2024/04/12

藪友良

第 13 章の答え

練習問題 1

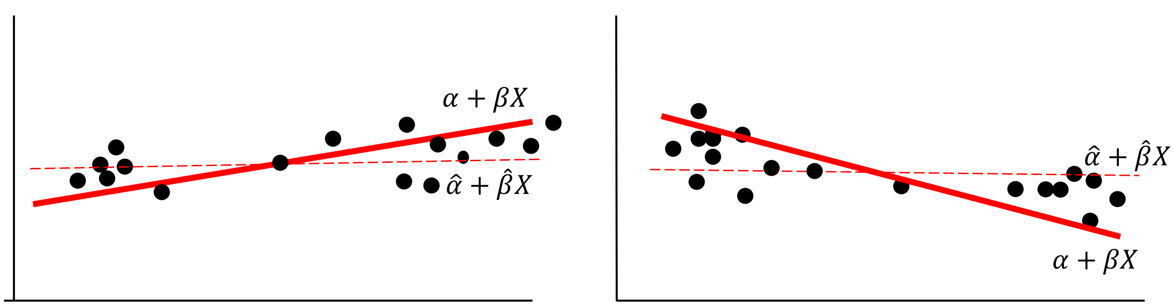
$\beta > 0$としよう。下図(a)では、真の関係$(\alpha + \beta X)$を実線、回帰直線(当てはまりの良い線)を点線で表した。このとき、測定誤差e_iが大きくなると、説明変数X_iは大きくなる一方、誤差項$u_i = u_i^* - \beta e_i$は小さくなる。つまり、X_iとu_iに負の相関が生じる。X_iとu_iに負の相関があるため、X_iが大きいと、u_iは小さく(負の値をとる)なり、観測点は実線の下で観察される。逆に、X_iが小さいと、u_iは大きく(正の値をとる)なり、観測点は実線の上で観察される。このため、回帰直線は傾きがゆるやかになる傾向がある(βの推定量は負のバイアスを持つ)。

逆に、$\beta < 0$としよう(下図(b)参照)。このとき、測定誤差e_iが大きくなると、説明変数X_iと誤差項$u_i = u_i^* - \beta e_i$はともに大きくなる。つまり、X_iとu_iに正の相関がある。ここでX_iとu_iに正の相関があるため、X_iが大きいと、u_iは大きく(正の値をとる)なり、観測点は実線の上で観察される。逆に、X_iが小さいと、u_iは小さく(負の値をとる)なり、観測点は実線の下で観察される。このため、βの推定量は正のバイアスを持つ。

これまでの結果をまとめると、$\beta > 0$なら負のバイアス($\hat{\beta} < \beta$)、$\beta < 0$なら正のバイアス($\hat{\beta} > \beta$)であり、係数は 0 方向へバイアスがあるといえる。

図：内生性とバイアスの関係

(a) $\boldsymbol{\beta > 0}$の場合　　**(b)$\boldsymbol{\beta < 0}$の場合**



なお、図をみると、内生性があると、OLS 推定では係数$\hat{\beta}$だけでなく、定数項$\hat{\alpha}$にもバイアスが生じていることがわかる。この結果は重回帰分析においても当てはまる。つまり、説明変数のうち 1 つでも内生性があれば、OLS 推定

では、すべての係数や定数項にバイアスが生じるといえる。大事な点なので覚えておいて欲しい。

練習問題 2

$Y_i = Y_i^* + e_i$を書き換えると、$Y_i^* = Y_i - e_i$となる。これを、$Y_i^* = \alpha + \beta X_i + u_i^*$の式に代入すると、

$$Y_i - e_i = \alpha + \beta X_i + u_i^*$$

となり、さらに書き換えると、

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + (u_i^* + e_i)$$

となる。新しい誤差項を$u_i = u_i^* + e_i$と定義すると、Y_iとX_iには次の関係がある。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

仮定から、説明変数X_iは、u_i^*やe_iと無相関である。したがって、X_iは新しい誤差項$u_i = u_i^* + e_i$と無相関であり、内生性の問題は生じない[1]。このため、OLS 推定量を用いても、係数βの推定にバイアスは生じない。

練習問題 3

このモデルを次のように書き換える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i^*$$

$$u_i^* = \gamma W_i + u_i$$

ただし、X_iは内生変数であり、元の式における誤差項u_iと相関している。

(a) Z_iとW_iが無相関ならば、操作変数Z_iと誤差項$u_i^* = \gamma W_i + u_i$は無相関となり、欠落変数がある状況であっても、Z_iは「操作変数の条件②(操作変数の外生性)」を満たす。このため、2SLS にバイアスは生じない。

