2023/02/02

藪友良

ARCH モデル[1]

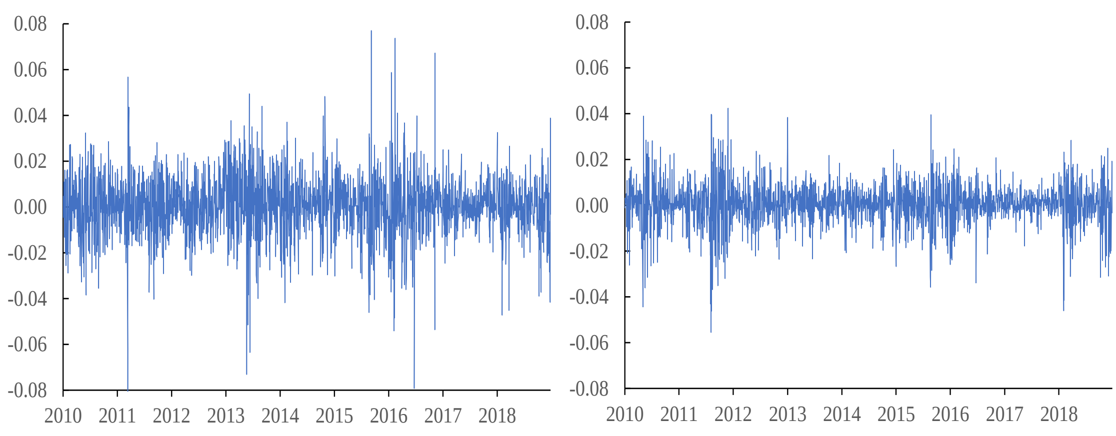
R.エングル(Robert Engle)は、ボラティリティ・クラスタリングといわれる現象を発見し、それをモデル化する方法として、ARCH モデルを提案しました。ARCH モデルの利点として、データからパラメータを推定すれば、時間を通じた株価の分散を推定できる点が挙げられます。金融商品(オプションなど)の価格は、株価の分散に依存しており、その動きを正しく予測することで、金融商品の適正価格を求めることができます[2]。

ボラティリティ・クラスタリング

ボラティリティ・クラスタリング(volatility clustering)とは、「今日、株式市場が不安定なら(株価が大きく予測不能な動きをしたら)、明日の市場も不安定になる可能性が高いこと」、逆に、「今日、株式市場が安定しているなら、明日の市場も安定する可能性が高いこと」を意味します。

図 1　ボラティリティ・クラスタリング

(a) 日経平均株価の変化率　　**(b) ダウ平均株価の変化率**



この点を確認するため、2010 年 1 月 5 日から 2018 年 12 月 28 日までの株価の日次データ(土日祝日を除く)を見てみましょう。図 1(a)は日経平均株価の変

---

[1] 藪友良『入門 実践する計量経済学』(2023 年、東洋経済新報社)の補足資料です。

[2] ARCH モデルを詳しく学習したい方には、ウォルター・エンダース『実証のための計量時系列分析』(2019 年、有斐閣、新谷元嗣／藪友良訳) をお勧めします。

化率、図 1(b)はダウ平均株価の変化率です。図をみると、株式市場には平穏な期間だけでなく、不安定な期間も存在することが分かります。たとえば、ダウ平均株価は、2011 年に大きく変動しますが、2013 年と 2014 年は比較的安定した動きをしています。

ARCH モデル

こうした分散不均一の現象をモデル化するモデルとして、**自己回帰条件付き不均一分散モデル**(autoregressive conditional heteroscedasticity model、**ARCH モデル**)があります(ARCH は「アーチ」と読む)。

通常の単回帰モデルを考えます。

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

エングルは、誤差項ε_tとして次式を仮定しました[3]。

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{h_t}$$

$$h_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2$$

ただし、v_tは標準的仮定を満たすとします($v_t \sim i.i.d.N(0,1)$)。また、パラメータは、$0 < a_0$、$0 \leq a_1 < 1$を満たすとします。このとき、ε_tは ARCH(1)誤差と呼ばれます。

ARCH(1)誤差の分散はh_tであり、時間を通じて変化します。仮に 1 期前に大きなショックがあれば(つまり、ε_{t-1}^2は大きい)、a_1は正であるため、h_tも大きな値をとります。このとき、ε_tは正か負かは分かりませんが、大きな値をとる確率が高くなります。逆に、1 期前のショックが小さければ(つまり、ε_{t-1}^2は小さい)、h_tも小さな値となります。このとき、ε_tは小さな値をとる確率が高くなります。

ARCH モデルは、q 次のラグまで考慮した ARCH(q)モデルに拡張することも可能です。

$$h_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + \dots + a_q\varepsilon_{t-q}^2$$

ここで、分散h_tは、前期のショックだけでなく、q期前までのショックにも依存しています。

---

[3] Engle, R. (1982) “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation” *Econometrica* 50, 987-1008.

