

## 5章の解答

[1]

(a) ヒントの通り、両辺の左から $(I - A_1)$ をかけると、安定条件のもとでは、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A_1)(I + A_1 + A_1^2 + \dots + A_1^n) A_0 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A_1 + A_1 - A_1^2 + A_1^2 - \dots - A_1^{n+1}) A_0 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A_1^{n+1}) A_0 \\
&= A_0
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (I - A_1)(I - A_1)^{-1} A_0 \\
&= A_0
\end{aligned}$$

となる。従って、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (I + A_1 + A_1^2 + \dots + A_1^n) A_0 = (I - A_1)^{-1} A_0$ が示された。(b)  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + A_1 + A_1^2 + \dots + A_1^n) A_0$ であるので、(a)より、 $(I - A_1)^{-1} A_0$ を求めればよい。

$$\begin{aligned}
(I - A_1)^{-1} A_0 &= \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}^{-1} A_0 \\
&= \frac{1}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} 1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1 - a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20} \\ a_{20}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{10} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので、 $\mu = [\bar{y}, \bar{z}]' = \left[ \frac{a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{20}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{10}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \right]'$ と $\mu$ が求まる。

[2]

(a) (5.15)の場合を示す。 $(1 - a_{11}L)y_t = a_{10} + a_{12}L \left( \frac{a_{20} + a_{21}Ly_t + e_{2t}}{(1 - a_{22}L)} \right) + e_{1t}$ の両辺に $(1 - a_{22}L)$ 

をかけると、

$$(1 - a_{22}L)(1 - a_{11}L)y_t = (1 - a_{22}L)(a_{10} + e_{1t}) + a_{12}L(a_{20} + a_{21}Ly_t + e_{2t})$$

となり、これを整理すると、

$$[(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2]y_t = (1 - a_{22}L)(a_{10} + e_{1t}) + a_{12}L(a_{20} + e_{2t})$$

となる。ここで、任意の定数 $a$ に対して $La = a$ となるので、右辺で定数に対して作用しているラグオペレータ $L$ は1に置き換えて良い。従って、収束を仮定すると、

$$y_t = \frac{a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20} + (1 - a_{22}L)e_{1t} + a_{12}Le_{2t}}{(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2}$$

と(5.15)式が導出される。(5.16)式も同様にして導出される。

(b)  $e_{1t}$ と $e_{2t}$ の期待値は共に0であるので、(5.14)式から、 $\mu$ は $y_t$ と $z_t$ の期待値を要素とするベクトルであるとわかる。(a)で求めた

$$[(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2]y_t = (1 - a_{22}L)(a_{10} + e_{1t}) + a_{12}L(a_{20} + e_{2t})$$

の式の両辺の期待値をとる。すると、 $e_{1t}$ と $e_{2t}$ の期待値が0であることと、 $y_t$ の定常性(安定性)より、

$$[(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2]\bar{y} = a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20}$$

と求まる。従って、 $y_t$ の期待値 $\bar{y}$ は、

$$\bar{y} = \frac{a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$

となる。 $\bar{z}$ も同様に求められる。これらは、問題[1]の結果と一致する。

[3]

(a)  $(1 - 0.8z)(1 - 0.8z) - 0.04z^2 = 0$ より、反転特性根は1と5/3であるとわかる。5/3は単位円外の反転特性根であるが、1は単位円外の反転特性根ではない。従って、 $y_t$ は定常過程ではない。

(b) 今回のVARモデルは

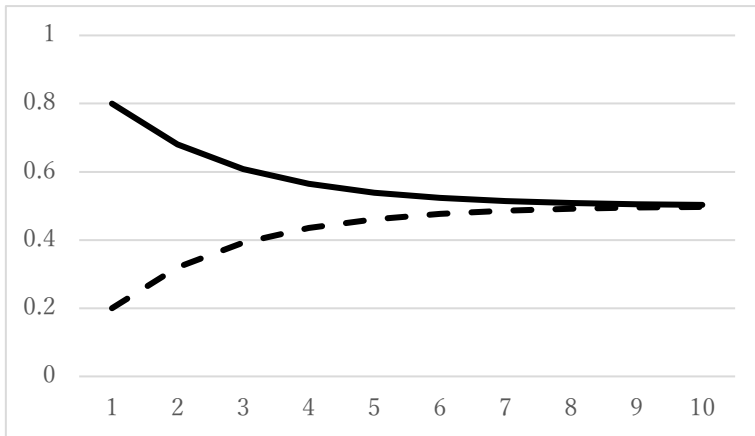
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} y_{t-2} \\ z_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-1} \\ e_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} e_{1t-j} \\ e_{2t-j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。ここで、対角化により $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ となるので、上

のVARモデルは

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 + 0.6^j & 1 - 0.6^j \\ 1 - 0.6^j & 1 + 0.6^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-j} \\ e_{2t-j} \end{bmatrix}$$

と書ける。従って、 $e_{1t}$ ,  $e_{2t}$ それぞれ1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数はそれぞれ、 $\frac{1}{2}(1 + 0.6^j)$ ,  $\frac{1}{2}(1 - 0.6^j)$ となる。これらのインパルス応答関数をプロットすると以下のグラフを得る。



ここで、実線は $e_{1t}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値、点線は $e_{2t}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値を表している。 $e_{1t}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.8から減少して0.5に収束するが、 $e_{2t}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.2から増加して0.5に収束する。

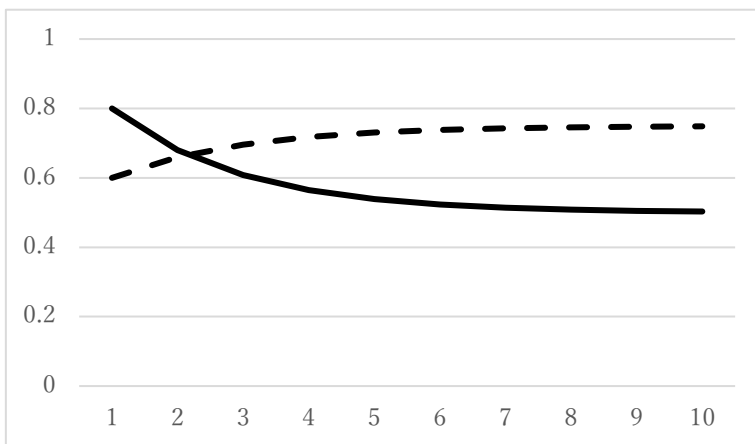
(c) (b)より、VARモデルは

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 + 0.6^j & 1 - 0.6^j \\ 1 - 0.6^j & 1 + 0.6^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-j} \\ e_{2t-j} \end{bmatrix}$$

と書ける。今回、 $e_{1t} = \varepsilon_{yt} + 0.5\varepsilon_{zt}$ 、 $e_{2t} = \varepsilon_{zt}$ であることから、上記のVARモデルは、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 + 0.6^j & 1 - 0.6^j \\ 1 - 0.6^j & 1 + 0.6^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-j} \\ \varepsilon_{zt-j} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 + 0.6^j & 1.5 - 0.5 \times 0.6^j \\ 1 - 0.6^j & 1.5 + 0.5 \times 0.6^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-j} \\ \varepsilon_{zt-j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って、 $\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}$ それぞれ1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数はそれぞれ、 $\frac{1}{2}(1 + 0.6^j), \frac{1}{2}(1.5 - 0.5 \times 0.6^j)$ となる。これらのインパルス応答関数をプロットすると以下のグラフを得る。



ここで、実線は $\varepsilon_{yt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値、点線は $\varepsilon_{zt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値を表している。 $\varepsilon_{yt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.8から減少して0.6に収束するが、 $\varepsilon_{zt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.6から増加して0.75に収束する。

