

第 15 章の答え

練習問題 1

GDP 成長率 Y_t は、次のように決まる。

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + u_t$$

ここで、金利の式は、 t 期と $t-1$ 期において、それぞれ

$$X_t = b_0 + b_1 Y_{t-1}$$

$$X_{t-1} = b_0 + b_1 Y_{t-2}$$

となる。これらを GDP の式に代入すると、

$$\begin{aligned} Y_t &= a_0 + a_1(b_0 + b_1 Y_{t-1}) + a_2(b_0 + b_1 Y_{t-2}) + u_t \\ &= \underbrace{(a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0)}_{=c_0} + \underbrace{a_1 b_1}_{=c_1} Y_{t-1} + \underbrace{a_2 b_1}_{=c_2} Y_{t-2} + u_t \end{aligned}$$

となる。ここで、パラメータを

$$c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0, \quad c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_2 b_1$$

と定義すると、GDP が次の AR(2) モデルであることを意味する。

$$Y_t = c_0 + c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + u_t$$

練習問題 2

ここで、 Y_t は定常とする。モデルの両辺の期待値をとると、

$$E[Y_t] = a_0 + a_1 E[Y_{t-1}] + a_2 E[Y_{t-2}] + \cdots + a_p E[Y_{t-p}] + E[u_t]$$

となる。ここで、 $E[u_t] = 0$ 、定常性から $E[Y_t] = E[Y_{t-1}] = E[Y_{t-2}] = \cdots = E[Y_{t-p}]$ に注意すると、次のようになる。

$$E[Y_t] = a_0 + a_1 E[Y_t] + a_2 E[Y_t] + \cdots + a_p E[Y_t]$$

これを、 $E[Y_t]$ について解くと、

$$E[Y_t] = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_p}$$

練習問題 3

AR(1) モデルのインパルス応答関数は、任意の s について、

$$a_1^s$$

となる(導出は 15.2.2 節参照)。

半減期は「ショックの影響が半減するまでに要する期間」と定義される¹。

1 単位のショックの影響が半減するのに要する期間は、

$$a_1^s = 0.5$$

となる s であるから、上式の s が半減期となる。上式の対数をとると、

$$s \times \ln(a_1) = \ln(0.5)$$

となり、これを s について解けば、半減期が、次のように求められる。

$$s = \frac{\ln(0.5)}{\ln(a_1)}$$

たとえば、 $a_1 = 0.85$ の場合、半減期は次のように 4.26 期となる。

$$s = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.85)} = 4.26$$

練習問題 5

日次データであれば、東京市場と NY 市場との間にある時差を用いて、除外制約が正当化できる。しかし、月次データであれば、そうした時差に意味はない。

むしろ、NY 市場は世界最大の市場であること、東京市場はアジアで有力な市場に過ぎないことを考えると、ダウ平均株価が外生的とした方がよいだろう。つまり、ダウ平均株価の変化率(%)を Y_t 、日経平均株価の変化率(%)を X_t とし、ダウ平均 Y_t は同月の日経平均 X_t から影響を受けないとする ($b_{10} = 0$)。

ただし、日経平均から同月のダウ平均への影響は弱いとしても 0 であること ($b_{10} = 0$) を正当化するのは難しいだろう。個人的には、月次データでは、除外制約を正当化するのは難しいと思う。

練習問題 5

構造 VAR は、次のようになる。

¹ 半減期は、放射能の測定でも用いられる。東京都観光局のウェブサイトによると、「放射性物質は、壊変(崩壊)を繰り返し、最終的に安定した物質へ変化すると放射線を放出しなくなります。壊変によって始めの放射性物質の数が半分になるまでの時間を半減期といい、放射能は、時間がたつにつれて弱まっていきます」とあります。

$$Y_t = a_{11}Y_{t-1} + b_{10}X_t + b_{11}X_{t-1} + \varepsilon_{Yt}$$

$$X_t = a_{20}Y_t + a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + \varepsilon_{Xt}$$

