2017/11/22
新谷元嗣、藪友良、石原卓弥

6 章：共和分と誤差修正モデル

教科書 6 章 5 節のデータを用いて、エングル=グレンジャーの方法、誤差修正モデル、ヨハンセンの方法を学んでいこう。

1. データの読み込みと単位根検定

COINT6.XLS のデータを Workfile に読み込む。このファイルは教科書の表 6.1 の式から生成された人工的なデータである（下表参照）。データは、3 系列（Y、Z、W）あり、サンプルサイズは 100 である。表 6.1 から、全ての系列は I(1)である一方、線形結合

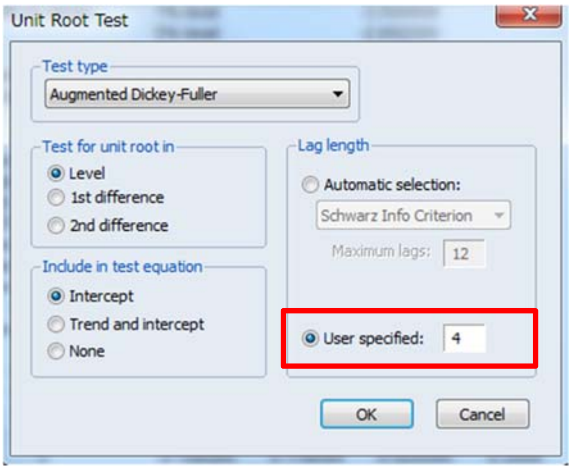
$$y_t + z_t - w_t$$

は定常となることが分かる。ここでは、分析者はデータ生成過程 DGP を知らないとし分析を進めよう。

表 6.1　仮想系列

	$\{ y_t \}$	$\{ z_t \}$	$\{ w_t \}$
確率トレンド項	$\mu_{yt}=\mu_{yt-1}+\varepsilon_{yt}$	$\mu_{zt}=\mu_{zt-1}+\varepsilon_{zt}$	$\mu_{wt}=\mu_{yt}+\mu_{zt}$
不規則項	$\delta_{yt}=0.5\delta_{yt-1}+\eta_{yt}$	$\delta_{zt}=0.5\delta_{zt-1}+\eta_{zt}$	$\delta_{wt}=0.5\delta_{wt-1}+\eta_{wt}$
系列	$y_t=\mu_{yt}+\delta_{yt}$	$z_t=\mu_{zt}+\delta_{zt}+0.5\delta_{yt}$	$w_t=\mu_{wt}+\delta_{wt}+0.5\delta_{yt}+0.5\delta_{wt}$

DGP を知らないため、変数の和分の次数を決定するための事前検定を行う。これら 3 系列に対して、4 期のラグを用いた ADF 検定を行う。まず、Workfile ウィンドウから系列 Y をダブルクリックして、Series ウィンドウを表示し、「View」→「Unit Root Test…」を選択する。そうすると、Unit Root Test Window が表示される（下画面参照）。



ここで 4 期のラグの ADF 検定を検定するため、User specified で次数 4 を選択する。ま

た、データはトレンドを含まないようにみえるので、Include in test equation は Intercept を選択しよう。そして、OK を押すと、以下の結果が得られる。

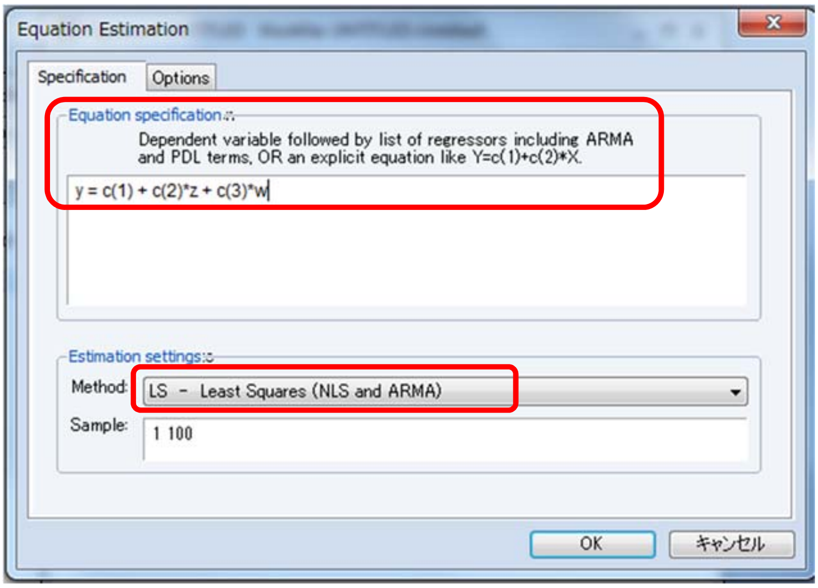
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y(-1)	-0.026908	0.025712	-1.046503	0.2982
D(Y(-1))	-0.140932	0.105267	-1.338801	0.1840
D(Y(-2))	0.089881	0.105196	0.854412	0.3952
D(Y(-3))	0.207974	0.105377	1.973623	0.0515
D(Y(-4))	0.210963	0.104210	2.024400	0.0459
C	-0.109366	0.118094	-0.926096	0.3569

