3/4/2024

藪友良

第 10 章の答え

練習問題 1

時系列データにおいて、誤差項が互いに相関していることを「系列相関がある」という。時系列データにおいては、系列相関がある状況が一般的であり、系列相関がない状況は特殊ケースとなる。

パネルデータには、時系列データの側面もあるため、系列相関が存在するのが一般的であり、系列相関がない状況は特殊ケースとなる。たとえば、県別パネルデータで、東京都のデータだけを考えると、これは時系列データとなる。

練習問題 2

OLS 推定量は不偏性と一致性を持つ。しかし、ガウス=マルコフの条件が満たされないため、OLS 推定量は有効ではない。また、OLS 推定量$\hat{\beta}$の分散は、

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{T\left\{\gamma_0 + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1-\frac{s}{T}\right)\gamma_s\right\}}{\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\}^2}$$

となる。ただし、パラメータγ_sは自己共分散であり、データにある系列相関の程度を表す。このため、通常の標準誤差ではなく、HAC 標準誤差を用いる。

練習問題 3

ここで$T=100$なら、$0.75 \times 100^{1/3} = 3.48$となり、バンド幅$m=3$が選択される。つまり、HAC 標準誤差は次のように計算できる。

$$\sqrt{100 \times \frac{\left\{\widehat{\gamma_0} + 2\sum_{s=1}^{2}\left(1-\frac{s}{3}\right)\widehat{\gamma_s}\right\}}{\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\}^2}} = \sqrt{100 \times \frac{\left\{\widehat{\gamma_0} + 2\left(\frac{2}{3}\widehat{\gamma_1} + \frac{1}{3}\widehat{\gamma_2}\right)\right\}}{\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\}^2}}$$

練習問題 4

ここで$T=500$なら、$0.75 \times 500^{1/3} = 5.95$となり、バンド幅$m=6$が選択される。つまり、HAC 標準誤差は次のように計算できる。

$$\sqrt{500\times\frac{\left\{\widehat{\gamma_0}+2\sum_{s=1}^{5}\left(1-\frac{s}{6}\right)\widehat{\gamma_s}\right\}}{\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\}^2}}=\sqrt{500\times\frac{\left\{\widehat{\gamma_0}+2\left(\frac{5}{6}\widehat{\gamma_1}+\frac{4}{6}\widehat{\gamma_2}+\frac{3}{6}\widehat{\gamma_3}+\frac{2}{6}\widehat{\gamma_4}+\frac{1}{6}\widehat{\gamma_5}\right)\right\}}{\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\}^2}}$$

練習問題 5

ここで$Y_t = \alpha+\beta X_t+u_t$から、$t-1$時点と$t-2$時点では、

$$Y_{t-1} = \alpha+\beta X_{t-1}+u_{t-1}$$

$$Y_{t-2} = \alpha+\beta X_{t-2}+u_{t-2}$$

が成立する。この関係式を使うと、

$$Y_t-\rho_1 Y_{t-1}-\rho_2 Y_{t-2}=(\alpha+\beta X_t+u_t)+\rho_1(\alpha+\beta X_{t-1}+u_{t-1})+\rho_2(\alpha+\beta X_{t-2}+u_{t-2})$$

$$= \alpha(1-\rho_1-\rho_2)+\beta(X_t-\rho_1 X_{t-1}-\rho_2 X_{t-2})+(u_t-\rho_1 u_{t-1}-\rho_2 u_{t-2})$$

となる。ここで、$u_t-\rho_1 u_{t-1}-\rho_2 u_{t-2}=\varepsilon_t$であるため、誤差項は標準的仮定を満たす。コクラン=オーカット法では、第 1 に、$Y_t = \alpha+\beta X_t+u_t$を OLS 推定し、得られた残差を用いて$\rho_1$と$\rho_2$を推定する。第 2 に、$\hat{\rho}_1$と$\hat{\rho}_2$を用いて、被説明変数を$Y_t-\hat{\rho}_1 Y_{t-1}-\hat{\rho}_2 Y_{t-2}$とし、説明変数を$1-\hat{\rho}_1-\hat{\rho}_2$、$X_t-\hat{\rho}_1 X_{t-1}-\hat{\rho}_2 X_{t-2}$とした定数項なしの OLS 推定をすれば、パラメータ(α,β)の推定ができる。

練習問題 6

練習問題 5 から、

$$Y_t-\rho_1 Y_{t-1}-\rho_2 Y_{t-2}= \alpha(1-\rho_1-\rho_2)+\beta(X_t-\rho_1 X_{t-1}-\rho_2 X_{t-2})+(u_t-\rho_1 u_{t-1}-\rho_2 u_{t-2})$$