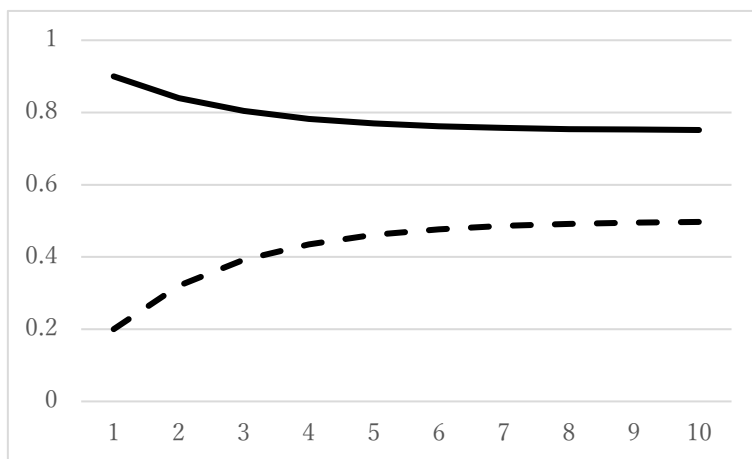
(d) (b)より、VARモデルは

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 + 0.6^j & 1 - 0.6^j \\ 1 - 0.6^j & 1 + 0.6^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-j} \\ e_{2t-j} \end{bmatrix}$$

と書ける。今回、 $e_{1t} = \varepsilon_{yt}$ 、 $e_{2t} = 0.5\varepsilon_{yt} + \varepsilon_{zt}$ であることから、上記のVARモデルは、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 + 0.6^j & 1 - 0.6^j \\ 1 - 0.6^j & 1 + 0.6^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-j} \\ \varepsilon_{zt-j} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1.5 + 0.5 \times 0.6^j & 1 - 0.6^j \\ 1.5 - 0.5 \times 0.6^j & 1 + 0.6^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-j} \\ \varepsilon_{zt-j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って、 $\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}$ それぞれ1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数はそれぞれ、 $\frac{1}{2}(1.5 + 0.5 \times 0.6^j), \frac{1}{2}(1 - 0.6^j)$ となる。これらのインパルス応答関数をプロットすると以下のグラフを得る。



ここで、実線は $\varepsilon_{yt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値、点線は $\varepsilon_{zt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値を表している。 $\varepsilon_{yt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.9から減少して0.75に収束するが、 $\varepsilon_{zt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.2から増加して0.5に収束する。

(e) (c)では、 $y_t$ の $z_t$ への同時効果がないコレスキー分解を採用している。一方、(d)では、 $z_t$ の $y_t$ への同時効果がないコレスキー分解を採用している。この違いにより、インパルス応答関数は異なるものになる。すなわち、ショックの影響の減少(増加)パターンが異なるものになる。従って、コレスキー分解の順序づけは重要である。

(f) まず  $A_1^2$  と  $A_1^3$  はそれぞれ

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.32 & 0.68 \end{bmatrix}$$

$$A_1^3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.608 & 0.392 \\ 0.392 & 0.608 \end{bmatrix}$$

となる。(1,2)要素と(2,1)要素の増加から推測するに、 $A_1^n$ は0行列に収束しない。実際、 $A_1^n$

は  $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$  に収束する。これは、対角化により  $A_1^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  となり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_1^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となることから確認できる。従って、 $A_1^n$ は0行列に収束しない。

[4]

(a)  $(1 - 0.8L)(1 - 0.1L) - 0.08L^2 = 1 - 0.9L$ より、反転特性根は  $10/9$  であるとわかる。ここ  $10/9$  は単位円外の反転特性根である。従って、 $y_t$  は定常過程である。

(b)

(b)について：

今回の VAR モデルは

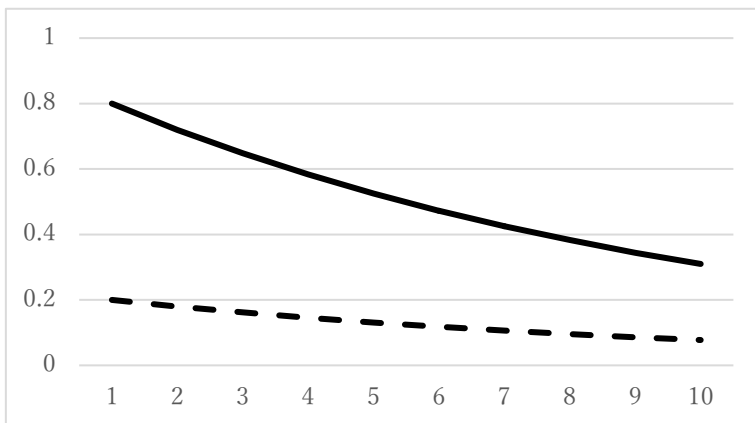
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} y_{t-2} \\ z_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-1} \\ e_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} e_{1t-j} \\ e_{2t-j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。ここで、対角化により  $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}^n = \frac{-1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  となるので、

上の VAR モデルは

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 8 \times 0.9^j & 2 \times 0.9^j \\ 4 \times 0.9^j & 1 \times 0.9^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-j} \\ e_{2t-j} \end{bmatrix}$$

と書ける。従って、 $e_{1t}, e_{2t}$ それぞれ1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数はそれぞれ、 $\frac{8}{9} \times 0.9^j, \frac{2}{9} \times 0.9^j$ となる。これらのインパルス応答関数をプロットすると以下のグラフを得る。



ここで、実線は $e_{1t}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値、点線は $e_{2t}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値を表している。 $e_{1t}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.8から減少して0に収束するが、 $e_{2t}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.2から減少して0に収束する。

(c)について：

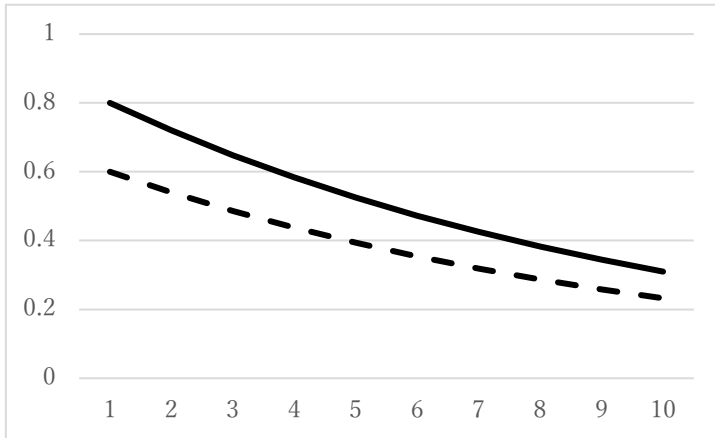
(b)より、VARモデルは

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 8 \times 0.9^j & 2 \times 0.9^j \\ 4 \times 0.9^j & 1 \times 0.9^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-j} \\ e_{2t-j} \end{bmatrix}$$

と書ける。今回、 $e_{1t} = \varepsilon_{yt} + 0.5\varepsilon_{zt}$ 、 $e_{2t} = \varepsilon_{zt}$ であることから、上記のVARモデルは、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} &= \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 8 \times 0.9^j & 2 \times 0.9^j \\ 4 \times 0.9^j & 1 \times 0.9^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-j} \\ \varepsilon_{zt-j} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 8 \times 0.9^j & 6 \times 0.9^j \\ 4 \times 0.9^j & 3 \times 0.9^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-j} \\ \varepsilon_{zt-j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って、 $\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}$ それぞれ1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数はそれぞれ、 $\frac{8}{9} \times 0.9^j, \frac{2}{3} \times 0.9^j$ となる。これらのインパルス応答関数をプロットすると以下のグラフを得る。



ここで、実線は $\varepsilon_{yt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値、点線は $\varepsilon_{zt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値を表している。 $\varepsilon_{yt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.8から減少して0に収束するが、 $\varepsilon_{zt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.6から減少して0に収束する。

(d)について：

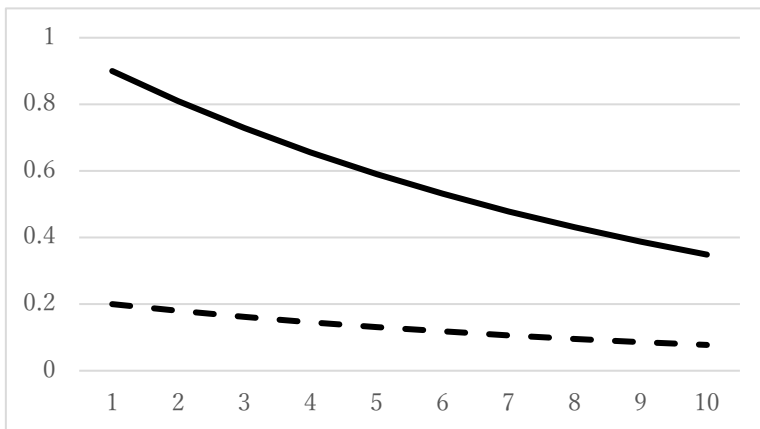
(b)より、VARモデルは

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 8 \times 0.9^j & 2 \times 0.9^j \\ 4 \times 0.9^j & 1 \times 0.9^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-j} \\ e_{2t-j} \end{bmatrix}$$

