から表 1、2 を抜粋しました。

に依存します。

$$Q_i = \alpha_D + \beta_D P_i + \gamma W_i + u_{Di}$$

Q_iはメロン消費量（対数）、P_iはメロン価格（対数）、W_iは所得（対数）、u_{Di}はメロンの需要ショックとします。

係数β_Dを推定するため、操作変数を用いた 2 段階最小 2 乗法(2SLS)を行います(13.6 節参照)。操作変数として、収穫前の気候情報（気温、日照時間）を用います。気候は、メロンの収穫量を決める重要な要因ですが、メロンの需要とはあまり関係ありません。したがって、気候は価格P_iと相関しますが、需要ショックu_{Di}とは無相関といえます。以下では、操作変数Z_1は最適気温 24℃からの差の絶対値(つまり、|気温－24|)[4]、また、操作変数Z_2は日照時間とします。

表 1: 第 1 段階の推定結果

	(1)	(2)	(3)
定数項	5.028*** (0.739)	5.953*** (0.728)	4.924*** (0.740)
所得	1.132* (0.636)	1.292** (0.660)	1.127* (0.637)
最適気温からの差	0.025*** (0.004)		0.027*** (0.004)
日照時間		-0.002*** (0.0008)	0.0005 (0.0007)
$\overline{R^2}$	0.337	0.084	0.339
OBS	132	132	132

注：第 1 段階の推定結果をまとめたものです。カッコ内は標準誤差。***は 1%有意，**は 5%有意，*は 10%有意を表す。obs はサンプルサイズ。

第 1 段階で、被説明変数を価格P_i、説明変数を所得W_i、操作変数Z_iとした OLS 推定を行います。表 1 は、第 1 段階の推定結果を掲載したものです。(1)では、操作変数を最適気温からの差Z_1とし、(2)では、操作変数を日照時間Z_2としています。(3)では、操作変数として、最適気温からの差Z_1、日照時間Z_2の両方を用

[4] 24 度はメロン栽培の最適気温としています。最適気温からの差の絶対値とは、例えば気温が 30℃なら差の絶対値は 6 となり，気温が 20℃なら差の絶対値は 4 となります。

いました。操作変数を別々に用いると、操作変数は有意ですが、一緒に用いると日照時間は有意となりません。以上から、第 2 段階では、(1)もしくは(2)の結果から、価格の予測値$\hat{P}_i$を求めて OLS 推定します。

2 段階目では、被説明変数を消費量Q_i、説明変数を価格の予測値$\hat{P}_i$、所得W_iとした OLS 推定をします。表 2 は、2 段階目の推定結果をまとめたものです。比較のため、通常の OLS 推定の結果を(1)に掲載しました。(2)は操作変数として最適気温からの差を用いた推定、(3)は日照時間を用いた推定です。通常の OLS では、価格の係数は-2.93 と 0 に近い値となります。これに対して、2SLS では、操作変数としてどちらを用いても、価格の係数は-7.5 程度です（よって、価格が 1%上昇すると需要量は 7.5%減少する）。操作変数の選択に対して、推定結果は頑健となります。

まとめると、内生性を考慮することで、価格の係数は倍以上と推定されており、内生性の問題が深刻であったかが分かります。

表 2: 第 2 段階の推定結果（需要曲線の推定）

	(1)	(2)	(3)
定数項	20.14*** (3.11)	45.19*** (8.26)	47.94*** (14.84)
価格	-2.93*** (0.33)	-7.41*** (0.97)	-7.89*** (2.29)
所得	2.83 (2.26)	8.62* (4.84)	9.52 (6.02)
OBS	132	132	132

注：OLS または 2SLS を用いて推計した需要関数の推計結果です。カッコ内は標準誤差。***は 1%有意，**は 5%有意，*は 10%有意を示します。また、obs はサンプルサイズです。

補足：証明

価格と数量の式を導出します。均衡条件（$Q_i^D = Q_i^S$）から

$$\alpha_D + \beta_D P_i + u_{Di} = \alpha_S + \beta_S P_i + u_{Si}$$

となり、これをPについて解くと、

$$(\beta_D - \beta_S)P_i = (\alpha_S - \alpha_D) + (u_{Si} - u_{Di})$$

よって、両辺を$\beta_D - \beta_S$で割れば、価格の式が導かれます。

$$P_i = \frac{\alpha_S - \alpha_D}{\beta_D - \beta_S} + \frac{u_{Si} - u_{Di}}{\beta_D - \beta_S}$$

需要曲線に、上記の式を代入すると、次のようになります（$Q_i = Q_i^D$から、Q_i^DをQ_iで置き換えました）。

$$Q_i = \alpha_D + \beta_D \left(\frac{\alpha_S - \alpha_D}{\beta_D - \beta_S} + \frac{u_{Si} - u_{Di}}{\beta_D - \beta_S} \right) + u_{Di}$$

$$= \frac{\alpha_D\beta_D - \alpha_D\beta_S}{\beta_D - \beta_S} + \frac{\alpha_S\beta_D - \alpha_D\beta_D}{\beta_D - \beta_S} + \frac{\beta_D u_{Si} - \beta_D u_{Di}}{\beta_D - \beta_S} + \frac{\beta_D u_{Di} - \beta_S u_{Di}}{\beta_D - \beta_S}$$

$$= \frac{\alpha_S\beta_D - \alpha_D\beta_S}{\beta_D - \beta_S} + \frac{\beta_D u_{Si} - \beta_S u_{Di}}{\beta_D - \beta_S}$$

P_iの分散、P_iとQ_iの共分散を求めましょう。u_{Si}とu_{Di}は期待値 0 から、先ほど求めた価格と数量の式の期待値をとると、それぞれ以下となります。

$$E[P_i] = \frac{\alpha_S - \alpha_D}{\beta_D - \beta_S}$$

$$E[Q] = \frac{\alpha_S\beta_D - \alpha_D\beta_S}{\beta_D - \beta_S}$$

P_iの分散は、次のようになります（仮定から、$E[u_{Si}^2] = \sigma_S^2$、$E[u_{Di}^2] = \sigma_D^2$、$E[u_{Si}u_{Di}] = 0$としました）。

$$V(P) = E[(P_i - E[P_i])^2]$$

$$= E\left[\left(\frac{u_{Si} - u_{Di}}{\beta_D - \beta_S} \right)^2 \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S} \right)^2 E[(u_{Si} - u_{Di})^2]$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 E[u_{Si}^2 + u_{Di}^2 - 2u_{Si}u_{Di}]$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 (\sigma_S^2 + \sigma_D^2)$$

次に、P_iとQ_iの共分散は、次のようになります。

$$Cov(P_i, Q_i) = E[(P_i - E[P_i])(Q_i - E[Q_i])]$$

$$= E\left[\left(\frac{u_{Si} - u_{Di}}{\beta_D - \beta_S}\right)\left(\frac{\beta_D u_{Si} - \beta_S u_{Di}}{\beta_D - \beta_S}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 E[(u_{Si} - u_{Di})(\beta_D u_{Si} - \beta_S u_{Di})]$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 (\beta_D E[u_{Si}^2] + \beta_S E[u_{Di}^2] - \beta_S E[u_{Si}u_{Di}] - \beta_D E[u_{Si}u_{Di}])$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_D - \beta_S}\right)^2 (\beta_D \sigma_S^2 + \beta_S \sigma_D^2)$$