2023/02/07

藪友良

共和分関係と誤差修正モデル[1]

VAR モデルは、各変数は定常であると仮定しました。ここでは、変数は単位根を持っていると仮定したうえで、変数間に安定的関係がある状況を考察します。

共和分関係

2003 年にノーベル経済学賞を受賞した R.エングル(Robert Engle)と C.グレンジャー(Clive Granger)は、単位根を持った複数の変数間に、安定的関係が存在する可能性を指摘しました。

K個の確率変数X_{1t}, X_{2t}, … , X_{Kt}のすべてが単位根をもち、次の線形関係

$$\beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_K X_{Kt}$$

が定常となる係数β_1、β_2、 …、β_Kが存在するとき、そのβ_1、β_2、 …、β_Kを、**共和分ベクトル**(cointegrating vector)と呼び、この関係を、**共和分**(cointegration)もしくは**共和分関係**(cointegrating relationship)と呼ぶものとしました。

もしβ_1、β_2、 …、β_Kが共和分ベクトルならば、それを定数倍した$\lambda\beta_1$、$\lambda\beta_2$、…、$\lambda\beta_K$も、共和分ベクトルとなります(λは任意の定数)。これは、$\beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_n X_{Kt}$が定常ならば、それを$\lambda$倍した$\lambda(\beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_K X_{Kt})$も定常となるためです。したがって、共和分ベクトルは、通常、1 つの変数の係数を 1 に設定し、共和分ベクトルを「規準化」します。たとえば、変数X_{1t}をもとに規準化する場合、$\lambda = 1/\beta_1$と設定します(ただし、$\beta_1 \neq 0$とする)。以後、共和分ベクトルは、

$$1、\beta_2^*、 …、\beta_K^*$$

と定義します。ここで、$\beta_2^* = \beta_2/\beta_1$、 …、$\beta_K^* = \beta_K/\beta_1$です。

K個の確率変数X_{1t}, X_{2t}, … , X_{Kt}が共和分関係にあるとします。このとき、共和分関係が成立するため、

$$X_{1t} + \beta_2^* X_{2t} + \cdots + \beta_K^* X_{Kt} = \alpha + u_t$$

[1] こちらは、藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足として用意しましましたが、紙幅の関係で掲載できなかった資料となります。

と表現でき、u_tは定常な確率変数(期待値 0)となります。これを書き換えると、次の式となります。

$$X_{1t} = \alpha - \beta_2^* X_{2t} - \cdots - \beta_K^* X_{Kt} + u_t$$

つまり、X_{1t}は他変数の線形関係で表され、u_tは誤差項とみなされます。したがって、被説明変数をX_{1t}とし、説明変数を$X_{2t}, \ldots$, X_{Kt}とした OLS 推定により、共和分ベクトルを推定することができます。

例（購買力平価と共和分）

購買力平価説は、「同一通貨で計ったとき消費財バスケットの価格が全ての国で等しくなる」としました(コラム 16-2 参照)。ここで、P_tを日本の物価水準、P_t^*を米国の物価水準、S_tをドル円レートとすると、購買力平価が正しいなら、次の関係式が成立します。

$$P_t = P_t^* S_t$$

つまり、両辺の対数をとると、

$$\ln(P_t) = \ln(P_t^*) + \ln(S_t)$$

となります。厳密には、購買力平価は成立していませんが、上式が長期的には成立しているなら、変数$\ln(P_t)$、$\ln(P_t^*)$、$\ln(S_t)$は共和分関係にあるといえます(なお、これらの変数に単位根検定を行うと、単位根仮説を棄却できないことが知られています)。

<u>エングルとグレンジャーの検定</u>

エングルとグレンジャーは、共和分関係の有無を検定するために、次の単純な方法を提案しています。ここでは、2 個の変数(Y_t, X_t)があり、両変数とも単位根があるとします。手順は以下のとおりです。

1) モデルを$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$とした OLS 推定によって、パラメータ(共和分ベクトル)を推定し、残差$\hat{u}_t$を求めます。仮に、Y_tとX_tに共和分関係があれば、残差$\hat{u}_t$は定常となります。逆に、Y_tとX_tに共和分関係がなければ、残差$\hat{u}_t$は単位根を持ちます。

2) 共和分関係があるか否かを調べるため、残差$\hat{u}_t$に対して ADF 検定を行います。もし帰無仮説H_0(単位根)が採択されたら共和分関係がない、帰無仮説

H_0が棄却されたら共和分関係がある、と判断されます。ただし、t 統計量は、DF 検定の単位根分布ではなく、特殊な分布に従うため、臨界値は DF 検定の臨界値とは異なる値となります。なお、統計ソフトを用いれば、t 値と臨界値を表示してくれます。