(b) Z_iとW_iが相関するならば、操作変数Z_iと誤差項$u_i^* = \gamma W_i + u_i$は相関するため、欠落変数がある状況では、Z_iは「操作変数の条件②(操作変数の外生性)」を満たさない。このため、2SLS にバイアスが生じる。

[1] 仮に測定誤差e_iが説明変数X_iと相関していれば、OLS 推定量は一致性を持たない。通常、この練習問題と同様、測定誤差e_iは説明変数と無相関と仮定される。

練習問題 4

第 1 段階では、次の式を推定する。

$$X_i = \gamma_0 + \gamma_1 Z_{1i} + \gamma_2 Z_{2i} + \gamma_3 W_{1i} + \gamma_4 W_{2i} + e_i$$

操作変数の条件①は、仮説を次のようにした F 検定によって確認できる。

$$H_0: \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 0$$

$$H_1: \text{帰無仮説} H_0 \text{が誤りである}$$

F 値が 10 を下回ると操作変数の条件①が満たされない可能性がある。

練習問題 5

操作変数としては、ルームメートがランダムに決まっていることを利用すればよい。たとえば、操作変数Z_iを、ルームメートがゲーム機を持ち込んだら 1、持ち込まなかったら 0 となるダミー変数としよう[2]。部屋の割り振りはランダムであるため、操作変数Z_iは誤差項u_iと無相関となる。また、ゲーム機が持ち込まれると勉強時間は減るため、Z_iとX_iは相関するだろう。

練習問題 6

(a) 誤差項は$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$となるため、$u_{t-1}$が変化すると$u_t$が変化する。また、$t-1$期には、次の関係があるため、$u_{t-1}$が変化すると$Y_{t-1}$も変化する。

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta Y_{t-2} + \gamma W_{t-1} + u_{t-1}$$

以上から、u_tとY_{t-1}は相関しており、内生性の問題が生じる。

(b) $t-1$期には、$Y_{t-1} = \alpha + \beta Y_{t-2} + \gamma W_{t-1} + u_{t-1}$が成立するため、

$$\begin{aligned} Y_t - \rho Y_{t-1} &= (\alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma W_t + u_t) - \rho(\alpha + \beta Y_{t-2} + \gamma W_{t-1} + u_{t-1}) \\ &= \alpha(1-\rho) + \beta Y_{t-1} - \rho\beta Y_{t-2} + \gamma W_t - \rho\gamma W_{t-1} + (u_t - \rho u_{t-1}) \end{aligned}$$

となる。ここで、$\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$であり、左辺の$\rho Y_{t-1}$を右辺に移項させると、

$$Y_t = \alpha(1-\rho) + (\rho + \beta) Y_{t-1} - \rho\beta Y_{t-2} + \gamma W_t - \rho\gamma W_{t-1} + \varepsilon_t$$

となる。右辺にある説明変数はY_{t-1}、Y_{t-2}、W_t、W_{t-1}であり、モデルは

$$Y_t = \alpha^* + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \beta_3 W_t + \beta_4 W_{t-1} + \varepsilon_t$$

[2] この操作変数に関心がある方は、以下の論文を参照されたい。Stinebrickner, Ralph Stinebrickner and Todd R. Stinebrickner. (2008)"The Causal Effect of Studying on Academic Performance," *The B.E. Journal of Economic Analysis and Policy*, 8(1) (Frontiers), Article 14, 1-53.

と表せる。ただし、パラメータは次のように定義される。

$$\alpha^* = \alpha(1-\rho)、\beta_1 = \rho+\beta、\beta_2 = -\rho\beta、\beta_3 = \gamma、\beta_4 = -\rho\gamma$$

ここで、誤差項は$\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$であるから、誤差項$\varepsilon_t$は全ての説明変数と無相関になる。

練習問題 7

2SLS の第 1 段階では、被説明変数をXとし、説明変数をZとした OLS 推定をする。そして、Xの予測値を$\hat{X}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 Z_i$とする。ただし、$\hat{\gamma}_1$は、次のようになる (2.3.1 節参照)。