と書ける。今回、 $e_{1t} = \varepsilon_{yt}$ 、 $e_{2t} = 0.5\varepsilon_{yt} + \varepsilon_{zt}$ であることから、上記のVARモデルは、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} &= \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 8 \times 0.9^j & 2 \times 0.9^j \\ 4 \times 0.9^j & 1 \times 0.9^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-j} \\ \varepsilon_{zt-j} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 9 \times 0.9^j & 2 \times 0.9^j \\ 4.5 \times 0.9^j & 1 \times 0.9^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-j} \\ \varepsilon_{zt-j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って、 $\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}$ それぞれ1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数はそれぞれ、 $0.9^j, \frac{2}{9} \times 0.9^j$ となる。これらのインパルス応答関数をプロットすると以下のグラフを得る。



ここで、実線は $\varepsilon_{yt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値、点線は $\varepsilon_{zt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値を表している。 $\varepsilon_{yt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.9から減少して0に収束するが、 $\varepsilon_{zt}$ の1単位のショックに対する $y_t$ のインパルス応答関数の値は0.2から減少して0に収束する。

(e)について：

(c)では、 $y_t$ の $z_t$ への同時効果がないコレスキー分解を採用している。一方、(d)では、 $z_t$ の $y_t$ への同時効果がないコレスキー分解を採用している。この違いにより、インパルス応答関数は異なるものになる。すなわち、ショックの影響の減少パターンが異なるものになる。従って、コレスキー分解の順序づけは重要である。

(f)について：

まず $A_1^2$ と $A_1^3$ はそれぞれ

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 & 0.18 \\ 0.36 & 0.09 \end{bmatrix}$$

$$A_1^3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.648 & 0.162 \\ 0.324 & 0.081 \end{bmatrix}$$

となる。従って、 $A_1^n$ は0行列に収束すると推測できる。実際、 $A_1^n$ は $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ に収束する。こ

れは、対角化により $A_1^n = \frac{-1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ となり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_1^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となることから確認できる。

(c) 安定条件とは、 $(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2$ から計算される反転特性根が単位円外に存在することであった。従って、 $a_{10}$ の値は安定条件に影響を与えないことがわかる。今回の場合は、元のVARモデルが安定条件を満たしているため、変化後のVARモデルも引き続き安定条件を満たしている。また、(5.15)式を用いると、 $y_t$ の解は

$$y_t = \frac{0.18 + (1 - 0.1L)e_{1t} + 0.2Le_{2t}}{(1 - 0.8L)(1 - 0.1L) - 0.08L^2}$$



$$= \frac{0.18 + (1 - 0.1L)e_{1t} + 0.2Le_{2t}}{1 - 0.9L}$$

と書ける。

[5]

(a)  $var(e_1) = 0.75, var(e_2) = 0.5, cov(e_1, e_2) = 0.25$ より、

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\begin{bmatrix} var(\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & var(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{21} \\ b_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

を得る。従って、以下の4式が成り立つ。

$$var(\varepsilon_1) = 0.75 + 0.5b_{12} + 0.5b_{12}^2$$

$$0 = 0.25 + 0.5b_{12} + 0.75b_{21} + 0.25b_{12}b_{21}$$

$$0 = 0.25 + 0.5b_{12} + 0.75b_{21} + 0.25b_{12}b_{21}$$

$$var(\varepsilon_2) = 0.5 + 0.5b_{21} + 0.75b_{21}^2$$

ここで、2つ目の式と3つ目の式は同じものである。従って、 $var(\varepsilon_1), var(\varepsilon_2), b_{12}, b_{21}$ の4つの未知の変数に対して、3つの独立な式が存在することになる。よって、追加的な識別条件がなければ、構造VARモデルの識別は不可能である。

(b) (a)で求めた独立な3つの式に対して、 $b_{12} = 0$ を代入すると、

$$var(\varepsilon_1) = 0.75$$

$$0 = 0.25 + 0.75b_{21}$$

$$var(\varepsilon_2) = 0.5 + 0.5b_{21} + 0.75b_{21}^2$$

となる。従って、 $var(\varepsilon_1) = 0.75, b_{21} = -1/3, var(\varepsilon_2) = 5/12$ となる。

(c) (a)で求めた独立な3つの式に対して、 $b_{21} = 0$ を代入すると、

$$var(\varepsilon_1) = 0.75 + 0.5b_{12} + 0.5b_{12}^2$$

$$0 = 0.25 + 0.5b_{12}$$

$$var(\varepsilon_2) = 0.5$$

となる。従って、 $var(\varepsilon_2) = 0.5, b_{12} = -0.5, var(\varepsilon_1) = 5/8$ となる。

(d) (a)で求めた独立な3つの式に対して、 $b_{12} = 0.5$ を代入すると、

$$var(\varepsilon_1) = 9/8$$

$$0 = 0.5 + 0.875b_{21}$$

$$var(\varepsilon_2) = 0.5 + 0.5b_{21} + 0.75b_{21}^2$$

となる。従って、 $var(\varepsilon_1) = 9/8, b_{21} = -4/7, var(\varepsilon_2) = 37/98$ となる。

(e) (a)で求めた独立な3つの式に対して、 $b_{21} = 0.5$ を代入すると、

$$var(\varepsilon_1) = 0.75 + 0.5b_{12} + 0.5b_{12}^2$$

$$0 = 0.625 + 0.625b_{12}$$

$$var(\varepsilon_2) = 15/16$$

となる。従って、 $var(\varepsilon_2) = 15/16, b_{12} = -1, var(\varepsilon_1) = 0.75$ となる。

(f)  $\sigma_1^2 = 2/3, \sigma_{12} = \sigma_{21} = -2/3, \sigma_2^2 = 2/3$ となるので、分散共分散行列 $\Sigma$ は

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

となる。従って、(a)同様、

$$\begin{bmatrix} var(\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & var(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{21} \\ b_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

を得る。よって、以下の4式が成り立つ。

$$var(\varepsilon_1) = 2/3 - (4/3)b_{12} + (2/3)b_{12}^2$$

$$0 = -2/3 + (2/3)b_{12} + (2/3)b_{21} - (2/3)b_{12}b_{21}$$

$$0 = -2/3 + (2/3)b_{12} + (2/3)b_{21} - (2/3)b_{12}b_{21}$$

$$var(\varepsilon_2) = 2/3 - (4/3)b_{21} + (2/3)b_{21}^2$$

ただし、2つ目の式と3つ目の式は同じものである。

(b)の分解について：

独立な3つの式に対して、 $b_{12} = 0$ を代入すると、

$$var(\varepsilon_1) = 2/3$$

$$0 = -2/3 + (2/3)b_{21}$$

$$var(\varepsilon_2) = 2/3 - (4/3)b_{21} + (2/3)b_{21}^2$$

となる。従って、 $var(\varepsilon_1) = 2/3, b_{21} = 1, var(\varepsilon_2) = 0$ となる。ここで、 $\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$

であることから、

$$\varepsilon_{1t} = e_{1t}$$

$$\varepsilon_{2t} = e_{1t} + e_{2t}$$

が求まる。従って、 $\varepsilon_1$ と $\varepsilon_2$ の最初の3つの値は、

$t$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
1	1	0
2	0	0
3	-1	0

となる。

(c)の分解について：

独立な3つの式に対して、 $b_{21} = 0$ を代入すると、

$$\text{var}(\varepsilon_1) = 2/3 - (4/3)b_{12} + (2/3)b_{12}^2$$

$$0 = -2/3 + (2/3)b_{21}$$

$$\text{var}(\varepsilon_2) = 2/3$$

となる。従って、 $\text{var}(\varepsilon_2) = 2/3, b_{12} = 1, \text{var}(\varepsilon_1) = 0$ となる。ここで、 $\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$

