

第 16 章の答え

練習問題 1

DF 検定は AR(1)に基づいた単位根検定、ADF 検定は DF 検定を AR(p)の場合 ($p > 1$)に拡張した単位根検定となる。ラグ次数を 1 とする根拠はないため、AIC、BIC、MAIC などラグ次数を選択し、それに基づいて ADF 検定を行うことになる。ただし、単位根検定では、MAIC が最も望ましい情報量規準とされる。

実証分析で DF 検定を行うのは、情報量規準などで $p = 1$ が選択されたときである。ただし、その場合であっても、論文などでは DF 検定ではなく、ADF 検定と表記することが多い。

練習問題 2

「見せかけの回帰」は、回帰分析において、トレンドが考慮されていないことから生じる問題となる。まず、ADF 検定や DF-GLS 検定などの単位根検定を行って、データ系列に単位根が存在するか否かを確認する。

データ系列に単位根が存在するならば、トレンドは確率トレンドであり、変数の階差をとってから分析することによって、「見せかけの回帰」の問題が解決できる。これに対して、データ系列に単位根が存在しないならば、トレンドは確定トレンドであり、説明変数にトレンド変数 t を加えることによって問題が解決できる。

練習問題 3

AR(4)モデルとして、

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + a_3 Y_{t-3} + a_4 Y_{t-4} + u_t$$

を考える。まず、右辺に $(a_4 Y_{t-3} - a_4 Y_{t-3})$ を加えると(0を加えても等式は同じ)

$$\begin{aligned} Y_t &= a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + (a_3 + a_4) Y_{t-3} - a_4 (Y_{t-3} - Y_{t-4}) + u_t \\ &= a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + (a_3 + a_4) Y_{t-3} - a_4 \Delta Y_{t-3} + u_t \end{aligned}$$

となる(ただし、 $\Delta Y_{t-3} = Y_{t-3} - Y_{t-4}$)。さらに右辺に $((a_3 + a_4) Y_{t-2} - (a_3 + a_4) Y_{t-2})$ を加えると、次のようになる(ただし、 $\Delta Y_{t-2} = Y_{t-2} - Y_{t-3}$)。

$$\begin{aligned}
Y_t &= a_1 Y_{t-1} + (a_2 + a_3 + a_4) Y_{t-2} - (a_3 + a_4)(Y_{t-2} - Y_{t-3}) - a_4 \Delta Y_{t-3} + u_t \\
&= a_1 Y_{t-1} + (a_2 + a_3 + a_4) Y_{t-2} - (a_3 + a_4) \Delta Y_{t-2} - a_4 \Delta Y_{t-3} + u_t
\end{aligned}$$

さらに右辺に $((a_2 + a_3 + a_4)Y_{t-1} - (a_2 + a_3 + a_4)Y_{t-1})$ を加えると、

$$\begin{aligned}
Y_t &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) Y_{t-1} - (a_2 + a_3 + a_4)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - (a_3 + a_4) \Delta Y_{t-2} - a_4 \Delta Y_{t-3} + u_t \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) Y_{t-1} - (a_2 + a_3 + a_4) \Delta Y_{t-1} - (a_3 + a_4) \Delta Y_{t-2} - a_4 \Delta Y_{t-3} + u_t
\end{aligned}$$

となる。最後に、両辺から Y_{t-1} を引くと、

$$\Delta Y_t = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 1) Y_{t-1} - (a_2 + a_3 + a_4) \Delta Y_{t-1} - (a_3 + a_4) \Delta Y_{t-2} - a_4 \Delta Y_{t-3} + u_t$$

が得られる。ここで

$$\rho = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 1,$$

$$\rho_1 = -(a_2 + a_3 + a_4), \quad \rho_2 = -(a_3 + a_4), \quad \rho_3 = -a_4$$

と定義すれば証明は終わり。つまり、帰無仮説 $H_0: \rho = 0$ は、

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 1 = 0$$

を検定していることになる(つまり、 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$)。

練習問題 4

ここで、 t は月次での時点となるので、 y_t と y_{t-12} との間の関係式を求める。 $t-1$ 期に $y_{t-1} = a_1 y_{t-2} + u_{t-1}$ が成立するので、

$$\begin{aligned}
y_t &= a_1 y_{t-1} + u_t = a_1 (a_1 y_{t-2} + u_{t-1}) + u_t \\
&= a_1^2 y_{t-2} + u_t + a_1 u_{t-1}
\end{aligned}$$

となる。さらに $y_{t-2} = a_1 y_{t-3} + u_{t-2}$ を代入すると

$$y_t = a_1^3 y_{t-3} + u_t + a_1 u_{t-1} + a_1^2 u_{t-2}$$

となる。これを繰り返すことで

$$y_t = a_1^{12} y_{t-12} + u_t + a_1 u_{t-1} + a_1^2 u_{t-2} + \dots + a_1^{11} u_{t-11}$$

となる。つまり、月次の係数 a_1 を 12 乗したものが年次の係数になる。

月次の係数 $a_1 = 0.95$ であれば、年次の係数は $0.95^{12} = 0.54$ と小さくなる。単位根検定では、高頻度のデータを用いてサンプルサイズを大きくするのではなく、サンプル期間を延長することが重要となる。購買力平価の実証研究では、100 年を超えるサンプル期間を用いた研究がおこなわれている。

ただし、サンプル期間を長くとると、構造変化が生じる可能性が高くなることに注意が必要である。また、日本であれば、第 2 次世界大戦の前後では経済

体制が大きく異なり、これらを同一データとして扱ってよいかという問題もあるだろう。こうした問題を回避するため、パネルデータを用いた単位根検定も開発されている。詳しくは、ウォルター・エンダース『実証のための計量時系列分析』(有斐閣、新谷元嗣・藪友良訳)を参照されたい。

練習問題 5

モデル $Y_t = Y_{t-1} + u_t$ に $Y_{t-1} = Y_{t-2} + u_{t-1}$ を代入すると、

$$Y_t = (Y_{t-2} + u_{t-1}) + u_t$$

となる。さらに、 $Y_{t-2} = Y_{t-3} + u_{t-2}$ を代入すると、

$$Y_t = (Y_{t-3} + u_{t-2}) + u_t + u_{t-1}$$

さらに、 $Y_{t-3} = Y_{t-4} + u_{t-3}$ を代入すると、

$$Y_t = (Y_{t-4} + u_{t-3}) + u_t + u_{t-1} + u_{t-2}$$

となる。こうした代入を繰り返すと、

$$Y_t = Y_0 + u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + \cdots + u_2 + u_1$$

が得られる。これはまさに $Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^t u_i$ である。

練習問題 6

通常の OLS なので、Stata コードを確認してほしい。

練習問題 7

ADF 検定は `dfuller` コマンド、GLS-DF 検定は `dfgls` コマンドを使う。