となるので、上式左辺の$\rho_1 Y_{t-1}$、$\rho_2 Y_{t-2}$を右辺に移項すると、次式となる。

$$Y_t = \alpha(1-\rho_1-\rho_2)+\rho_1 Y_{t-1}+\rho_2 Y_{t-2}+\beta X_t-\rho_1\beta X_{t-1}-\rho_2\beta X_{t-2}+(u_t-\rho_1 u_{t-1}-\rho_2 u_{t-2})$$

ここで、

$$\alpha^*=\alpha(1-\rho_1-\rho_2)、$$

$$\beta_1=\rho_1、\beta_2=\rho_2、\beta_3=\beta、\beta_4=-\rho_1\beta、\beta_5=-\rho_2\beta$$

$$\varepsilon_t=u_t-\rho_1 u_{t-1}-\rho_2 u_{t-2}$$

と定義すれば、上式は次のようになる。

$$Y_t = \alpha^*+\beta_1 Y_{t-1}+\beta_2 Y_{t-2}+\beta_3 X_t+\beta_4 X_{t-1}+\beta_5 X_{t-2}+\varepsilon_t$$

このとき、誤差項はε_tであり、期待値 0、分散一定、自己共分散は 0 である。

練習問題 7

(a) 季節調整した系列Y_t'は、

$$Y_t' = \frac{1}{4}(Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3})$$

となる。ここで、上式に、$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$、$Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} + u_{t-1}$、$Y_{t-2} = \alpha + \beta X_{t-2} + u_{t-2}$、$Y_{t-3} = \alpha + \beta X_{t-3} + u_{t-3}$を代入すると、次のようになる。

$$Y_t' = \frac{1}{4}\{(\alpha + \beta X_t + u_t) + (\alpha + \beta X_{t-1} + u_{t-1}) + (\alpha + \beta X_{t-2} + u_{t-2}) + (\alpha + \beta X_{t-3} + u_{t-3})\}$$

$$= \alpha + \beta \frac{1}{4}(X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3}) + \frac{1}{4}(u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + u_{t-3})$$

$$= \alpha + \beta X_t' + u_t'$$

式展開では、以下の関係式を用いた。

$$X_t' = \frac{1}{4}(X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3})、u_t' = \frac{1}{4}(u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + u_{t-3})$$

(b) 新しい誤差項u_t'の期待値は、以下で示すとおり、0 となる。

$$E[u_t'] = \frac{1}{4}(E[u_t] + E[u_{t-1}] + E[u_{t-2}] + E[u_{t-3}]) = 0$$

ここで、$E[u_t] = E[u_{t-1}] = E[u_{t-2}] = E[u_{t-3}] = 0$を用いた。

新しい誤差項u_t'の分散は、標準的仮定 3(誤差項u_tの分散はσ^2である)と標準的仮定 4(誤差項u_tが相互に無相関である)を用いると、次のようになる。

$$E[u_t'^2] = E\left[\left(\frac{1}{4}(u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + u_{t-3})\right)^2\right] = \frac{1}{16}(E[u_t^2] + E[u_{t-1}^2] + E[u_{t-2}^2] + E[u_{t-3}^2])$$

$$= \frac{4\sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{4}$$

つまり、新しい誤差項u_t'の分散は、元モデルの誤差項u_tの分散σ^2の 1/4 になる。

(c) 新しい誤差項u_t'とu_{t-1}'との自己共分散は、標準的仮定 3 と標準的仮定 4 を用いると、次のようになる。

$$E[u_t'u_{t-1}'] = E\left[\left(\frac{1}{4}(u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + u_{t-3})\right)\left(\frac{1}{4}(u_{t-1} + u_{t-2} + u_{t-3} + u_{t-4})\right)\right]$$

$$\frac{1}{16}(E[u_{t-1}^2] + E[u_{t-2}^2] + E[u_{t-3}^2]) = \frac{3\sigma^2}{16}$$

同様に、u_t'とu_{t-2}'との自己共分散は、

$$E[u_t'u_{t-2}'] = E\left[\left(\frac{1}{4}(u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + u_{t-3})\right)\left(\frac{1}{4}(u_{t-2} + u_{t-3} + u_{t-4} + u_{t-5})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}(E[u_{t-2}^2] + E[u_{t-3}^2]) = \frac{2\sigma^2}{16}$$

となり、u_t'とu_{t-3}'との自己共分散は、

$$E[u_t'u_{t-3}'] = E\left[\left(\frac{1}{4}(u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + u_{t-3})\right)\left(\frac{1}{4}(u_{t-3} + u_{t-4} + u_{t-5} + u_{t-6})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}(E[u_{t-3}^2]) = \frac{\sigma^2}{16}$$