であることから、

$$\varepsilon_{1t} = e_{1t} + e_{2t}$$

$$\varepsilon_{2t} = e_{1t}$$

が求まる。従って、 $\varepsilon_1$ と $\varepsilon_2$ の最初の3つの値は、

$t$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
1	0	1
2	0	0
3	0	-1

となる。

(d)の分解について：

独立な3つの式に対して、 $b_{12} = 0.5$ を代入すると、

$$\text{var}(\varepsilon_1) = 1/6$$

$$0 = -1/3 + (1/3)b_{21}$$

$$\text{var}(\varepsilon_2) = 2/3 - (4/3)b_{21} + (2/3)b_{21}^2$$

となる。従って、 $\text{var}(\varepsilon_1) = 1/6, b_{21} = 1, \text{var}(\varepsilon_2) = 0$ となる。ここで、 $\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$

であることから、

$$\varepsilon_{1t} = e_{1t} + 0.5e_{2t}$$

$$\varepsilon_{2t} = e_{1t} + e_{2t}$$

が求まる。従って、 $\varepsilon_1$ と $\varepsilon_2$ の最初の3つの値は、

$t$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
1	0.5	0
2	0	0
3	-0.5	0

となる。

(e)の分解について：

独立な3つの式に対して、 $b_{21} = 0.5$ を代入すると、

$$\text{var}(\varepsilon_1) = 2/3 - (4/3)b_{12} + (2/3)b_{12}^2$$

$$0 = -1/3 + (1/3)b_{12}$$

$$\text{var}(\varepsilon_2) = 1/6$$

となる。従って、 $\text{var}(\varepsilon_2) = 1/6, b_{12} = 1, \text{var}(\varepsilon_1) = 0$ となる。ここで、 $\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$

であることから、

$$\varepsilon_{1t} = e_{1t} + e_{2t}$$

$$\varepsilon_{2t} = e_{1t} + 0.5e_{2t}$$

が求まる。従って、 $\varepsilon_1$ と $\varepsilon_2$ の最初の3つの値は、

$t$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
1	0	0.5
2	0	0
3	0	-0.5

となる。

## [6]

(a) QUARTERLY.xls からデータを読み込み、Command内で問題文の変数を以下のように定義する。

```
genr dlip = log(indprod) - log(indprod(-1))
```

```
genr dur = unemp - unemp(-1)
```

```
genr s = r5 - tbill
```

次に、「Quick」→「Estimate VAR」を選択し、内生変数としてdlip dur sを選び、ラグの次数を9として、VARモデルの推定を行う。以下の表は、モデルを推定して得られる表の一部である。

R-squared	0.483370	0.610480	0.817805
Adj. R-squared	0.403203	0.550037	0.789533
Sum sq. resids	0.025003	8.709826	34.91609
S.E. equation	0.011987	0.223733	0.447959
F-statistic	6.029554	10.10014	28.92660
Log likelihood	622.0748	30.89982	-109.3383
Akaike AIC	-5.881929	-0.028711	1.359785
Schwarz SC	-5.423357	0.429861	1.818357
Mean dependent	0.006728	0.011386	1.210891
S.D. dependent	0.015517	0.333535	0.976441
Determinant resid covariance (dof adj.)		6.62E-07	
Determinant resid covariance		4.23E-07	
Log likelihood		622.3190	
Akaike information criterion		-5.329891	
Schwarz criterion		-3.954176	
Number of coefficients		84	

この推定により、Eviews に残差が保存されることになる。

今回、 $\Delta lip_t$  と  $\Delta ur_t$  は  $lip_t$  と  $ur_t$  の階差によって定義されているため、VAR モデルの 3 変数 ( $\Delta lip_t$  と  $\Delta ur_t$  と  $s_t$ ) は、1960 年 Q2 から 2012 年 Q4 までのデータが得られている。また、ラグの次数として 9 を選択している。そのため、1962 年 Q3 より前から推定を始めることは出来ない。

また、 $lip_t$  や  $ur_t$  の代わりに  $\Delta lip_t$  や  $\Delta ur_t$  を用いることの潜在的な利点は、単位根の制約が課されていることで、その制約が正しい時には VAR モデルをより効率的に推定出来ることにある。また、 $\Delta lip_t$  に関しては成長率と解釈できることにある。

(b) (a)の結果の Determinant resid covariance を見ると、 $|\Sigma_9| = 4.23 \times 10^{-7}$ とわかる。従って、 $\ln(|\Sigma_9|) = -14.68$ となる。また、Log likelihood を見ると、対数尤度は 622.32 であるとわかる。

```
Vector Autoregression Estimates
Date: 08/29/19 Time: 18:47
Sample (adjusted): 1962Q3 2012Q4
Included observations: 202 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]
```

次に AIC と BIC を計算する。上の表 ((a)の推定で得られる) の Induced Observation を見ると、 $T = 202$ とわかる。また、ラグの次数は  $p = 9$ であり、変数の数は  $n = 3$ なので、 $N = 3^2 \times 9 + 3 = 84$ となる。これらと、 $\ln(|\Sigma_9|) = -14.68$ を用いると、

$$AIC = 202 \times (-14.68) + 84 \times 2 = -2797.36$$

$$BIC = 202 \times (-14.68) + 84 \times \ln(202) = -2519.47$$

と求まる。また、AIC\*と BIC\*も同様に、

$$AIC^* = -2 \times 622.32/202 + 84 \times 2/202 = -5.33$$

$$BIC^* = -2 \times 622.32/202 + 84 \times \ln(202)/202 = -3.95$$

と求まる。

(c) (a)同様、「Quick」→「Estimate VAR」を選択し、内生変数として  $d\text{lip}$   $d\text{ur}$   $s$  を選び、ラグの次数を 9 として、VAR モデルの推定を行う。また、標本期間を揃えるため、Estimation Sample を 1962q3 2012q4 に変更する。以下の表は、その推定の結果の一部である。

R-squared	0.419679	0.507132	0.773728
Adj. R-squared	0.392477	0.484029	0.763121
Sum sq. resids	0.028085	11.02074	43.36302
S.E. equation	0.012095	0.239582	0.475236
F-statistic	15.42794	21.95072	72.94834
Log likelihood	610.3332	7.131820	-131.2209
Akaike AIC	-5.943893	0.028398	1.398226
Schwarz SC	-5.780117	0.192173	1.562002
Mean dependent	0.006728	0.011386	1.210891
S.D. dependent	0.015517	0.333535	0.976441
<hr/>			
Determinant resid covariance (dof adj.)		8.63E-07	
Determinant resid covariance		7.41E-07	
Log likelihood		565.7126	
Akaike information criterion		-5.304085	
Schwarz criterion		-4.812758	
Number of coefficients		30	

この推定により、Eviewsには残差が保存されることになる。

<b>Vector Autoregression Estimates</b>	
Date:	08/29/19 Time: 19:27
Sample:	1962Q3 2012Q4
Included observations:	202
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]	

次に AIC と BIC を計算する。上の表の Induced Observation を見ると、 $T = 202$ とわかる。また、ラグの次数は  $p = 3$  であり、変数の数は  $n = 3$  なので、 $N = 3^2 \times 3 + 3 = 30$ となる。また、Determinant resid covariance を見ると、 $|\Sigma_3| = 7.41 \times 10^{-7}$ とわかるので、 $\ln(|\Sigma_3|) = -14.12$ となる。また、Log likelihood を見ると、対数尤度は 565.71 であるとわかる。従って、公式を用いると、AIC と BIC は

$$AIC = 202 \times (-14.12) + 30 \times 2 = -2792.24$$

$$BIC = 202 \times (-14.12) + 30 \times \ln(202) = -2692.99$$

と求まる。また、AIC\*と BIC\*も同様に、

$$AIC^* = -2 \times 565.71/202 + 30 \times 2/202 = -5.30$$

$$BIC^* = -2 \times 565.71/202 + 30 \times \ln(202)/202 = -4.81$$

と求まる。以上の結果より、AIC はラグ次数 9 を、BIC はラグ次数 3 を選択する。同様に、AIC\*はラグ次数 9 を、BIC\*はラグ次数 3 を選択する。

AIC や BIC を基準としてモデルの選択を行う場合、同じサンプルサイズで推定されたモデル同士を比較しなければならない。さもなければ、異なる分析期間のモデル比較となってしまう。従って、本問でも 1962 年 Q3 を初期として 3 変量 VAR モデルを推定・比較する必要がある。

(d)今回、尤度比検定統計量は

$$\begin{aligned} T \times (\ln(|\Sigma_3|) - \ln(|\Sigma_9|)) &= 202 \times (-14.12 - (-14.68)) \\ &= 113.12 \end{aligned}$$

