2024/04/12

藪友良

第 3 章の答え

練習問題 1

XとYの関係を知るためには、Yの変動は必要ない。Xが変動していて、Yが全く変動していなければ、XはYに何の影響も与えておらず、係数βは 0 と推定できる。これは、OLS 推定量の公式、つまり、次式から明らかである。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

ここで、Y_iの変動が 0 なら$Y_i = \bar{Y}$であり$(Y_i - \bar{Y} = 0)$、$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 0$となり、$\hat{\beta} = 0$と推定される。

練習問題 2

仮定 3(誤差項uの期待値が 0)が成立するよう定数項αが(暗黙のうちに)定義されているため、問題とならない(3.2.3 節参照)。

練習問題 3

係数βは真の値であり、OLS 推定量$\hat{\beta}$はデータから計算されるβの推定量となる。OLS 推定量$\hat{\beta}$は不偏性があるため、平均的には真の値βと一致する。また、OLS 推定量$\hat{\beta}$は一致性があるため、サンプルサイズが大きければ、$\hat{\beta}$は真の値βと一致することになる。

練習問題 4

誤差項u_iは、実現値と真の回帰式からの予測値との差であるのに対し、残差$\hat{u}_i$は、実現値と推定された回帰式からの予測値となる。つまり、

$$u_i = Y_i - (\alpha + \beta X_i)、\hat{u}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i)$$

となる。なお、誤差項は観察できないが、残差は観察できるという違いもある。両者は混同しやすい概念なので、注意してほしい。

練習問題 5

図(a)をみると、どのようなサンプルサイズnに対しても、推定量$\hat{\beta}_1$の分布の中心はβとなっているため、不偏性があることがわかる。また、サンプルサイズnが∞のとき、$\hat{\beta}_1$はβと一致していることから、$\hat{\beta}_1$は一致性がある。これに対して、図(b)をみると、推定量$\hat{\beta}_2$の分布の中心はβではないため、$\hat{\beta}_2$には不偏性がない。しかし、サンプルサイズnが∞のとき、$\hat{\beta}_2$はβに一致していることから、$\hat{\beta}_2$には一致性がある。

練習問題 6

サンプルサイズが 8 のとき、推定結果は

$$\underset{(1.05)}{\hat{Y} = 2.62} + \underset{(0.029)}{0.163X}$$

となる。式の下に表記されたカッコ内の値は標準誤差である。自由度$n-2$は、6 と小さな値であることから、$t_{6,0.05} = 2.447$は 1.96 よりかなり大きくなる[1]。95%信頼区間は、$\hat{\beta} = 0.163$、標準誤差$s_{\hat{\beta}} = 0.029$を用いて、

$$\underbrace{0.163 - 2.447 \times 0.029}_{=0.092} < \beta < \underbrace{0.163 + 2.447 \times 0.029}_{=0.234}$$

となる。下限と上限を計算すると、これは(0.092、0.234)区間となる。

724 物件のデータを用いて同じ推定をすると、次のようになる。

$$\underset{(0.101)}{\hat{Y} = 2.69} + \underset{(0.003)}{0.160X}$$

ここで、nは724と大きいため、$t_{n-2,0.05}$として 1.96 を用いる(なお、$t_{722,0.05}$は、1.9632551 となり、ほぼ同じ値である[2])。

$$\underbrace{0.160 - 1.96 \times 0.003}_{=0.154} < \beta < \underbrace{0.160 + 1.96 \times 0.003}_{=0.166}$$

となる。これは(0.154、0.166)区間であり、信頼区間は狭く、βの範囲をかなり絞りこめていることがわかる。

---

[1] Excel では、$t_{6,0.05}$は「=TINV(0.05,6)」と入力すれば求められる。

[2] Excel では、$t_{722,0.05}$は「=TINV(0.05,722)」と入力すれば求められる。

練習問題 7

$\sum_{i=1}^{n}(u_i/\sigma)^2$は自由度$n$の$\chi^2$分布、$\sum_{i=1}^{n}(\hat{u}_i/\sigma)^2$は自由度$n-2$の$\chi^2$分布に従う(補足参照)。$\chi^2$確率変数の期待値は自由度であるから、それぞれの期待値はそれぞれ

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\sigma}\right)^2\right]=n$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{u}_i}{\sigma}\right)^2\right]=n-2$$