となる。時差がさらに広がると、自己共分散はすべて 0 となる。

(d) 元のモデルでは、誤差項に系列相関が無かったにも関わらず、季節調整を行うことで、新しい誤差項には系列相関が生じていることに注意してほしい。これは季節調整という人為的なデータ調整によって生じた系列相関である。

練習問題 8

10.2 節で学習したとおり、系列相関があっても、OLS 推定量$\hat{\beta}$は不偏性を満たしている。このため、OLS 推定量$\hat{\beta}$の一致性を証明するには、サンプルサイズTが大きくなると推定量$\hat{\beta}$の分散が 0 に収束することを示せばよい(この点は3.3.3 節を参照してほしい)。

系列相関があるとき、OLS 推定量$\hat{\beta}$の分散は次のようになる(10.3.1 節の(3)式を参照)。

$$E\left[\left(\hat{\beta} - \beta\right)^2\right] = T\frac{\left\{\gamma_0 + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1 - \frac{s}{T}\right)\gamma_s\right\}}{\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\}^2}$$

さらに分母と分子をT^2で割ると、推定量$\hat{\beta}$の分散は次式として表せる。

$$\frac{\frac{1}{T}\left\{\gamma_0+2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1-\frac{s}{T}\right)\gamma_s\right\}}{\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2/T\}^2}$$

ここで、$\hat{\beta}$の分散の分母は、X_tの標本分散（$\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2/T$）の 2 乗であり、また、標本分散はサンプルサイズTが大きくなると真の分散に収束する[1]。このため、$\hat{\beta}$の分散の分母は有限の値となることがわかる。

次に、$\hat{\beta}$の分散の分子の{ }内にある$\gamma_0+2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1-\frac{s}{T}\right)\gamma_s$は、有限の値をとると仮定されている[2]。したがって、これをTで割った分子は、サンプルサイズTが大きくなると、0 に収束していくことになる。

以上から、サンプルサイズTが大きくなると、推定量$\hat{\beta}$の分散は 0 に収束し、推定量$\hat{\beta}$は一致性を満たすことがわかる。

1 標本分散が真の分散に収束することは、たとえば、藪友良『入門　実践する統計学』(東洋経済新報社、2012 年)の 5.3.1 節の例 1 を参照されたい。

2 時差 s が大きくなると自己共分散は小さくなる傾向があるため(現在と遠い過去との関係は弱い)、サンプルサイズTが大きいとしても、$\gamma_0+2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1-\frac{s}{T}\right)\gamma_s$は有限の値になるとする仮定は、あまり問題がないといえよう。

練習問題 9

ウェブサイトから、再現に必要なデータと STATA の do file をダウンロードできる。STATA 再現コードは以下のとおり。

STATA の再現コード

```
use oil_data.dta
gen time = m(1987m6)+_n-1
tsset time, monthly

**変数の定義
gen oil = brent*spot
gen y=100*(ln(price)-ln(l.price))
gen x=100*(ln(oil)-ln(l.oil))
gen dx=x-l.x
gen d1 = (time == tm(2008m4))   /*暫定税率の影響を除くための一時的ダミー*/
gen d2 = (time == tm(2008m5))   /*暫定税率の影響を除くための一時的ダミー*/

reg y x l1.x l2.x d1 d2 if(time >= tm(2000m1)), r
scalar T = e(N) /*サンプルサイズ T*/
scalar m = round(0.75*T^(1/3)) /*バンド幅 m*/
display m
newey y x l1.x l2.x d1 d2 if(time >= tm(2000m1)), lag(5)
predict y_resid if(time >= tm(2000m1)), residuals
tsline y_resid if(time >= tm(2000m1))

prais y x l1.x l2.x d1 d2 if(time >= tm(2000m1)), corc twostep
```

このデータ、変数の定義に関しての説明は、6 章の練習問題の解答をみてほしい。

ここで、ロバスト標準誤差を用いた OLS 推定は以下のとおり。

reg y x l1.x l2.x d1 d2 if(time >= tm(2000m1)), r

そして、サンプルサイズを T と定義する。

```
scalar T = e(N)
```

display T とすれば、T=216 を確認できる。

HAC 標準誤差を求めたいなら、まずは、バンド幅を決める必要がある。これは、次のように入力すればよい。

```
scalar m = round(0.75*T^(1/3))
display m
```

ここで、バンド幅は m=5 なので、HAC 標準誤差を用いた OLS 推定は、

```
newey y x l1.x l2.x d1 d2 if(time >= tm(2000m1)), lag(5)
```