となる。ここで、制約されたシステムの制約の数は、

$$6 \times 3^2 = 54$$

であり、制約のない式の回帰変数の数は

$$9 \times 3^2 + 3 = 84$$

なる。また、自由度 54 の  $\chi^2$  分布の 5% 有意水準の臨界値は 72.15 である。従って、尤度比検定の帰無仮説は棄却される。

(e) 「Quick」 → 「Estimate VAR」 を選択し、内生変数として dlip dur s を選び、VAR モデルの推定を行う。次に、VAR window から「View」 → 「Lag Structure」 → 「Lag Length Criteria」を選択する。ここで、ラグの最大次数を 12 とすると、以下の結果を得る。

VAR Lag Order Selection Criteria						
Endogenous variables: DLIP DUR S						
Exogenous variables: C						
Date: 08/29/19 Time: 20:25						
Sample: 1960Q1 2012Q4						
Included observations: 199						
Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	319.1007	NA	8.37e-06	-3.176892	-3.127244	-3.156798
1	535.3708	423.8458	1.04e-06	-5.260008	-5.061416*	-5.179633*
2	544.0632	16.77345	1.05e-06	-5.256917	-4.909382	-5.116261
3	557.3804	25.29593	1.00e-06*	-5.300306*	-4.803828	-5.099368
4	564.3949	13.11249	1.02e-06	-5.280351	-4.634929	-5.019132
5	571.0594	12.25739	1.05e-06	-5.256879	-4.462514	-4.935379
6	582.4511	20.60796	1.02e-06	-5.280915	-4.337607	-4.899134
7	592.8573	18.51164	1.01e-06	-5.295048	-4.202797	-4.852986
8	600.5281	13.41432	1.02e-06	-5.281690	-4.040495	-4.779346
9	611.1815	18.30882*	1.01e-06	-5.298307	-3.908168	-4.735682
10	619.4924	14.03248	1.02e-06	-5.291381	-3.752299	-4.668475
11	625.4169	9.824537	1.05e-06	-5.260472	-3.572446	-4.577284
12	631.4634	9.844447	1.09e-06	-5.230788	-3.393819	-4.487319

\* indicates lag order selected by the criterion  
 LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)  
 FPE: Final prediction error  
 AIC: Akaike information criterion  
 SC: Schwarz information criterion  
 HQ: Hannan-Quinn information criterion

ここで、LR は「一般からの特定」法、SC は BIC に対応している。従って、「一般からの特定」法では 9、AIC では 3、BIC では 1 のラグ次数を選択することになる。

[7]

(a) 「Quick」 → 「Group Statistics」 → 「Granger Causality Test」を選び、今回は変数として s と dilp を選択する。また、ラグ次数を問題文の設定に従い、3 とする。すると、以下の結果を得る。

Pairwise Granger Causality Tests			
Date: 08/29/19 Time: 20:58			
Sample: 1960Q1 2012Q4			
Lags: 3			
Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
DLIP does not Granger Cause S	208	4.27504	0.0060
S does not Granger Cause DLIP		2.76099	0.0433

よって、 $s_t$ から $\Delta lip_t$ へのグレンジャー因果性の検定における  $F$  統計量は 2.76 となる。このとき、 $p$  値は 0.04 となり、5%有意水準で棄却される。従って、 $s_t$ から $\Delta lip_t$ へのグレンジャー因果性は存在すると解釈できる。

(b) (a)と同様の手続きにより、以下の結果を得る。

Pairwise Granger Causality Tests			
Date: 08/29/19 Time: 21:02			
Sample: 1960Q1 2012Q4			
Lags: 3			
Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
DUR does not Granger Cause S	208	5.43236	0.0013
S does not Granger Cause DUR		5.14334	0.0019

よって、 $s_t$ から $\Delta ur_t$ へのグレンジャー因果性の検定における  $F$  統計量は 5.14 となる。このとき、 $p$  値は 0.00 となり、5%有意水準で棄却される。従って、 $s_t$ から $\Delta ur_t$ へのグレンジャー因果性は存在すると解釈できる。

(c)  $e_{1t}$ と $e_{2t}$ に着目する。 $\Delta lip_t$ が $\Delta ur_t$ に対して因果関係で先行している順序付けを採用する場合、 $e_{1t}$ と $e_{2t}$ の相関が負であることから、鉱工業生産に対するショック ( $\varepsilon_{\Delta lip}$ ) は失業率の式のショック ( $e_{2t}$ ) に対して負の同時効果を与える。そのため、鉱工業生産に対するショック ( $\varepsilon_{\Delta lip}$ ) から失業率への同時効果は存在することになる。一方、 $\Delta lip_t$ が $\Delta ur_t$ に対して因果関係で先行している順序付けを採用する場合、鉱工業生産に対するショック ( $\varepsilon_{\Delta lip}$ ) は失業率の式のショック ( $e_{2t}$ ) に対して同時効果を与えない。そのため、鉱工業生産に対するショック ( $\varepsilon_{\Delta lip}$ ) から失業率への同時効果は存在しないことになる。従って、コレスキー分解に順序付けを変更した場合、インパルス応答関数は変化すると考えられるので、コレスキー分解に順序付けは重要である。

(d) まず、「Quick」→「Estimate VAR」を選択し、内生変数として  $dlip\ dur\ s$  を選び、VARモデルの推定を行う。次に Var window にて「View」→「Variance Decomposition」を選択して、デフォルトの設定のまま OK を押す。すると、以下の表を得られる。



Variance Decomposition of DLIP:				
Period	S.E.	DLIP	DUR	S
1	0.012408	100.0000	0.000000	0.000000
2	0.014761	99.31087	0.500574	0.188560
3	0.015084	98.46865	0.535011	0.996337
4	0.015348	96.18399	1.467914	2.348096
5	0.015553	93.92206	1.977632	4.100310
6	0.015700	92.21340	2.197237	5.589363
7	0.015807	91.27315	2.327793	6.399062
8	0.015882	90.83592	2.381486	6.782594
Variance Decomposition of DUR:				
Period	S.E.	DLIP	DUR	S
1	0.238132	51.27081	48.72919	0.000000
2	0.285283	62.07221	37.89060	0.037195
3	0.299144	65.11244	34.73188	0.155679
4	0.308335	64.63664	32.78643	2.576933
5	0.316991	61.88631	31.39993	6.713759
6	0.323467	59.43883	30.45945	10.10172
7	0.328360	57.89661	29.79038	12.31301
8	0.332327	57.12759	29.23785	13.63456
Variance Decomposition of S:				
Period	S.E.	DLIP	DUR	S
1	0.469662	1.133405	0.081957	98.78464
2	0.688723	4.021976	1.004676	94.97335
3	0.778198	6.216966	0.979780	92.80325
4	0.836854	9.434888	0.989454	89.57566
5	0.886354	13.30646	1.037993	85.65555
6	0.922531	16.36933	1.038049	82.59262
7	0.945784	18.50448	1.003487	80.49203
8	0.960104	19.98883	0.973884	79.03728

Cholesky Ordering: DLIP DUR S

従って、予測誤差分散分解の結果は問題文の表と一致する。

(e) Command 内で問題文の変数を以下のように定義する。

`genr lip = log(indprod)`

`genr ur = unemp`

次に、「Quick」→「Estimate VAR」を選択し、内生変数として lip ur s を選び、新しい VAR モデルの推定を行う。また、(d)と同じ手順で予測誤差分散分解を行う。以下の左の表は、モデルの推定結果であり、右の表は予測誤差分散分解の結果である。