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}$$

2SLS の第 2 段階では、被説明変数をY_iとし説明変数を$\hat{X}_i$とした OLS 推定することで、係数 β を推定する。このとき、2SLS 推定量$\hat{\beta}_{2SLS}$は次のようになる。

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \bar{\hat{X}})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \bar{\hat{X}})^2}$$

ただし、$\bar{\hat{X}}$は、$\hat{X}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 Z_i$の標本平均、つまり、

$$\bar{\hat{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 Z_i) = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \bar{Z}$$

となる。よって、偏差$\hat{X}_i - \bar{\hat{X}}$は次のようになる。

$$\hat{X}_i - \bar{\hat{X}} = (\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 Z_i) - (\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \bar{Z}) = \hat{\gamma}_1 (Z_i - \bar{Z})$$

ここで、$\hat{\beta}_{2SLS}$の式に、$\hat{X}_i - \bar{\hat{X}} = \hat{\gamma}_1 (Z_i - \bar{Z})$を代入すると、次のようになる。

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\hat{X}_i - \bar{\hat{X}}\right)(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n \left(\hat{X}_i - \bar{\hat{X}}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\gamma}_1 (Z_i - \bar{Z})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n \hat{\gamma}_1^2 (Z_i - \bar{Z})^2} = \frac{1}{\hat{\gamma}_1}\frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}$$

さらに、$\hat{\gamma}_1 = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(X_i - \bar{X}) / \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$を代入すると、

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \left\{\frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(X_i - \bar{X})}\right\}\frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(X_i - \bar{X})}$$

最後に、偏差の和が 0 という性質($\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) = 0$、$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$)を用いると、2SLS 推定量$\hat{\beta}_{2SLS}$は、次のようになる。

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(X_i - \bar{X})} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i (Y_i - \bar{Y}) - \bar{Z}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n Z_i (X_i - \bar{X}) - \bar{Z}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n Z_i (X_i - \bar{X})}$$

練習問題 8

練習問題 7 の結果から、2SLS 推定量$\hat{\beta}_{2SLS}$は、

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} Z_i(X_i - \bar{X})}$$

となる。ここでは、分子と分母の別表現を、それぞれ求める。

分子の別表現: 分子は、次のように表現できる

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i(Y_i - \bar{Y}) = \left(1 - \frac{n_1}{n}\right) n_1(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0)$$

ただし、$\bar{Y}_1$は$Z_i = 1$のときのYの平均、$\bar{Y}_0$は$Z_i = 0$のときのYの平均となる。

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} Y_i \qquad \bar{Y}_0 = \frac{1}{n - n_1}\sum_{i=n_1+1}^{n} Y_i$$

[証明] この別表現が正しいことを確認しよう。分子は、

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n_1} Z_i(Y_i - \bar{Y}) + \underbrace{\sum_{i=n_1+1}^{n} Z_i(Y_i - \bar{Y})}_{=0} = \sum_{i=1}^{n_1}(Y_i - \bar{Y})$$

となる。式展開では、$i = 1,2,\ldots,n_1$なら$Z_i = 1$、$i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$なら$Z_i = 0$となることを用いた。さらに右辺は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{n_1}(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n_1} Y_i - n_1\bar{Y} = n_1\bar{Y}_1 - n_1\bar{Y}$$

ここで、標本平均$\bar{Y}$は次のように分解できる。

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n_1} Y_i + \sum_{i=n_1+1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}(n_1\bar{Y}_1 + (n - n_1)\bar{Y}_0)$$

この式を、$\sum_{i=1}^{n_1}(Y_i - \bar{Y}) = n_1\bar{Y}_1 - n_1\bar{Y}$の式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_1}(Y_i - \bar{Y}) &= n_1\bar{Y}_1 - n_1\left\{\frac{1}{n}(n_1\bar{Y}_1 + (n - n_1)\bar{Y}_0)\right\} \\
&= n_1\bar{Y}_1 - \frac{n_1}{n}n_1\bar{Y}_1 - \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)n_1\bar{Y}_0 \\
&= \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)n_1\bar{Y}_1 - \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)n_1\bar{Y}_0 \\
&= \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)n_1(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0)
\end{aligned}$$

分母の別表現：分母は、次のように表現できる。

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i(X_i - \bar{X}) = \left(1 - \frac{n_1}{n}\right) n_1(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)$$

ただし、$\bar{X}_1$は$Z_i = 1$のときのXの平均、$\bar{X}_0$は$Z_i = 0$のときのXの平均とする。

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i \qquad \bar{X}_0 = \frac{1}{n - n_1}\sum_{i=n_1+1}^{n} X_i$$