練習問題 8

期待値をとると、

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2\right]=\frac{\sigma^2}{n}\underbrace{E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{u}_i}{\sigma}\right)^2\right]}_{\text{自由度}=n-2}=\frac{n-2}{n}\sigma^2$$

となる。式展開では、$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{u}_i}{\sigma}\right)^2$は自由度$n-2$の$\chi^2$分布に従うため、その期待値は$n-2$となることを用いた。

なお、次の関係から、$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2/n$は誤差項の分散$\sigma^2$を過小推定していることが理解できる。

$$\frac{n-2}{n}\sigma^2<\sigma^2$$

練習問題 9

OLS 推定量$\hat{\alpha}$の確率的表現は、$\hat{\alpha}=\alpha-(\hat{\beta}-\beta)\bar{X}+\bar{u}$となるため、その期待値は

$$\begin{aligned}E[\hat{\alpha}]&=\alpha-(E[\hat{\beta}]-\beta)\bar{X}+E[\bar{u}]\\&=\alpha-(\beta-\beta)\bar{X}+0=\alpha\end{aligned}$$

となる(不偏性が満たされる)。式展開では、$E[\hat{\beta}]=\beta$となること、また、標準的仮定 3 から

$$E[\bar{u}]=\frac{1}{n}E[u_1+u_2+\cdots+u_n]=0$$

が成立することを用いた。

練習問題 10

OLS 推定量の確率的表現から、$\hat{\alpha}-\alpha=-(\hat{\beta}-\beta)\bar{X}+\bar{u}$となる。このため、OLS 推定量$\hat{\alpha}$の分散は、

$$V(\hat{\alpha})=E[(\hat{\alpha}-\alpha)^2]$$
$$=E[(-(\hat{\beta}-\beta)\bar{X}+\bar{u})^2]$$
$$=\bar{X}^2E[(\hat{\beta}-\beta)^2]-2\bar{X}E[(\hat{\beta}-\beta)\bar{u}]+E[\bar{u}^2]$$

となる。ここで、右辺第 1 項は$\hat{\beta}$の分散で$E\big[\big(\hat{\beta}-\beta\big)^2\big]=\sigma^2/\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$となる。また、右辺第 2 項は、

$$\hat{\beta}-\beta=\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})\,u_i}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}$$

を用いると、下記のように 0 となる[3]。

$$E\big[\big(\hat{\beta}-\beta\big)\bar{u}\big]=E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})\,u_i}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{n\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}E\left[\left(\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})\,u_i\right)\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)\right]$$
$$=\frac{1}{n\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\sigma^2\underbrace{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})}_{=0}=0$$

最後に、右辺第 3 項は次のようになる。

$$E[\bar{u}^2]=E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}\right)^2\right]=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

これらの結果を$V(\hat{\alpha})$の右辺に代入すると、

$$V(\hat{\alpha})=\bar{X}^2\underbrace{E\big[\big(\hat{\beta}-\beta\big)^2\big]}_{=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}}-2\bar{X}\underbrace{E\big[\big(\hat{\beta}-\beta\big)\bar{u}\big]}_{=0}+\underbrace{E[\bar{u}^2]}_{=\frac{\sigma^2}{n}}$$

[3] 式展開では、$E[(\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})\,u_i)(\sum_{i=1}^n u_i)]=\sigma^2\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})$を用いた。これが正しいことを、$n=2$のケースで確認する。$n=2$の場合、$E[(\sum_{i=1}^2(X_i-\bar{X})\,u_i)(\sum_{i=1}^2 u_i)]$は、

$$E\big[\big((X_1-\bar{X})u_1+(X_2-\bar{X})u_2\big)(u_1+u_2)\big]=(X_1-\bar{X})E[u_1^2]+(X_2-\bar{X})E[u_2^2]+(X_1-\bar{X})E[u_1u_2]+(X_2-\bar{X})E[u_1u_2]$$

となる。仮定 4 から$E[u_1^2]=E[u_2^2]=\sigma^2$、仮定 5 から$E[u_1u_2]=0$となるため、上式右辺は次のようになる。

$$\sigma^2[(X_1-\bar{X})+(X_2-\bar{X})]=\sigma^2\sum_{i=1}^2(X_i-\bar{X})$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

となる。この式から、nが大きくなると、分散が 0 に近づくことが分かる。

ここで、上式の右辺は、

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) = \sigma^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \frac{n\bar{X}^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \frac{n\bar{X}^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

と書き換えられる。式展開では次の関係式を用いた。

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$$

練習問題 11

$\hat{\alpha}$と$\hat{\beta}$の共分散は、$\hat{\alpha} - \alpha = -(\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u}$を用いると、