とすればよい。

コクラン=オーカット推定をしたいなら、

```
prais y x l1.x l2.x d1 d2 if(time >= tm(2000m1)), corc twostep
```

とすればよい。なお、繰り返しコクラン=オーカット推定をしたいなら、

```
prais y x l1.x l2.x D1 D2 if(time >= tm(2000m1)), corc
```

とすればよい。初期値の扱いが異なるプレイス=ウイステン法を実行したいなら、コマンドから corc を除けばよい。

****

初版(第 1 刷)には含まれていない練習問題。今後、追加する予定。

練習問題 10　★

(8)式が正しいとき、$V(u_1)=\sigma^2/(1-\rho^2)$となることを証明せよ。

<u>練習問題 10 の答え</u>

(8)式より、$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t$となります。ただし、$-1<\rho<1$、また、$\varepsilon_t$は期待値 0($E[\varepsilon_t]=0$)、分散一定($E[\varepsilon_t^2]=\sigma^2$)、系列相関なし($E[\varepsilon_t\varepsilon_s]=0$)とします。

$t=1$期において、

$$u_1=\rho u_0+\varepsilon_1$$

となり、上式に$u_0=\rho u_{-1}+\varepsilon_0$を代入すると、

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho(\rho u_{-1}+\varepsilon_0)+\varepsilon_1 \\ &= \rho^2 u_{-1}+\varepsilon_1+\ \rho\varepsilon_0 \end{aligned}$$

となり、さらに$u_{-1} = \rho u_{-2} + \varepsilon_{-1}$を代入すると、

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho^2(\rho u_{-2} + \varepsilon_{-1}) + \varepsilon_1 + \rho\varepsilon_0 \\ &= \rho^3 u_{-3} + \varepsilon_1 + \rho\varepsilon_0 + \rho^2\varepsilon_{-1} \end{aligned}$$

となります。こうした代入を無限回繰り返すと、u_1は次のように展開できます。

$$u_1 = \rho^\infty u_{-\infty} + \varepsilon_1 + \rho\varepsilon_0 + \rho^2\varepsilon_{-1} + \rho^3\varepsilon_{-2} + \rho^4\varepsilon_{-3} + \cdots$$

ここで$-1 < \rho < 1$であることに注意すると、$\rho^\infty u_{-\infty} = 0$となります。つまり、$u_1$は次のように表現できます。

$$u_1 = \varepsilon_1 + \rho\varepsilon_0 + \rho^2\varepsilon_{-1} + \rho^3\varepsilon_{-2} + \rho^4\varepsilon_{-3} + \cdots$$

このとき、u_1の期待値は、

$$E[u_1] = E[\varepsilon_1] + \rho E[\varepsilon_0] + \rho^2 E[\varepsilon_{-1}] + \rho^3 E[\varepsilon_{-2}] + \rho^4 E[\varepsilon_{-3}] + \cdots = 0$$

となり、分散は、次のように表せます。

$$\begin{aligned} V(u_1) = E[u_1^2] &= E[\varepsilon_1^2] + \rho^2 E[\varepsilon_0^2] + \rho^4 E[\varepsilon_{-1}^2] + \rho^6 E[\varepsilon_{-2}^2] + \rho^8 E[\varepsilon_{-3}^2] + \cdots \\ &= \sigma^2(1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \rho^8 + \cdots) = \sigma^2/(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

式展開では、無限級数の和の公式を用いました。無限級数の和の公式は、$|\theta| < 1$のとき、次式が成立するとしています[3]。

$$1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \cdots = \frac{1}{1 - \theta}$$

つまり、$\theta = \rho^2$と定義すると、$1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \cdots = 1/(1 - \rho^2)$になるわけです。

[3] 無限級数の和の公式を証明します。まず、Xを次のように定義します。

$$X = 1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \cdots + \theta^s$$

上式両辺にθを掛けると次式となります。

$$\theta X = \theta + \theta^2 + \theta^3 + \cdots + \theta^{s+1}$$

このため、$X - \theta X$は、次のようになります。

$$X - \theta X = (1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \cdots + \theta^s) - (\theta + \theta^2 + \theta^3 + \cdots + \theta^{s+1}) = 1 - \theta^{s+1}$$

さらに両辺を$(1 - \theta)$で割ると、次式となります(上式左辺は$X - \theta X = (1 - \theta)X$であることに注意すること)。

$$X = \frac{1 - \theta^{s+1}}{1 - \theta}$$

ここで、sが∞とすると、$|\theta| < 1$から$\theta^{s+1} = 0$となります。よって、$X = 1/(1 - \theta)$が証明できました。