ここで、 ε_{Yt} 、 ε_{Xt} は構造ショックとなる。

X_t の式を、 Y_t の式に代入すると、

$$Y_t = a_{11}Y_{t-1} + b_{10}(a_{20}Y_t + a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + \varepsilon_{Xt}) + b_{11}X_{t-1} + \varepsilon_{Yt}$$

となる。これを整理すると

$$(1 - b_{10}a_{20})Y_t = (a_{11} + b_{10}a_{21})Y_{t-1} + (b_{10}b_{21} + b_{11})X_{t-1} + b_{10}\varepsilon_{Xt} + \varepsilon_{Yt}$$

となり、両辺を $(1 - b_{10}a_{20})$ で割ると、

$$Y_t = \frac{a_{11} + b_{10}a_{21}}{1 - b_{10}a_{20}}Y_{t-1} + \frac{b_{10}b_{21} + b_{11}}{1 - b_{10}a_{20}}X_{t-1} + \frac{b_{10}\varepsilon_{Xt} + \varepsilon_{Yt}}{1 - b_{10}a_{20}}$$

となる。これは誘導型の VAR である。誘導型の誤差項 u_{Yt} は次のようになる。

$$u_{Yt} = \frac{b_{10}\varepsilon_{Xt} + \varepsilon_{Yt}}{1 - b_{10}a_{20}} = \frac{b_{10}}{1 - b_{10}a_{20}}\varepsilon_{Xt} + \frac{1}{1 - b_{10}a_{20}}\varepsilon_{Yt}$$

次に、 Y_t の式を、 X_t の式に代入すると、同様の計算により、

$$X_t = a_{20}(a_{11}Y_{t-1} + b_{10}X_t + b_{11}X_{t-1} + \varepsilon_{Yt}) + a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + \varepsilon_{Xt}$$

となり、整理すると、

$$X_t = \frac{a_{20}a_{11} + a_{21}}{1 - b_{10}a_{20}}Y_{t-1} + \frac{a_{20}b_{11} + b_{21}}{1 - b_{10}a_{20}}X_{t-1} + \frac{a_{20}\varepsilon_{Yt} + \varepsilon_{Xt}}{1 - b_{10}a_{20}}$$

となる。これは誘導型の VAR であり、誘導型の誤差項 u_{Xt} は次のようになる。

$$u_{Xt} = \frac{a_{20}\varepsilon_{Yt} + \varepsilon_{Xt}}{1 - b_{10}a_{20}} = \frac{a_{20}}{1 - b_{10}a_{20}}\varepsilon_{Yt} + \frac{1}{1 - b_{10}a_{20}}\varepsilon_{Xt}$$

誘導型の誤差項(u_{Yt}, u_{Xt})は、構造ショック($\varepsilon_{Yt}, \varepsilon_{Xt}$)の線形関数であり、それ自体が何を意味しているか分からないという問題がある²。

説明変数として、変数のラグから構成される VAR は誘導 VAR と呼ばれる。予測においては、個々の誤差項の解釈に興味はないため、誘導 VAR を用いて問題はない。しかし、経済的解釈に関心があるならば、構造 VAR を用いるこ

² そもそも、構造型が真のモデルであるの対して、誘導型とは、ラグだけに依存するように構造型を書き換えたモデルとなる。このため、構造ショックが真のショックであり、誘導型の誤差項は、モデルを書き換えたことから生じた構造ショックの線形関数に過ぎない。誘導型の誤差項に経済的な意味はないことに注意してほしい。仮に政府支出の増加の影響を見たいなら、構造ショックが1単位増加した状況を考えるべきなのである。