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = E\left[(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)\right]$$

$$= E\left[\left(-(\hat{\beta} - \beta)\bar{X} + \bar{u}\right)(\hat{\beta} - \beta)\right]$$

$$= -\bar{X} E\left[(\hat{\beta} - \beta)^2\right] + \underbrace{E\left[(\hat{\beta} - \beta)\bar{u}\right]}_{=0}$$

となる。練習問題 10 で示したとおり、右辺第 2 項は 0 となるため、共分散は次のようになる。

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

練習問題 12

(a) 定数項がない回帰モデルでは、残差 2 乗和は$\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}X_i)^2$となる。$\tilde{\beta}$に関して残差 2 乗和$\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}X_i)^2$を微分して 0 と置くと、

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i^2}{\partial \tilde{\beta}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{u}_i^2}{\partial \tilde{u}_i} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{\beta}} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}X_i)X_i = 0$$

であり、この両辺を－2 で割ると、次の正規方程式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}X_i)X_i = 0$$

正規方程式の左辺を展開すると、

$$\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 = 0$$

となり、この式を$\hat{\beta}$について解くと、最小 2 乗推定量が得られる。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

残差の定義$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}X_i$に注意すると、正規方程式は残差の性質②、つまり、

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\hat{u}_i = 0$$

を意味する。定数項がないため、正規方程式は 1 本だけであり、残差の性質①$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i = 0$は成立しない。

(b) OLS 推定量$\hat{\beta}$である

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

に、$Y_i = \beta X_i + u_i$を代入すると、$\hat{\beta}$の確率的表現が得られる。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i(\beta X_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}X_iu_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

(c)　確率的表現の期待値をとると、

$$E\left[\hat{\beta}\right] = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}X_iE[u_i]}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2} = \beta$$

となり、$\hat{\beta}$は不偏性を満たす(仮定 1 と仮定 3 に注意)。

次に、分散は、

$$V\left(\hat{\beta}\right) = E\left[\left(\hat{\beta} - \beta\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iu_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i u_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

となる。式展開では、

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i u_i\right)^2\right] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

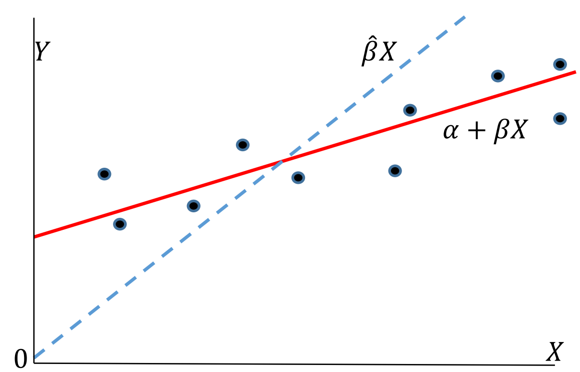
を用いた($E[u_i^2] = \sigma^2$、$i \neq j$なら$E[u_i u_j] = 0$に注意)[4]。

ここで、$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 / \sum_{i=1}^{n} X_i^2$であるから、サンプルサイズ$n$が大きくなると、分母$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$が大きくなり、分散$V(\hat{\beta})$は 0 に収束する。まとめると、モデル($Y_i = \beta X_i + u_i$)が正しいならば、$\hat{\beta}$は不偏性を満たし、$n$が大きいと分散は 0 となるため、一致性も満たしていることがわかる。

(d) 定数項なしの OLS 推定には、問題点が 2 つある。

第 1 の問題は、本当は$\alpha \neq 0$にもかかわらず、定数項なしの OLS 推定をすると、バイアスが発生する点である。下図では、真の関係を実線($\alpha + \beta X$、ただし、$\alpha > 0$とした)、定数項なしの推定から得られた回帰直線を点線$\hat{\beta}X$で表した。データは$\alpha + \beta X$で観察されるが、回帰直線は原点を通るように推定される。ここで、$\hat{\beta} > \beta$であり、$\hat{\beta}$にはバイアスが存在することがわかる。