誤差修正モデル

単位根を持った変数X_tとY_tには共和分関係がある、とします($Y_t - \beta X_t$は定常である)。このとき、両変数の動学的関係は、次のような**誤差修正モデル**(error correction model)によって表すことができます。

$$\Delta Y_t = \mu_1 + \theta_1(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + a_{11}\Delta Y_{t-1} + \cdots + a_{1p}\Delta Y_{t-p} + b_{11}\Delta X_{t-1} + \cdots + b_{1p}\Delta X_{t-p} + \varepsilon_{Yt}$$
$$\Delta X_t = \mu_2 + \theta_2(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + a_{21}\Delta Y_{t-1} + \cdots + a_{2p}\Delta Y_{t-p} + b_{21}\Delta X_{t-1} + \cdots + b_{2p}\Delta X_{t-p} + \varepsilon_{Xt}$$

誤差修正モデルは、通常の VAR モデルとは異なり、共和分関係$Y_{t-1} - \beta X_{t-1}$が説明変数に含まれています。ここで、$Y_{t-1} - \beta X_{t-1}$は、$t-1$期における「均衡状態からの乖離」を表しており、それが修正される形でY_tやX_tが変化します。パラメータθ_1とθ_2は、均衡からの乖離が修正されるスピードを表し、**調整速度係数**とも呼ばれます。

仮に共和分ベクトルβの値が分かっているならば、データから、$t-1$期における「均衡からの乖離」である$Y_{t-1} - \beta X_{t-1}$を計算し、それを用いて誤差修正モデルを推定できます。以下では、金利スプレッドの例を通じて、誤差修正モデルの理解を深めていきましょう。

例(金利スプレッドの分析)

16.2.4 節の例 16-1 では、金利スプレッド $=$ 長期金利 $-$ 短期金利と定義しました。長期金利をr_t^{long}、短期金利をr_t^{short}と表記すると、金利スプレッドは$r_t^{long} - r_t^{short}$となります。長期金利と短期金利に、それぞれ単位根検定を行うと、いずれも単位根の仮説は棄却されません。また、16.2.4 節で確認したとおり、金利スプレッド($r_t^{long} - r_t^{short}$)は定常です。つまり、長期金利と短期金利には、$r_t^{long} - r_t^{short}$という共和分関係がある、といえます。ここで、$t-1$期における「均衡からの乖離」を金利スプレッド($r_{t-1}^{long} - r_{t-1}^{short}$)とし、誤差修正モデルを推定します(ラグの長さは 1 としました)。

$$\Delta\hat{r}_t^{long} = -0.040 - 0.035\left(r_{t-1}^{long} - r_{t-1}^{short}\right) + 0.196\Delta r_{t-1}^{long} - 0.056\Delta r_{t-1}^{short}$$
$$\quad (0.029) \quad (0.036) \qquad\qquad\qquad (0.099) \qquad (0.073)$$

$$\Delta\hat{r}_t^{short} = -0.125 + 0.184(r_{t-1}^{long} - r_{t-1}^{short}) + 0.179\Delta r_{t-1}^{long} + 0.203\Delta r_{t-1}^{short}$$
$$\quad (0.031) \quad (0.038) \qquad\qquad\qquad (0.104) \qquad (0.076)$$

長期金利r_t^{long}の式では、金利スプレッド$(r_{t-1}^{long} - r_{t-1}^{short})$の係数は負となりますが、係数は$-0.035$と 0 に近い値であり、長期金利から均衡を修正する動きは弱いといえます。これに対して、短期金利r_t^{short}の式では、金利スプレッド$(r_{t-1}^{long} - r_{t-1}^{short})$の係数は正であり、係数は$0.184$と大きな値をとります。つまり、金利スプレッド$(r_{t-1}^{long} - r_{t-1}^{short})$が正であれば、短期金利が上昇することで、金利スプレッドが縮小する動きが生じます。以上から、長期金利と短期金利に共和分関係があり、短期金利が動くことで、均衡への調整が行われていることがわかります。

金利スプレッドの例では、共和分ベクトルの値が分かっていることを前提としました。しかし、共和分ベクトルは未知であることが多く、その場合には、データから共和分ベクトルを推定する必要があります。エングルとグレンジャーは、誤差修正モデルの便利な推定法を提案しています。まず、モデル$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$を OLS 推定し、残差$\hat{u}_t$が定常であるかを確認します。もし定常なら共和分が成立すると判断し、残差$\hat{u}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_t$を「均衡からの乖離」と見なし、次の誤差修正モデルを推定します。

$$\Delta Y_t = \mu_1 + \theta_1\hat{u}_{t-1} + a_{11}\Delta Y_{t-1} + \cdots + a_{1p}\Delta Y_{t-p} + b_{11}\Delta X_{t-1} + \cdots + b_{1p}\Delta X_{t-p} + \varepsilon_{Yt}$$
$$\Delta X_t = \mu_2 + \theta_2\hat{u}_{t-1} + a_{21}\Delta Y_{t-1} + \cdots + a_{2p}\Delta Y_{t-p} + b_{21}\Delta X_{t-1} + \cdots + b_{2p}\Delta X_{t-p} + \varepsilon_{Xt}$$

ここで、$\hat{u}_t$は**誤差修正項**と呼ばれます。