

UC 分解

BN 分解は、ARIMA($p, 1, q$)過程を、トレンド成分と定常成分に分解するための便利な方法である。しかし、分解は、BN 分解以外にも存在する。(4.47)(4.48)式から、BN 分解では、トレンド成分と定常成分に完全な負の相関があるとした。実際、この結果は一般的な ARIMA($p, 1, q$)にもあてはまる。不規則要因を y_t とトレンド要因の差と定義することで、それぞれの誤差項部分の相関係数は -1 となる。しかし、これらの成分の各誤差項に完全な負の相関を仮定しなければならない理由はどこにもない。

この点を確認するため、第 1 節で導入されたドリフトとノイズを含むランダムウォーク $\Delta y_t = a_0 + \varepsilon_t + \Delta \eta_t$ を再考しよう。既に学習した通り、 y_t の解は

$$y_t = y_0 + a_0 t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i + \eta_t$$

と表せる。トレンドの確定的部分は $y_0 + a_0 t$ 、確率トレンドは $\sum \varepsilon_i$ 、ノイズ成分は η_t である。ここで $E[\varepsilon_i \eta_j] = 0$ の仮定から、確率トレンドとノイズ成分は無相関である。しかし、BN 分解では、トレンド成分の誤差項と不規則成分の誤差項の相関が -1 となる制約を課すため、これらの成分は誤って識別されてしまう。

ここで観測不能成分(unobserved components、UC)モデルに基づいた別の識別方法を紹介しよう。UC モデルでは、系列がいくつかの別個の観測不能な成分から成り立っていると仮定される。直接観測できない 2 つの誤差項 ε_t 、 η_t が存在するランダムウォークとノイズのモデルは UC モデルの一例である。ここでは UC モデルのモーメントと推定された ARIMA モデルのモーメントが一致するように誤差項を識別することが目的とされる。

第 2 節では、トレンドとノイズのモデルが

$$E[\Delta y_t] = 0, \text{var}(\Delta y_t) = \sigma^2 + 2\sigma_\eta^2, \text{cov}(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) = -\sigma_\eta^2 \quad (4.52)$$

を満たす ARIMA(0,1,1)表現を持っていることが示された。ドリフト a_0 が含まれる場合、期待値は $E[\Delta y_t] = a_0$ に置き換えられる。したがって、ドリフトのあるトレンドとノイズのモデルであれば、階差 $\{\Delta y_t\}$ は MA(1)過程として表現できる。

$$\Delta y_t = a_0 + e_t + \beta_1 e_{t-1} \quad (4.53)$$

ただし、 e_t は互いに独立なホワイトノイズである。ここで問題は、推定された系列 $\{e_t\}$ を 2 つの要因に分離できるかにある。

この例では、(4.53)式を推定し、個別の誤差項 $\{e_t\}$ $\{\eta_t\}$ を再現する（つまり識別する）ことが可能である。ボックス=ジェンキンスの方法に従い、係数 a_0 、 β_1 と系列 $\{e_t\}$ が推定されたとしよう。(4.53)式の分散と自己共分散は

$$\begin{aligned} \text{var}(\Delta y_t) &= \text{var}(e_t + \beta_1 e_{t-1}) = (1 + \beta_1^2) \text{var}(e_t) \\ \text{cov}(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) &= \beta_1 \text{var}(e_t) \end{aligned}$$

である。ここで、(4.53)式が、(4.52)式の条件を満たすためには

$$(1 + \beta_1)^2 \text{var}(e_t) = \sigma^2 + 2\sigma_\eta^2$$

$$\beta_1 \text{var}(e_t) = -\sigma_\eta^2$$

が成立しているはずである。

既に β_1 と $\text{var}(e_t)$ は推定されているため、この関係式を用いると σ^2 と σ_η^2 を計算することができる。さらに $\{\varepsilon_t\}\{\eta_t\}$ 系列の個別の値も再現できる。UC モデルの予測関数は、 $E_t y_{t+1} = y_t + a_0 - \eta_t$ である。一方、(A2)式から 1 期先の予測値は $E_t \Delta y_{t+1} = a_0 + \beta_1 e_t$ であるため、 $E_t y_{t+1} = y_t + a_0 + \beta_1 e_t$ が成立する。2 つの予測は同値でなければならないため

$$\beta_1 e_t = -\eta_t$$

が成立しているはずである。ゆえに、 $\beta_1 e_t$ の推定値を用いれば、系列 $\{\eta_t\}$ の全ての値を識別

できる。次に、 $\{\eta_t\}$ を用いて、 $\{\varepsilon_t\}$ の値を $\Delta y_t = a_0 + \varepsilon_t + \Delta \eta_t$ から計算できる。これは、 Δy_t 、 a_0 、 $\Delta \eta_t$ の値を、 $\varepsilon_t = \Delta y_t - a_0 - \Delta \eta_t$ に代入するだけである。