図： 定数項なしの回帰におけるバイアス



第 2 の問題は、決定係数の 2 つの定義（2.6 参照）が一致しないという点であ

4 $n = 2$として証明しよう。$E[(\sum_{i=1}^{n} X_i u_i)^2]$は、$n = 2$のとき、次のようになる。

$$E[(X_1 u_1 + X_2 u_2)^2] = X_1^2 \underbrace{E[u_1^2]}_{=\sigma^2} + X_2^2 \underbrace{E[u_2^2]}_{=\sigma^2} + 2X_1 X_2 \underbrace{E[u_1 u_2]}_{=0} = X_1^2 \sigma^2 + X_2^2 \sigma^2 = \sigma^2 (X_1^2 + X_2^2)$$

る。つまり、

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2} \neq 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}$$

となる。この点を確認しよう。$Y_i=\hat{Y}_i+\hat{u}_i$に注意すると、Y_iの全変動は、

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y}+\hat{u}_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2+\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2+2\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})\hat{u}_i$$

と分解できる。定数項なしの場合、残差の性質①(残差の和は 0)は成立しないため、右辺第 3 項目は 0 とならない。第 3 項目が 0 でないことは、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)\hat{u}_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i\hat{u}_i-\bar{Y}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i=\hat{\beta}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_i\hat{u}_i}_{=0}-\bar{Y}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i}_{\neq 0}\neq 0$$

と確認できる。つまり、

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\neq\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2+\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

であるから、決定係数の 2 つの定義は一致しないことになる。

以上から、事前情報によって、$\alpha=0$が正しい場合は良いが、そうでなければ、定数項を入れた推定が望ましい。なお、事前情報によって、$\alpha=0$が正しい場合は稀であり、定数項を含めた推定を行うことが一般的となる。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

こちらは初版(第 1 刷)には掲載されていない新しい問題になります。

練習問題 13、

13．★　単回帰モデル$Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$における残差$\hat{u}_i$の性質を考えよう。

(a) $\hat{u}_i=u_i-(\hat{\alpha}-\alpha)-\left(\hat{\beta}-\beta\right)X_i$を示せ。

(b) $E[\hat{u}_i^2]=\sigma^2(1-h_{ii})$を示せ。ここで、$h_{ii}$はレバレッジと呼ばれ、

$$h_{ii}=\frac{1}{n}+\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

と定義される。なお、h_{ii}は 0 以上 1 以下であり、1 に近いほど、i 番目のデータX_iが他のデータに比べて異なることを意味する(h_{ii}が 1 に近いと外れ値である可能性がある)。

(c) $E[\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2] = (n-2)\sigma^2$、$E[s^2] = \sigma^2$を示せ。Hint: $\sum_{i=1}^{n} h_{ii} = 2$

(d) 標準化残差$\bar{u}_i$を$(1-h_{ii})^{-1/2}\hat{u}_i$と定義する。このとき、$E[\bar{u}_i] = 0$、$E[\bar{u}_i^2] = \sigma^2$を示せ。$\sigma^2$の新たな推定量を、$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{u}_i^2$としたとき、$s^2$が不偏性を満たすことを示せ。

練習問題 13 の答え

(a) 残差は、真の値Y_iと予測値$\hat{Y}_i$の差として、次式で表される。

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = (\alpha + \beta X_i + u_i) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i)$$
$$= u_i - (\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta) X_i$$

(b) $E[\hat{u}_i^2] = \sigma^2(1-h_{ii})$の意味を考えてみよう。この結果から、誤差項の分散はσ^2で一定である一方、残差の分散は変化することがわかる。また、レバレッジh_{ii}は定義によって 0 以上となる(厳密には、$X_i = \bar{X}$のとき$h_{ii} = 1/n$で最小となるため$1/n \leq h_{ii}$となる)[5]。よって、残差 2 乗の期待値は、誤差項の分散σ^2より小さい。

$$E[\hat{u}_i^2] = \sigma^2(1-h_{ii}) < \sigma^2$$

この結果から、残差 2 乗はσ^2の不偏推定量ではなく、過小推定する性質があると理解できる。ただし、$\hat{\alpha}$と$\hat{\beta}$は一致推定量であるから、サンプルサイズが大きければ$\hat{u}_i = u_i$となる。

$E[\hat{u}_i^2] = \sigma^2(1-h_{ii})$を証明しよう。$E[\hat{u}_i] = 0$から、$V(\hat{u}_i) = E[\hat{u}_i^2]$となる。(a)の結果を用いると、残差 2 乗の期待値は次のように展開できる。

$$E[\hat{u}_i^2] = E\left[\left(u_i - (\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta) X_i\right)^2\right]$$
$$= E[u_i^2] + \underbrace{E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2]}_{=V(\hat{\alpha})} + X_i^2 \underbrace{E\left[(\hat{\beta} - \beta)^2\right]}_{=V(\hat{\beta})} + 2X_i \underbrace{E\left[(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)\right]}_{=Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$$
$$-2E[u_i(\hat{\alpha} - \alpha)] - 2X_i E\left[u_i(\hat{\beta} - \beta)\right]$$