[証明] この別表現が正しいことを確認しよう。分母は、

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i(X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n_1} Z_i(X_i - \bar{X}) + \underbrace{\sum_{i=n_1+1}^{n} Z_i(X_i - \bar{X})}_{=0} = \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})$$

となる。さらに右辺は、

$$\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X}) = n_1\bar{X}_1 - n_1\bar{X}$$

となり、これに

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(n_1\bar{X}_1 + (n - n_1)\bar{X}_0)$$

を代入すると、分母は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X}) = n_1\bar{X}_1 - n_1\left\{\frac{1}{n}(n_1\bar{X}_1 + (n - n_1)\bar{X}_0)\right\}$$
$$= \left(1 - \frac{n_1}{n}\right) n_1(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)$$

分子と分母の別表現を代入する:

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} Z_i(X_i - \bar{X})} = \frac{\left(1 - \frac{n_1}{n}\right) n_1(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0)}{\left(1 - \frac{n_1}{n}\right) n_1(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)} = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0}{\bar{X}_1 - \bar{X}_0}$$

上式の意味を考えよう。まず、$\bar{X}_0$は$Z_i = 0$のときのXの平均、$\bar{X}_1$は$Z_i = 1$のときのXの平均であるため、分母は「Zが 0 から 1 に変化したとき、Xの平均がどれぐらい変化したか」を表す。同様に、分子は、「Zが 0 から 1 に変化したとき、Yの平均がどれぐらい変化したか」を表す。まとめると、2SLS 推定量$\hat{\beta}_{2SLS}$は次のように解釈できる。

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \frac{Zが変化したときのYの平均の変化}{Zが変化したときのXの平均の変化}$$

練習問題 9、10

ウェブサイトにデータと再現に必要なコードが掲載されている。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

こちらは初版(第 1 刷)には掲載されていない新しい問題になります。

練習問題 11、12、13

練習問題 11★　内生性の有無を検証する方法を述べよ。Hint: ハウスマン検定

練習問題 12　★　効果の異質性を考慮したモデル$Y_i = \alpha_i + \beta_i X_i + u_i$を考えよう。

(a) X_iに内生性の問題はないとし、パラメータ(α_i、β_i)はX_iと独立な確率変数としよう。nが大きくなると、OLS 推定量$\hat{\beta}$は$E[\beta_i]$に収束することを示せ。Hint: nが大きくなると、標本分散と標本共分散は、それぞれ分散と共分散に収束する(『入門　実践する統計学』(巻末参考文献[5])の 5.3 節参照)。

(b) X_iに内生性の問題があるとする。また、操作変数Z_iに対する反応度にも異質性があるとしよう。

$$X_i = c_i + \gamma_i Z_i + e_i$$

ここで、Z_iはダミー変数とし、パラメータ(α_i、β_i、c_i、γ_i)はZ_iと独立な確率変数とする。nが大きくなると、2 段階最小 2 乗推定量$\hat{\beta}_{2SLS}$は次の値に収束することを示せ。

$$\frac{E[\gamma_i \beta_i]}{E[\gamma_i]}$$

また、この式が何を意味しているかを述べよ。

Hint: nが大きくなると、平均は期待値に収束する(『入門　実践する統計学』(巻末参考文献[5])の 5.2 節参照)。このため、推定量$\hat{\beta}_{2SLS}$は次式で表せる(練習問題 8 参照)。

$$\frac{E[Y_i|Z_i = 1] - E[Y_i|Z_i = 0]}{E[X_i|Z_i = 1] - E[X_i|Z_i = 0]}$$

なお、$E[Y_i|Z_i=1]$は$Z_i=1$のときのY_iの期待値、$E[Y_i|Z_i=0]$は$Z_i=0$のときのY_iの期待値である(X_iの期待値も同様に定義される)。

練習問題 13　★　パネル分析において、次のモデルを考える。

$$Y_{i,t}=\alpha+\beta X_{i,t}+\theta W_i+Z_i+u_{i,t}$$

このとき、個別要因Z_iを考慮しながら、パラメータ$(\beta、\theta)$を推定したい。ここで、誤差項は$Z_i+u_{i,t}$としよう。なお、$X_{i,t}$とW_iは$u_{i,t}$と無相関とし、Z_iは$X_{i,t}$と相関するがW_iとは無相関とする(つまり、W_iは外生変数だが、$X_{i,t}$は内生変数となる)。パラメータを推定する方法を述べよ。Hint: 操作変数を用いた 2 段階最小 2 乗法を用いる。