Vector Autoregression Estimates			
Date: 09/04/19 Time: 21:39			
Sample: 1961Q1 2012Q4			
Included observations: 208			
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]			
	LIP	UR	S
LIP(-1)	1.458105 (0.10073) [14.4748]	-6.588330 (1.95900) [-3.36311]	0.468514 (3.86177) [0.12132]
LIP(-2)	-0.556688 (0.15859) [-3.51028]	6.498742 (3.08410) [2.10718]	-1.480647 (6.07967) [-0.24354]
LIP(-3)	0.091494 (0.10212) [0.89593]	0.118176 (1.98600) [0.05950]	1.029398 (3.91499) [0.28294]
UR(-1)	-0.009857 (0.00520) [-1.89494]	1.347946 (0.10116) [13.3248]	0.455430 (0.19942) [2.28380]
UR(-2)	0.014388 (0.00812) [1.77292]	-0.380957 (0.15782) [-2.41383]	-0.569595 (0.31111) [-1.83082]
UR(-3)	-0.004359 (0.00480) [-0.90859]	0.012622 (0.09331) [0.13527]	0.176015 (0.18394) [0.95693]
S(-1)	0.001256 (0.00184) [0.68148]	-0.000991 (0.03585) [-0.02765]	0.995919 (0.07067) [14.0917]
S(-2)	0.000757 (0.00255) [0.29725]	0.005230 (0.04951) [0.10562]	-0.327486 (0.09760) [-3.35529]
S(-3)	0.000774 (0.00188) [0.41226]	-0.061224 (0.03649) [-1.67779]	0.140890 (0.07193) [1.95861]
C	0.028704 (0.00992) [2.89409]	0.128360 (0.19288) [0.66549]	-0.216149 (0.38023) [-0.56847]
R-squared	0.999119	0.979593	0.773612
Adj. R-squared	0.999079	0.978665	0.763322
Sum sq. resids	0.029566	11.18173	43.45229
S.E. equation	0.012220	0.237641	0.468461
F-statistic	24942.34	1056.046	75.17827
Log likelihood	626.1622	8.879537	-132.2883
Akaike AIC	-5.924636	0.010774	1.368156
Schwarz SC	-5.764178	0.171232	1.528615
Mean dependent	4.042171	6.092404	1.212596
S.D. dependent	0.402587	1.626959	0.962929
Determinant resid covariance (dof adj.)	8.49E-07		
Determinant resid covariance	7.32E-07		
Log likelihood	583.7999		
Akaike information criterion	-5.324999		
Schwarz criterion	-4.843624		
Number of coefficients	30		

Variance Decomposition of LIP:				
Period	S.E.	LIP	UR	S
1	0.012220	100.0000	0.000000	0.000000
2	0.023037	99.47296	0.462932	0.064107
3	0.031939	99.03617	0.617356	0.346478
4	0.039086	98.40679	0.606978	0.986232
5	0.044877	97.36927	0.532971	2.097763
6	0.049653	95.95029	0.448590	3.601122
7	0.053657	94.29609	0.384324	5.319585
8	0.057062	92.54608	0.353884	7.100034
9	0.059992	90.80255	0.361985	8.835462
10	0.062534	89.13440	0.408979	10.45662

Variance Decomposition of UR:				
Period	S.E.	LIP	UR	S
1	0.237641	53.29373	46.70627	0.000000
2	0.450745	63.43456	36.56533	0.000104
3	0.654022	68.76328	31.23521	0.001503
4	0.829620	71.41252	28.38242	0.205054
5	0.973486	72.47718	26.57186	0.950961
6	1.089508	72.46784	25.27739	2.254764
7	1.183172	71.74019	24.27736	3.982455
8	1.259393	70.57062	23.45642	5.972954
9	1.321947	69.17292	22.75793	8.069141
10	1.373582	67.70249	22.15586	10.14165

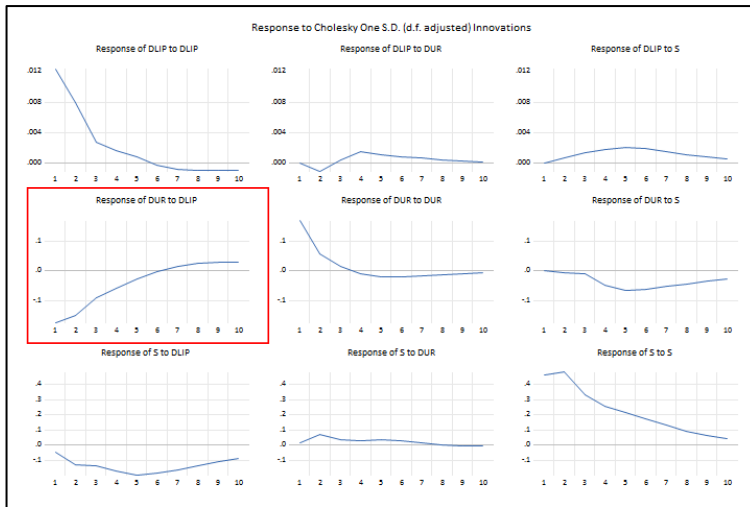
Variance Decomposition of S:				
Period	S.E.	LIP	UR	S
1	0.468461	1.460106	0.323930	98.21596
2	0.678349	4.349832	2.350294	93.29987
3	0.769263	7.921742	3.444778	88.63348
4	0.822683	11.26347	4.066774	84.66976
5	0.859000	13.95066	4.591501	81.45784
6	0.883161	16.07365	5.065663	78.86069
7	0.899273	17.76488	5.469104	76.76601
8	0.910509	19.10051	5.803031	75.09646
9	0.918769	20.13794	6.076609	73.78545
10	0.925143	20.92951	6.297674	72.77282

Cholesky Ordering: LIP UR S				
-----------------------------	--	--	--	--

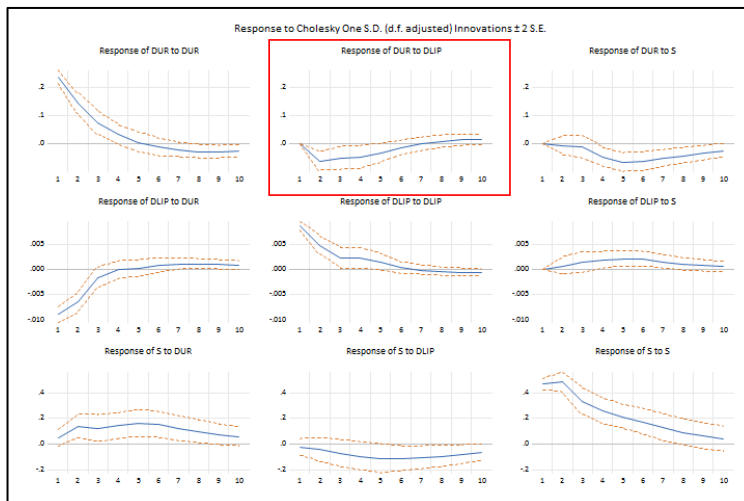
この表を(d)で求めた表と比較すると、多少の変化はあるものの、概ねあまり変化がないことがわかる。

(f) Var Window から、「View」→「Impulse Response」を選択する。そして、デフォルトの設定のまま OK を押す。すると、以下のグラフを得る。



ここで、正の鉱工業生産指数ショックに対する失業率のインパルス応答関数は(2,1)要素(2行目1列目)にプロットされている。このグラフより、問題文と同じ結論を得ることが出来る。

(g) 「Quick」 → 「Estimate VAR」 を選択し、内生変数として dur dlip s を選び、新しい VAR モデルの推定を行う。そして、Var Window から、「View」 → 「Impulse Response」 を選択して、デフォルトの設定のまま OK を押す。すると、 $\Delta lip_t$  と  $\Delta ur_t$  の順序づけを逆にした際のインパルス応答関数を以下のように得る。



ここで、正の鉱工業生産指数ショックに対する失業率のインパルス応答関数は(1,2)要素(1行目2列目)にプロットされている。このグラフより、鉱工業生産指数に対する正のショックは7四半期の失業率を低下させることがわかる。この結果は、(f)で求めた結果と近いものであるが、失業率の低下の程度は(f)での結果よりも小さい。また、 $\Delta ur_t$  が  $\Delta lip_t$  に対して因果関係で先行している順序付けを採用しているため、鉱工業生産指数に対する正のショックの  $\Delta ur_t$  への同時効果は存在しないことも、初期時点において  $\Delta ur_t$  が低下していないことから確認出来る。この点も、(f)で求めた結果とは異なる点である。

[8]

(a) まず、Command 内で問題文の変数を以下のように定義する。

$$\text{gener inf} = \log(\text{cpi}) - \log(\text{cpi}(-1))$$

次に、 $\Delta lip_t$  と  $inf_t$  が定常であるかどうかを ADF 検定によって判断する。「View」→「Unit Root Tests」→「Standard Unit Root Tests」を選択すると、以下の結果を得る。