UC 分解のポイントは、系列 $\{y_t\}$ を互いに無相関なトレンド成分と不規則成分に分解できる点にある。この例では特に重要な点が示唆されている。それは系列をドリフトのあるランダムウォークと定常な不規則成分に分解するためには、トレンド成分の誤差項と不規則成分の誤差項の間の相関を固定する必要がある点である。これまでに ARIMA(0, 1, 1) モデルを分解する 2 つの方法を紹介してきた。BN 分解ではトレンドと循環の完全相関、UC 分解では完全無相関 $E[\varepsilon_t \eta_t] = 0$ が仮定される。

実際、2 つの成分の相関係数は -1 と +1 の間のどのような値でもよい。ポイントは、誤差項間の相関に関する追加的な制約がなければ、トレンド成分と定常成分を識別するための式が一本足りない点にある。ここで重要になるのは、2 つの誤差項の関係が経済理論から常に導かれるものではない点にある。残念ながら、トレンド成分の誤差項と定常成分の誤差項の関係に関する先験的な知識なしに、系列をドリフトのあるランダムウォークと定常成分に一意に分解することはできない。

ワトソン(Watson (1986))は、対数表示の GNP を分解するために BN 分解と UC 分解を用いた。まず、BN 分解を用いるため、次の ARIMA(1, 1, 0) モデルが推定された(括弧内は標準誤差)。

$$\Delta y_t = 0.005 + 0.406 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{var}(\varepsilon_t) = 0.0103^2$$

$$(0.001) \quad (0.077)$$

次に、トレンド成分 τ_t はドリフトを含むランダムウォーク、循環成分 c_t は AR(2) 過程に従っているとし、次の UC モデルが推定された¹。

¹誤差項 ε_t と η_t が無相関であるという仮定は Δy_t の自己回帰係数と移動平均係数に制約を課していることと同値である。例えば、純粋なランダムウォークとノイズのモデルでは、 β_1 が負の値でなければならない。ワトソンは、制約付きの ARIMA モデルを推定するかわりに、トレンドと不規則項を観測不能成分として推定した。多くの統計ソフトでは観測不能成分を時変係数として推定する機能を備えている。推定方法の詳細に関しては Harvey (1989) を参照すると良い。

$$\tau_t = 0.008 + \tau_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{var}(\varepsilon_t) = 0.0057^2$$

(0.001)

$$c_t = 1.501c_{t-1} - 0.577c_{t-2} + \eta_t \quad \text{var}(\eta_t) = 0.0076^2$$

(0.121) (0.125)

ただし、トレンド成分 τ_t と不規則成分 c_t の誤差項は無相関と仮定された ($E[\varepsilon_t \eta_t] = 0$)。

推定された2つのモデルによる短期予測の性質は非常に似通っている。UCモデルの1期先の予測誤差の標準誤差は $(\sigma^2 + \sigma_\eta^2)^{1/2} = (0.0057^2 + 0.0076^2)^{1/2} = 0.0095$ と計算され、BN分解で用いたARIMA(1, 1, 0)モデルの予測誤差の標準誤差0.0103とほぼ同じである。ところが2つのモデルの長期的な性質は大きく異なる。たとえば、 $\Delta y_t = (0.005 + \varepsilon_t)/(1 - 0.406L)$ と書き換えることで、BN分解のインパルス応答関数を計算できる。このインパルス応答の長期的な和は $1.68 (= 1/(1 - 0.406))$ である。したがって、1単位の誤差項の増加は対数GNPを最終的に1.68単位増加させる。全ての係数は正であるため、初期の誤差項の増加に対して y_t は新しい水準に到達するまで継続的に上昇する。一方、UCモデルのインパルス応答の和は約0.57である。また、4期先以降のインパルス応答は全て負である。したがって、1単位の誤差項の変化が y_t に及ぼす影響が最も大きくなるのは長期ではなく短期である。重要な点は、BN分解の循環成分はUCモデルの循環成分に比べて振幅が小さく持続性も低いことである。ネルソンら(Morley, Nelson and Zivot (2003)) はワトソンの研究を再考し、1998年第2四半期まで標本期間を延長した場合でも、同様の結果となることを示している。また、彼らはカルマンフィルターと状態空間モデルを用いて、 ε_t と η_t の相関を推定する方法も示している。相関を直接推定することは、 $E[\varepsilon_t \eta_t]$ に何らかの制約を課すことに比べて明白な利点がある。ネルソンらによると、 ε_t と η_t の相関の推定値は-0.9062であり、BN分解の仮定は妥当と判断できる。ただし、ペロンら(Perron and Wada(2009))は、確定トレンドの構造変化を考慮すると相関はほぼ0となるためUC分解の方が妥当と反論しており、どちらが望ましいかは議論の余地がある。