---

[5] 重回帰分析では、レバレッジは、i 番目のデータ(1, X_{1i}、X_{2i}、…、X_{Ki})が、他のデータに比べて、どれぐらい異なるかを示す。Stata では、レバレッジは reg Y X とした後、predict leverage, hat とすれば計算できる。

ここで、$V(\hat{\alpha})$、$V(\hat{\beta})$、$Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta})$は、

$$V(\hat{\alpha})=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right)、V(\hat{\beta})=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}、Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta})=-\frac{\sigma^2\bar{X}}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}$$

となる(3 章の P59、練習問題 10、 11 参照)。$\hat{\beta}$の確率的表現を用いると、

$$E\left[u_i\left(\hat{\beta}-\beta\right)\right]=E\left[u_i\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right]=\frac{(X_i-\bar{X})E[u_i^2]}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}=\frac{(X_i-\bar{X})\sigma^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}$$

となり、$\hat{\alpha}$の確率的表現を使うと、

$$E[u_i(\hat{\alpha}-\alpha)]=E\left[u_i\left(-\left(\hat{\beta}-\beta\right)\bar{X}+\bar{u}\right)\right]$$

$$=-\bar{X}E\left[u_i\left(\hat{\beta}-\beta\right)\right]+\frac{1}{n}E\left[u_i\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)\right]$$

$$=-\frac{\bar{X}(X_i-\bar{X})\sigma^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}+\frac{\sigma^2}{n}$$

となる(式展開では、$E[u_i^2]=\sigma^2$、$E\left[u_iu_j\right]=0\ \text{for}\ \ i\neq j$を用いた)。

これらを$E[\hat{u}_i^2]$の式に代入すると、次式ように展開できる。

$$E[\hat{u}_i^2]=\sigma^2\left\{1+\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right)+\frac{X_i^2\sigma^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}-2\frac{X_i\bar{X}}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\bar{X}(X_i-\bar{X})\sigma^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}-\frac{1}{n}\right)-2\frac{X_i(X_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right\}$$

$$=\sigma^2\left\{1-\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2+X_i^2-2X_i\bar{X}+2\bar{X}(X_i-\bar{X})-2X_i(X_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right\}$$

$$=\sigma^2\left\{1-\frac{1}{n}-\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right\}$$

(c) 単回帰分析の場合、レバレッジの総和は、$\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}=n\frac{1}{n}=1$に注意すると、

$$\sum_{i=1}^n h_{ii}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right)=1+\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}=2$$

となる。この結果を用いると、次のようになる。

$$E\left[\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2\right]=\sum_{i=1}^n E[\hat{u}_i^2]=\sigma^2\sum_{i=1}^n(1-h_{ii})=\sigma^2(n-2)$$

s^2が不偏推定量であることを、次のようにして示せる。

$$E[s^2] = \frac{1}{n-2} E\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2\right] = \frac{1}{n-2} \sigma^2(n-2) = \sigma^2$$

3 章の補足証明と異なり、ここでは、誤差項が正規分布するという仮定を用いておらず、s^2の不偏性を示すには、正規分布の仮定が不要であることがわかる。

(d)　標準化残差$\bar{u}_i$は次のように定義される。

$$\bar{u}_i = (1-h_{ii})^{-1/2}\hat{u}_i$$

このとき、標準化残差の期待値は

$$E[\bar{u}_i] = (1-h_{ii})^{-1/2}E[\hat{u}_i] = (1-h_{ii})^{-1/2} \times 0 = 0$$

となり、また、標準化残差の 2 乗の期待値はσ^2となる。

$$E[\bar{u}_i^2] = (1-h_{ii})^{-1}E[\hat{u}_i^2] = (1-h_{ii})^{-1}(1-h_{ii})\sigma^2 = \sigma^2$$

よって、標準化残差の 2 乗は、σ^2の不偏推定量である。また、

$$E[s^2] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\bar{u}_i^2] = \frac{1}{n}n\sigma^2 = \sigma^2$$

となり、s^2の不偏性が満たされる。なお、標準化残差は 9 章の練習問題でも用いられるので、覚えておいてほしい。