Null Hypothesis: DLIP has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=14)				
			t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>				
Test critical values:			-7.300054	0.0000
	1% level		-3.461478	
	5% level		-2.875128	
	10% level		-2.574090	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(DLIP)				
Method: Least Squares				
Date: 08/29/19 Time: 21:27				
Sample (adjusted): 1950Q3 2012Q4				
Included observations: 210 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLIP(-1)	-0.400073	0.054804	-7.300054	0.0000
C	0.002809	0.000950	2.957476	0.0035
R-squared	0.203952	Mean dependent var		0.000135
Adjusted R-squared	0.200125	S.D. dependent var		0.014198
S.E. of regression	0.012698	Akaike info criterion		-5.885237
Sum squared resid	0.033539	Schwarz criterion		-5.853359
Log likelihood	619.9498	Hannan-Quinn criter.		-5.872350
F-statistic	53.29078	Durbin-Watson stat		1.862790
Prob(F-statistic)	0.000000			

上の表は  $\Delta lip_t$  に対する ADF 検定の結果である。 $t$  統計量は -7.30 であり、 $p$  値は 0.00 である。

従って、 $\Delta lip_t$  の単位根は棄却され、 $\Delta lip_t$  は定常であると言える。

Null Hypothesis: INF has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=14)				
			t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>				
Test critical values:			-2.941870	0.0424
	1% level		-3.461783	
	5% level		-2.875262	
	10% level		-2.574161	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(INF)				
Method: Least Squares				
Date: 08/29/19 Time: 21:29				
Sample (adjusted): 1961Q1 2012Q4				
Included observations: 208 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INF(-1)	-0.139890	0.047551	-2.941870	0.0036
D(INF(-1))	-0.279867	0.070180	-3.987848	0.0001
D(INF(-2))	-0.296223	0.066662	-4.443625	0.0000
C	0.001376	0.000572	2.406886	0.0170
R-squared	0.220708	Mean dependent var		-4.72E-06
Adjusted R-squared	0.209248	S.D. dependent var		0.005313
S.E. of regression	0.004724	Akaike info criterion		-7.853167
Sum squared resid	0.004553	Schwarz criterion		-7.788984
Log likelihood	820.7294	Hannan-Quinn criter.		-7.827214
F-statistic	19.25870	Durbin-Watson stat		1.955994
Prob(F-statistic)	0.000000			

上の表は  $\Delta ur_t$  に対する ADF 検定の結果である。 $\Delta ur_t$  が単位根を持つという帰無仮説の  $t$  統計量は -2.94 であり、 $p$  値は 0.04 である。従って、 $\Delta lip_t$  の単位根は棄却され、 $\Delta lip_t$  は定常であると言える。

(b) 「Quick」 → 「Estimate VAR」 を選択し、内生変数として dlip inf を選び、VAR モデルの推定を行う。次に、VAR window から「View」 → 「Lag Structure」 → 「Lag Length Criteria」を選択する。ここで、ラグの最大次数を 10 とすると、以下の結果を得る。

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	1246.971	NA	1.43e-08	-12.38777	-12.35490	-12.37447
1	1383.674	269.3249	3.82e-09	-13.70820	-13.60959	-13.66830
2	1391.160	14.60031	3.69e-09	-13.74289	-13.57855	-13.67639
3	1405.329	27.34970*	3.33e-09	-13.84407	-13.61399*	-13.75097*
4	1409.897	8.727401	3.31e-09	-13.84972	-13.55390	-13.73002
5	1414.223	8.179049	3.30e-09*	-13.85297*	-13.49141	-13.70667
6	1416.011	3.345027	3.38e-09	-13.83096	-13.40367	-13.65806
7	1417.592	2.925430	3.46e-09	-13.80689	-13.31386	-13.60738
8	1419.648	3.763928	3.53e-09	-13.78754	-13.22877	-13.56144
9	1423.474	6.928206	3.54e-09	-13.78581	-13.16130	-13.53311
10	1425.877	4.303841	3.59e-09	-13.76992	-13.07967	-13.49061

\* indicates lag order selected by the criterion  
 LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)  
 FPE: Final prediction error  
 AIC: Akaike information criterion  
 SC: Schwarz information criterion  
 HQ: Hannan-Quinn information criterion

ここで、「一般からの特定」法は LR に、BIC は SC に対応している。従って、「一般からの特定」法と BIC はラグ次数 3 を、AIC はラグ次数 5 を選択する。

(c) 「Quick」 → 「Group Statistics」 → 「Granger Causality Test」を選び、今回は変数として dlip と inf を選択する。また、ラグ次数を 3 とする。すると、以下の結果を得る。

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
INF does not Granger Cause DLIP	208	4.81908	0.0029
DLIP does not Granger Cause INF		5.10497	0.0020

従って、インフレ率から鉱工業生産指数へのグレンジャー因果性がないという帰無仮説の  $F$  統計量は 4.82 ( $p$  値は 0.003)、鉱工業生産指数からインフレ率へのグレンジャー因果性がないという帰無仮説の  $F$  統計量は 5.1050 ( $p$  値は 0.003) であることが確かめられる。

(d) 「Quick」 → 「Estimate VAR」 を選択し、ラグを 3 にして VAR モデルを推定する。そして、Var window にて「View」 → 「Variance Decomposition」を選択して、デフォルトの設定のまま OK を押す。すると、以下の表を得られる。

Variance Decomposition of DLIP:			
Period	S.E.	DLIP	INF
1	0.012281	100.0000	0.000000
2	0.014490	99.48729	0.512707
3	0.014697	99.14523	0.854766
4	0.014839	97.46892	2.531077
5	0.015024	95.08489	4.915107
6	0.015151	93.58435	6.415650
7	0.015273	92.28408	7.715917
8	0.015399	91.04460	8.955398

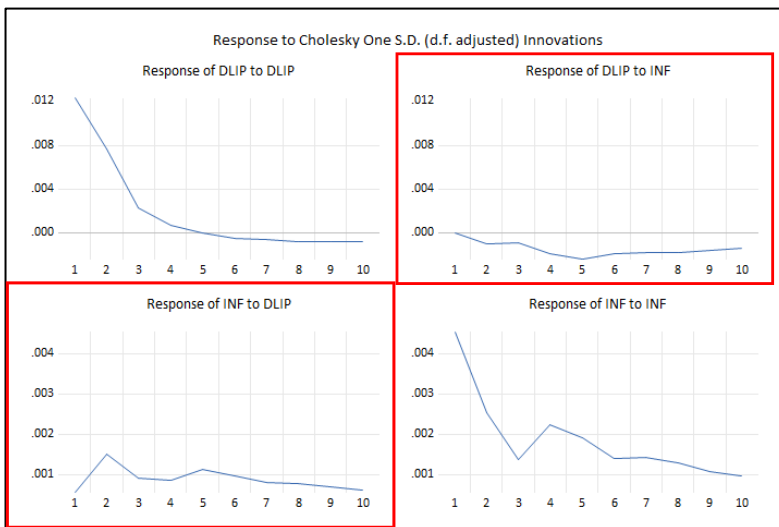
  

Variance Decomposition of INF:			
Period	S.E.	DLIP	INF
1	0.004588	1.689170	98.31083
2	0.005465	9.020054	90.97995
3	0.005717	10.87028	89.12972
4	0.006208	11.21267	88.78733
5	0.006602	12.93306	87.06694
6	0.006824	14.15157	85.84843
7	0.007022	14.72984	85.27016
8	0.007189	15.30726	84.69274

Cholesky Ordering: DLIP INF

従って、予測誤差分散分解の結果は問題文の表と一致する。

(e) Var Window から、「View」→「Impulse Response」を選択する。そして、デフォルトの設定のまま OK を押す。すると、以下のグラフを得る。



これらのグラフより、鉱工業生産指数に対する正のショックがインフレ率を増加させ、インフレ率に対する正のショックが鉱工業生産指数を減少させることが確認できる。しかし、この結果は AS-AD モデルとは整合的ではない。鉱工業生産に対するショックを総供給ショック、インフレ率に対するショックを総需要ショックとみなすと、鉱工業生産に対する正のショックは AS 曲線を右にシフトさせ、物価水準を引き下げる。従って、インフレ率は低下する。また、インフレ率に対する正のショックは AD 曲線を右にシフトさせ、生産量は上昇する。従って、鉱工業生産指数は上昇する。従って、得られた結果は、AS-AD モデルとは整合的でない。