<u>練習問題 11、12、13 の答え</u>

<u>練習問題 11 の答え</u>

　OLS 推定量は、説明変数に内生性がなければ一致性は満たされる一方、内生性があれば一致性は満たされない。これに対し、2SLS 推定量は、内生性の有無に関係なく一致性を満たす。教科書では、OLS 推定量と 2SLS 推定量の結果を比較することで、OLS 推定量に、どれぐらいのバイアスが生じているかを確認した(例 13-2、例 13-3 参照)。これは 2 つの推定結果の差が小さければ、内生性は生じていない可能性を示唆している。以下では、これを厳密に行うハウスマン検定(Hausman test)を紹介する(11 章では、ハウスマン検定をモデル選択に用いた)[3]。

---

[3] 同じ検定を、コントロール関数を用いて行うこともできる。モデルは$Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$、$X_i=\gamma_0+\gamma_1 Z_i+e_i$としよう。操作変数の条件②によって、$Z_i$は$u_i$と無相関となる。内生性の有無は、$u_i$と$e_i$が相関しているかで判断される。$u_i$と$e_i$が相関したら(関係式$X_i=\gamma_0+\gamma_1 Z_i+e_i$から)、$u_i$と$X_i$も相関する(内生性あり)。これを確認するため、$u_i=\theta e_i+\varepsilon_i$と定義しよう($\theta=E[u_i e_i]/E[e_i^2]$とする)。$u_i$は、$X_i$と相関する部分($\theta e_i$)、相関しない部分($\varepsilon_i$)に分解される。$\theta\neq 0$なら内生性あり、$\theta=0$なら内生性なしとなる。コントロール関数は、$Y_i$の式に$u_i=\theta e_i+\varepsilon_i$を代入することで、

$$Y_i=\alpha+\beta X_i+\theta e_i+\varepsilon_i$$

と定義される。なお、e_iとε_iは無相関となる(これは$\theta=E[u_i e_i]/E[e_i^2]$に注意すると、$E[e_i\varepsilon_i]=E[e_i(u_i-$

この検定では、仮説を次のように設定する。

帰無仮説H_0：説明変数に内生性が存在しない

対立仮説H_1：説明変数に内生性が存在する

帰無仮説が正しいもとで、OLS 推定量と 2SLS 推定量の差は 0 に近い値をとる。

$$\text{OLS 推定量} - \text{2SLS 推定量} \approx 0$$

しかし、対立仮説が正しいもとで、この差は 0 から乖離するだろう。したがって、この差が十分に大きいとき、帰無仮説は棄却される。こうしたハウスマン検定は、Durbin-Wu-Hausman 検定、Wu-Hausman 検定とも呼ばれる[4]。

練習問題 12 の答え

(a) このモデルでは、定数項や係数は個人によって異なる。たとえば、賃金をY_i、教育年数

をX_iとしよう。教育の効果β_iは、個人の属性(才能など)によって異なる可能性がある。こうした効果の異質性がある場合、OLS 推定量は

$$E[\beta_i]$$

となる。これは、OLS 推定量が平均効果であることを意味している。

OLS 推定量は$E[\beta_i]$となることを確認しよう。n が大きくなると、標本平均が期待値に収束するように、標本分散は分散に、標本共分散は共分散に収束する。このため、n が大きくなると、OLS 推定量は次のようになる。

$\theta e_i)] = E[u_i e_i] - \theta E[e_i^2] = 0$と確認できる)。また、$X_i$と$\varepsilon_i$も無相関である($\varepsilon_i$は、$X_i$と相関しない部分である)。ただし、$e_i$は観察できないため、$X_i = \gamma_0 + \gamma_1 Z_i + e_i$を OLS 推定して得られた残差$\hat{e}_i$を用いる。つまり、被説明変数を$Y_i$とし、説明変数を$X_i$と$\hat{e}_i$とした OLS 推定によって、パラメータをバイアスなく推定できる。内生性の有無は、帰無仮説H_0: $\theta = 0$、対立仮説H_1:$\theta \neq 0$とした検定によって確認できる。