GARCH モデル

エングルの弟子であるT.ボルスレフ(Tim Bollerslev)は、ARCH モデルを「一般化(generalized)」した **GARCH モデル**(generalized ARCH model)を提案しました (GARCH は「ガーチ」と読む)[4]。

GARCH モデルは、分散h_tが次のように仮定されます。

$$h_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + \dots + a_q\varepsilon_{t-q}^2 + b_1h_{t-1} + \dots + \alpha_p h_{t-p}$$

このモデルは GARCH(q, p)モデルと呼ばれます。ここで、$b_1 = b_2 = \cdots = b_p = 0$とすれば、ARCH モデルとなります。

GARCH モデルの利点は、高次の ARCH モデル(ラグの長さ p が大きいモデル)であっても、低次の GARCH モデル(ラグの長さ q, p が小さいモデル)によって表せる点にあります。

たとえば、GARCH(1, 1)を考えましょう。

$$h_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + b_1h_{t-1}$$

上式に、1期前の式$h_{t-1} = a_0 + a_1\varepsilon_{t-2}^2 + b_1h_{t-2}$を代入すると、次式になります。

$$h_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + b_1(a_0 + a_1\varepsilon_{t-2}^2 + b_1h_{t-2})$$
$$= a_0(1 + b_1) + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + a_1b_1\varepsilon_{t-2}^2 + b_1^2h_{t-2}$$

さらに2期前の式$h_{t-2} = a_0 + a_1\varepsilon_{t-3}^2 + b_1h_{t-3}$を代入すると、次式になります。

$$h_t = a_0(1 + b_1) + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + a_1b_1\varepsilon_{t-2}^2 + b_1^2\left(a_0 + a_1\varepsilon_{t-3}^2 + b_1h_{t-3}\right)$$
$$= a_0(1 + b_1 + b_1^2) + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + a_1b_1\varepsilon_{t-2}^2 + a_1b_1^2\varepsilon_{t-3}^2 + b_1^3h_{t-3}$$

こうした代入を繰り返していくと、次の ARCH(∞)モデルとして表せます。

$$h_t = a_0(1 + b_1 + b_1^2 + b_1^3 + \cdots) + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + a_1b_1\varepsilon_{t-2}^2 + a_1b_1^2\varepsilon_{t-3}^2 + a_1b_1^3\varepsilon_{t-4}^2 + \cdots$$

この結果から、GARCH(1,1)モデルは、パラメータ(a_0, a_1, b_1)の値を変えることで、複雑な分散の動きを捉えることができることがわかります。

例（ドル円レートと為替介入）

ここでは 1995 年 6 月 21 日から 2002 年 12 月 31 日までのデータを用いて、為替介入がドル円レートに与える影響をみてみましょう。ドル円レートの対数をs_t、介入額（億円）をInt_tと表記します。介入額Int_tが正なら円買いドル売り介入、介入額Int_tが負なら円売りドル買い介入とします。

[4] Bollerslev, T. (1986) “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity” *Journal of Econometrics* 31(3), 307-327.

このとき、モデルは次の式とします。

$$\Delta s_t = \alpha + \beta Int_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 h_{t-1}$$

ここで、誤差項は GARCH(1,1)とし、$\Delta s_t = s_t - s_{t-1}$としています。また、係数$\beta$が負なら、介入は効果があるとみなされます。つまり、円買いドル売り介入をしたとき($0 < Int_t$)、ドル円レートが円高方向（$\Delta s_t < 0$）に動けば、介入は効果があると認められます。

実際に、上記モデルを推定してみると次のようになりました。

$$\widehat{\Delta s}_t = 0.00018 - 0.0000009 Int_t$$

$$(0.00016) \ \ (0.00000013)$$

$$\hat{h}_t = 0.0000004 + 0.036 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.955 h_{t-1}$$

$$(0.00000014) \ (0.0038) \ (0.0053)$$

介入額の係数βは有意に負であり、介入は意図した効果があることが分かります。その係数は0.0000009ですから、1 兆(=10000 億)円の円売り介入は、為替レートを 0.9%(0.009=0.0000009×10000)だけ円安方向に動かします。

次に、分散の式を見てみます。ε_{t-1}^2の係数は0.036、h_{t-1}の係数は0.955と有意に正になっています。つまり、過去に分散が大きいと、当期の分散も大きくなることが分かります。この結果から、為替レートには、ボラティリティ・クラスタリングがあることがわかります。