(f) 「File」→「New」→「Program」を選択し、以下のコードを実行する。

```

var var8f.ls 1 3 dlip inf
var8f.append(svar) @f(1,2)=0
freeze(out1) var8f.svar
freeze(out2) var8f.impulse(25,imp=struct,t,a) dlip @ dlip inf
freeze(out3) var8f.impulse(25,imp=struct,t,a) inf @ dlip inf
freeze(out4) var8f.residcov

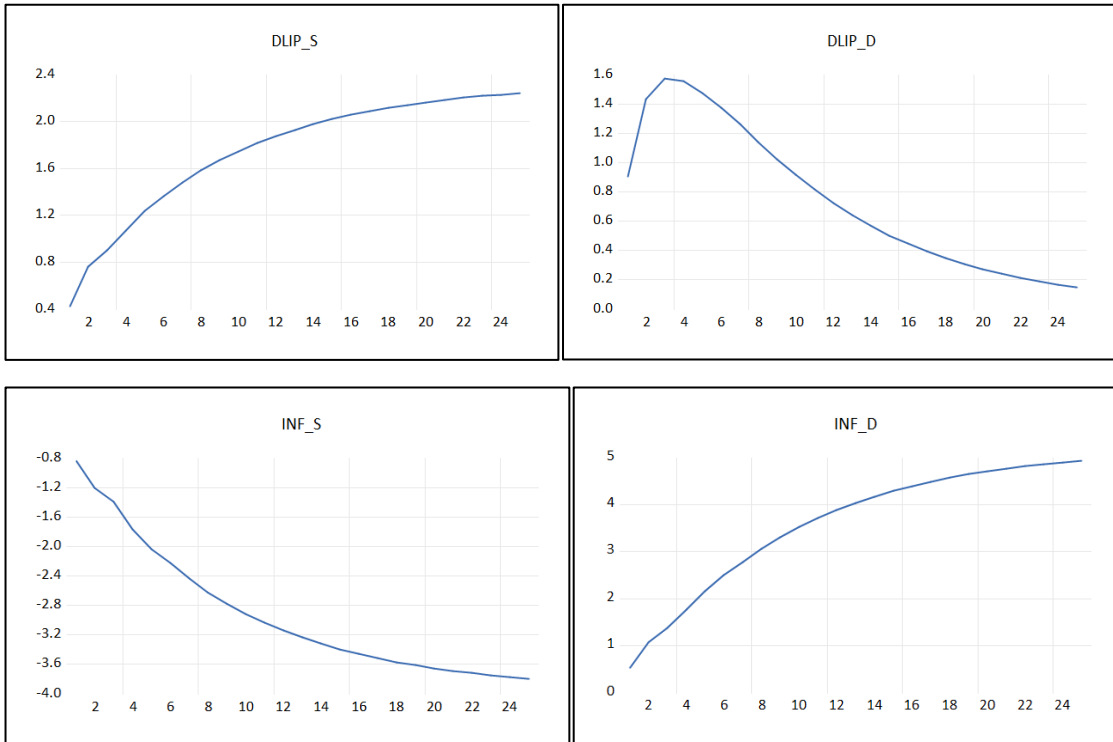
```

すると、Out1 には以下のようにショックを識別した結果が収納されている。

Structural VAR Estimates					
Date: 10/23/19 Time: 19:38					
Sample (adjusted): 1961Q1 2012Q4					
Included observations: 208 after adjustments					
Estimation method: Maximum likelihood via Newton-Raphson (analytic derivatives)					
Convergence achieved after 8 iterations					
Structural VAR is just-identified					
Model: e = Phi*Fu where E[uu]=I					
F =					
C(1)	0				
C(2)	C(3)				
		Coefficient	Std. Error	z-Statistic	
				Prob.	
C(1)		0.028671	0.001406	20.39608	0.0000
C(2)		-0.018139	0.001877	-9.665749	0.0000
C(3)		0.023833	0.001169	20.39608	0.0000
Log likelihood		1446.574			
Estimated S matrix:					
	0.005186	0.011132			
	-0.003872	0.002461			
Estimated F matrix:					
	0.028671	0.000000			
	-0.018139	0.023833			

また、Out2 と Out3 にはそれぞれ、 $\Delta lip$ と  $inf$ のインパルス応答関数の累積和が収納されており、Out4 には残差の分散共分散行列が収納されている。

次に、新しい Workfile を作り、そこに Out2 と Out3 に収納されているインパルス応答関数の累積和の系列をコピーする。そして、問題文の指示に従い、残差の標準偏差でインパルス応答関数の累積和を割る。なお、残差の標準誤差は、Out4 に収納されている残差の分散共分散行列より求めることが出来る。次に、Workfile Window の中にある、標準化されたインパルス応答関数の累積和を選択し、「View」→「Graph...」と進み、デフォルトの設定のまま OK を押す。この手続きを各インパルス応答関数に対して行う。すると、以下のようにして、標準化されたインパルス応答関数の累積和のグラフを得る。



ここで、1つ目のグラフ (DLIP\_S) は総生産ショックに対する鉱工業生産のインパルス応答の累積和をプロットしたものであり、2つ目のグラフ (DLIP\_D) は総需要ショックに対する鉱工業生産のインパルス応答の累積和をプロットしたものである。また、3つ目のグラフ (INF\_S) は総生産ショックに対するインフレ率のインパルス応答の累積和をプロットしたものであり、4つ目のグラフ (INF\_D) は総需要ショックに対するインフレ率のインパルス応答の累積和をプロットしたものである。

(g) (f)の図は基本的に AS-AD モデルで解釈できる。正の総生産ショックが生じた場合、AS 曲線は右にシフトする。その結果、インフレ率は減少するが、生産量 (鉱工業生産) は増加する。また、正の総需要ショックが生じた場合、AD 曲線は右にシフトする。その結果、インフレ率は上昇し、生産量 (鉱工業生産) も増加する。これらの AS-AD モデルの予測は、(f)で求めたインパルス応答関数の累積和を支持するものになる。

## [9]

(a)  $e_{yt}$ に関する制約式は、実質 GDP のみが実質 GDP への同時効果を与えることを示している。 $e_{mt}$ に関する制約式は、実質マネーサプライがシステム内のすべての変数の影響を受けることを示している。 $e_{zt}$ に関する制約式は、インフレ率のみがインフレ率への同時効果を与えることを示している。これらの説明は、経済学的にはあまり妥当ではない。例えば、IS-LM 分析に基づく、実質マネーサプライへのショックは実質 GDP への同時効果を持っていると考えられるからである。



(b) 丁度識別のための制約の個数は、 $(3^2 - 3)/2 = 3$ であるが、今回、行列内の制約の個数（0の個数）は4である。従って、このシステムは過剰識別されている。

過剰識別されたシステムの推定を行う手続きは、5.8において詳しく説明されている。今回のシステムの推定としては、まず制約のないVARモデルを推定し、無制約の分散共分散行列 $\Sigma$ を計算する。そして、 $B^{-1}$ に

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_{21} & 1 & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を代入して、

$$-\frac{T}{2} \ln |B^{-1} \Sigma_{\varepsilon} (B')^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\hat{\varepsilon}_t' B' \Sigma_{\varepsilon}^{-1} B \hat{\varepsilon}_t)$$

を最大にするよう、 $B$ と $\Sigma_{\varepsilon}$ の自由なパラメータに関する最尤推定を行う。なお、 $\Sigma_{\varepsilon} = B \Sigma B'$ 、 $\hat{\varepsilon}_t$ はOLSから計算された残差である。そして、最尤推定の結果、制約付きの分散共分散行列と $B^{-1}$ の推定値がそれぞれ求まることになる。

(c) 過剰識別されたシステムの制約の検定は、5.8（特に第4段階）において詳しく説明されている。まず制約付きの分散共分散行列の推定値 $\Sigma_R$ の元での尤度 $L_R$ と、無制約の分散共分散行列 $\Sigma$ の元での尤度 $L$ を用いて、尤度比検定統計量を求める。この尤度比検定統計量は自由度  $R$ （過剰識別の数）の $\chi^2$ 分布に従うので、尤度比検定統計量が自由度  $R$  の $\chi^2$ 分布の臨界値よりも大きい場合、過剰な制約は棄却される。このようにして、過剰識別の制約を検定することが出来る。

今回の研究者の場合においては、上の手続きで棄却されない過剰識別の制約を採用すべきである。