[4] なお、Y を被説明変数、X1 を外生変数、X2 を内生変数、Z を操作変数とすると、Stata では、ivregress 2sls Y X1 (X2=Z), r の後に estat endogenous と入力することで、F検定の結果が Robust regression F として出力される。帰無仮説が採択されたら、内生性の問題が無かった(小さかった)ということで、棄却されたら、内生性の問題が生じている、と判断される。

$$\frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \to \frac{Cov(Y_i,X_i)}{Var(X_i)}$$
$$= \frac{Cov(\alpha_i+\beta_i X_i+u_i,X_i)}{Var(X_i)}$$
$$= E[\beta_i]$$

式展開では、X_iはα_i、β_i、u_iとは独立であるため、

$$Cov(\alpha_i+\beta_i X_i+u_i,X_i)=E[\beta_i]Var(X_i)$$

となることを用いた[5]。

(b) この問題では、効果の異質性が考慮されており、パラメータはすべて i によって異なる。

$$Y_i=\alpha_i+\beta_i X_i+u_i$$
$$X_i=c_i+\gamma_i Z_i+e_i、$$

$X_i=c_i+\gamma_i Z_i+e_i$から、$Z_i=1$なら$X_i=c_i+\gamma_i+e_i$となり、$Z_i=0$なら$X_i=c_i+e_i$となる。よって、X_iの期待値は、それぞれ次のようになる[6]。

$$E[X_i|Z_i=1]=E[c_i]+E[\gamma_i]$$
$$E[X_i|Z_i=0]=E[c_i]$$

また、$X_i=c_i+\gamma_i Z_i+e_i$を代入すると、Y_iは次式となる。

$$Y_i=\alpha_i+\beta_i(c_i+\gamma_i Z_i+e_i)+u_i$$
$$=\alpha_i+\beta_i c_i+\beta_i\gamma_i Z_i+u_i+\beta_i e_i$$

つまり、$Z_i=1$なら$Y_i=\alpha_i+\beta_i c_i+\beta_i\gamma_i+u_i+\beta_i e_i$となり、$Z_i=0$なら$Y_i=\alpha_i+\beta_i c_i+u_i+\beta_i e_i$となる。よって、期待値はそれぞれ次のようになる。

$$E[Y_i|Z_i=1]=E[\alpha_i]+E[\beta_i c_i]+E[\beta_i\gamma_i]$$
$$E[Y_i|Z_i=0]=E[\alpha_i]+E[\beta_i c_i]$$

以上から、サンプルサイズが大きいとき、2SLS 推定量は

$$\frac{E[Y_i|Z_i=1]-E[Y_i|Z_i=0]}{E[X_i|Z_i=1]-E[X_i|Z_i=0]}=\frac{(E[\alpha_i]+E[\beta_i c_i]+E[\beta_i\gamma_i])-(E[\alpha_i]+E[\beta_i c_i])}{(E[c_i]+E[\gamma_i])-(E[c_i])}=\frac{E[\gamma_i\beta_i]}{E[\gamma_i]}$$

---

5 $Cov(\alpha_i+\beta_i X_i+u_i,X_i)=E[(\alpha_i+\beta_i X_i+u_i-E[\alpha_i+\beta_i X_i+u_i])(X_i-E[X_i])]$
$=E[(\alpha_i-E[\alpha_i])(X_i-E[X_i])]+E[(\beta_i X_i-E[\beta_i X_i])(X_i-E[X_i])]+E[(u_i-E[u_i])(X_i-E[X_i])]$
$=E[(\beta_i X_i-E[\beta_i X_i])(X_i-E[X_i])]$
$=E[\beta_i X_i(X_i-E[X_i])]-E[\beta_i X_i]E[(X_i-E[X_i])]$
$=E[\beta_i X_i(X_i-E[X_i])]$
$=E[\beta_i]E[X_i(X_i-E[X_i])]$
$=E[\beta_i]Var((X_i)$

式展開では、X_iとβ_iが独立であるため、$E[\beta_i X_i(X_i-E[X_i])]=E[\beta_i]E[X_i(X_i-E[X_i])]$とした。

6 パラメータ(α_i、β_i、c_i、γ_i)はZ_iと独立であるため、$E[c_i|Z_i=1]=E[c_i]$、$E[\gamma_i|Z_i=1]=E[\gamma_i]$となる。

として表現できる。

この式の意味を考えてみよう。まず、効果の異質性がないとしよう(つまり、β_iは固定した値βをとる($\beta_i = \beta$)。このとき、β_iは固定した値βであるから、

$$\frac{E[\gamma_i \beta_i]}{E[\gamma_i]} = \frac{\beta E[\gamma_i]}{E[\gamma_i]} = \beta$$