とになり、構造ショックを識別するための何らかの仮定が必要となる。

練習問題 6 と練習問題 7

ウェブサイトから、再現に必要なデータと STATA の do file をダウンロードできる。STATA 再現コードは以下のとおり。

STATA の再現コード

```
use var_stockprice_data.dta
tsset time

** 15.3.2 節の推定結果
varsoc nikkei dow, maxlag(12)
reg nikkei l.nikkei l2.nikkei l3.nikkei l4.nikkei l.dow l2.dow l3.dow l4.dow, r
test l.dow l2.dow l3.dow l4.dow
reg dow l.nikkei l2.nikkei l3.nikkei l4.nikkei l.dow l2.dow l3.dow l4.dow, r
test l.nikkei l2.nikkei l3.nikkei l4.nikkei

**15.4 節の推定結果
var nikkei dow, lag(1 2 3 4)
irf create order, step(10) set(myirf) replace
irf graph oirf, irf(order) impulse(nikkei dow) response(dow nikkei)

**練習問題
reg nikkei l.nikkei l.dow , r
test l.dow
reg dow l.nikkei l.dow, r
test l.nikkei
var nikkei dow, lag(1)
irf create order, step(10) set(myirf) replace
irf graph oirf, irf(order) impulse(nikkei dow) response(dow nikkei)
```

① 最適なラグ次数を選ぶため、

```
varsoc nikkei dow, maxlag(12)
```

と入力する。ここで、maxlag(12)はラグの長さの最大数である。そうすると、以下の画面が出力される。

```
. varsoc nikkei dow, maxlag(12)
```

```
Selection-order criteria
Sample: 13 - 2132                                Number of obs   =    2120
```

lag	LL	LR	df	p	FPE	AIC	HQIC	SBIC
0	-6451.3				1.51024	6.08802	6.08998	6.09336
1	-6164.36	573.89	4	0.000	1.15643	5.82109	5.82696	5.83711*
2	-6153.62	21.482	4	0.000	1.1491	5.81473	5.82451*	5.84143
3	-6150.13	6.97	4	0.137	1.14966	5.81522	5.8289	5.85259
4	-6144.54	11.182	4	0.025	1.14793*	5.81372*	5.83131	5.86177
5	-6142.51	4.0675	4	0.397	1.15007	5.81557	5.83707	5.8743
6	-6140.46	4.099	4	0.393	1.15218	5.81741	5.84282	5.88682
7	-6139.16	2.595	4	0.628	1.15513	5.81996	5.84928	5.90004
8	-6138.23	1.8573	4	0.762	1.15848	5.82286	5.85609	5.91362
9	-6130.54	15.379*	4	0.004	1.15445	5.81938	5.85652	5.92082
10	-6126.09	8.9007	4	0.064	1.15396	5.81895	5.86	5.93107
11	-6123.38	5.415	4	0.247	1.15537	5.82017	5.86513	5.94297
12	-6120.41	5.9531	4	0.203	1.15649	5.82114	5.87	5.95461

ここで、AICは2を、BICは1を選択している(BICはSBICとも呼ばれる)。p=4

として、被説明変数を日経平均nikkeiとしたVARモデルを推定すると、

```
reg nikkei l.nikkei l2.nikkei l3.nikkei l4.nikkei l.dow l2.dow l3.dow l4.dow, r
test l.dow l2.dow l3.dow l4.dow
```

となる。また、ダウ平均からの予測ができるかをF検定するため、testコマンドを使っている。

② インパルス応答関数は、次のようにすればよい。

```
var nikkei dow, lag(1 2 3 4)
irf create order, step(10) set(myirf) replace
irf graph oirf, irf(order) impulse(nikkei dow) response(dow nikkei)
```

irf create はインパルス応答関数を作るためのコマンドであり、orderは除外制約を意味する。ここで、var nikkei dowと並べているので、ダウ平均は、同日の日経平均へ影響しないと仮定している。step(10)は、10期先まで計算することを意味する。

③ ラグの長さをp=1とするケースは、コードにあるとおりに推定すればよい。