となり、$\hat{\beta}_{2SLS}$は係数βを正しく推定できる[7]。

次に、効果の異質性がある状況を考える。ここで、確率変数γ_iにはn 通りの可能性があり、それぞれ$1/n$の確率で生じるとしよう。このとき、次式が成立する。

$$E[\gamma_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i = \bar{\gamma}$$

$$E[\gamma_i \beta_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \beta_i$$

したがって、$\hat{\beta}_{2SLS}$は次式となる。

$$\frac{E[\gamma_i \beta_i]}{E[\gamma_i]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}}\beta_i$$

これは、係数β_iを加重$\gamma_i/\bar{\gamma}$を用いて平均した加重平均値となる。加重は、操作変数に対する反応度γ_iが大きいほど大きくなる。つまり、$\hat{\beta}_{2SLS}$は、遵守者(操作変数に対して強く反応する人)に対する平均効果といえる。

これは操作変数を変えると、$\hat{\beta}_{2SLS}$が変化する可能性を示唆している。操作変数が 2 つあるとき(Z_1、Z_2)、各操作変数に対するX_iの反応度γ_iは異なるため、$\hat{\beta}_{2SLS}$は、どの操作変数を用いるかで値が異なるだろう。たとえば、教育年数X_iが賃金Y_iに与える影響に関心があるとしよう。操作変数Z_1は、女性進学希望者にランダムに割り当てられる奨学金のダミー変数とする(対象者なら 1 となり、非対象者なら 0 となる)。同様に、Z_2は男性進学希望者にランダムに割り当てられる奨学金のダミー変数とする。このとき、操作変数Z_1を用いた 2SLS 推定では、女性に対する教育の平均効果が推定される一方、操作変数Z_2を用いると、男性に

---

[7] 操作変数に対する反応度が同じであると(γ_iは固定した値γである)、

$$\frac{E[\gamma_i \beta_i]}{E[\gamma_i]} = \frac{\gamma E[\beta_i]}{\gamma} = E[\beta_i]$$

となり、$\hat{\beta}_{2SLS}$は平均効果を推定することができる。

対する教育の平均効果が推定される。

練習問題 13 の答え

固定効果モデルは、説明変数と個別効果の相関を許容したが、時間を通じて一定の変数はすべて個別効果に含まれ、その係数が推定できない問題がある。これに対し、変量効果モデルは、説明変数と個別効果は無相関と仮定しているが、時間を通じて一定の変数の係数が推定できるという利点がある。時間を通じて一定の変数に関心があるとき、固定効果モデルを用いることができない一方、変量効果モデルは非現実的な仮定を課しているため、その使用には問題がある。この練習問題では、個別効果を考慮しながら、時間を通じて一定の変数の係数を推定する方法であるテイラー=ハウスマン法を学習する。

11.2 節の(3)式では、$Y_{i,t} = \alpha + \beta X_{i,t} + Z_i + u_{i,t}$とした。これに時間を通じて一定の変数$W_i$を加えると、練習問題で与えられた式となる。

$$Y_{i,t} = \alpha + \beta X_{i,t} + \theta W_i + Z_i + u_{i,t}$$

モデルの誤差項は、$Z_i + u_{i,t}$となる。説明変数($X_{i,t}$、W_i)は$u_{i,t}$と無相関である。また、個別効果を構成するZ_iは、固定効果と変量効果の間をとるものとする。具体的には、Z_iは$X_{i,t}$と相関するが、Z_iはW_iとは無相関とする。

これらの仮定より、W_iは外生変数であるが、$X_{i,t}$は内生変数となる。まず、$X_{i,t}$はZ_iと相関しているため、$X_{i,t}$からZ_iと相関している部分をすべて取り除く。具体的には、被説明変数を$X_{i,t}$とし、説明変数をN個のダミー変数$(D1_i, D2_i, \ldots, DN_i)$とした OLS 推定を行う(ダミー変数は 11.3.1 節参照)。得られた残差$\dot{X}_{i,t}$は、$X_{i,t}$と相関しているが、(個別要因が取り除かれているため)Z_iとは無相関となる。よって、操作変数を残差$\dot{X}_{i,t}$とした 2 段階最小 2 乗法を行うことで、パラメータ(βとθ)を推定することができる。