R-squared	0.095804	Mean dependent var	0.008551
Adjusted R-squared	0.045006	S.D. dependent var	0.330393
S.E. of regression	0.322872	Akaike info criterion	0.637957
Sum squared resid	9.277950	Schwarz criterion	0.799254
Log likelihood	-24.30294	Hannan-Quinn criter.	0.703133
F-statistic	1.885989	Durbin-Watson stat	1.938298
Prob(F-statistic)	0.104683		

教科書の表 6.2 の結果と同様、y_{t-1}の係数は-0.026908 であり、その t 値は-1.46503 であると確認できる。したがって、系列 Y について単位根仮説が棄却できない。DF 検定（ラグなしの場合）の結果を得るためには、User specified で次数 4 ではなく、次数 0 を選択すればよい。また、系列 Z と W に関しても、次数 4 を用いて ADF 検定を行うと、単位根仮説が棄却できないことが分かる。

2. エングル=グレンジャーの方法

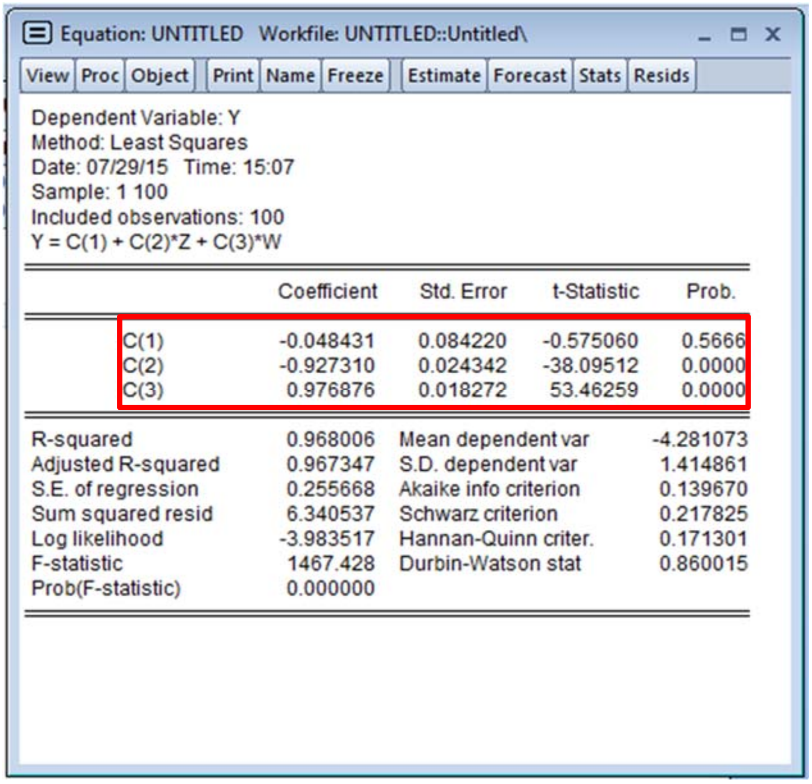
エングル=グレンジャーの方法を用いて、系列間の長期均衡関係を求めてみよう。Y を Z と W に、Z を Y と W に、W を Y と Z にそれぞれ回帰する。ここでは、Y を Z と W に回帰する（同様に、Z を Y と W、W を Y と Z に回帰した場合を自分でやってみよう）。まず、メニューウィンドウから、「Quick」→「Equation Estimation」を選択する。すると、Equation Estimation Window が表示される（下画面参照）。



ここで Equation specification に

y = c(1) + c(2)*z + c(3)*w

と入力しよう（もちろん y c z w と入力してもよい）。ここで c(1)、c(2)、c(3)は推定すべきパラメータである。また、OLS 推定量を求めたいので、Method は LS を選択した。そして、OK を押すと推定結果が得られる。



Equation: UNTITLED   Workfile: UNTITLED::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/29/15   Time: 15:07
Sample: 1 100
Included observations: 100
Y = C(1) + C(2)*Z + C(3)*W

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-0.048431	0.084220	-0.575060	0.5666
C(2)	-0.927310	0.024342	-38.09512	0.0000
C(3)	0.976876	0.018272	53.46259	0.0000

R-squared	0.968006	Mean dependent var	-4.281073
Adjusted R-squared	0.967347	S.D. dependent var	1.414861
S.E. of regression	0.255668	Akaike info criterion	0.139670
Sum squared resid	6.340537	Schwarz criterion	0.217825
Log likelihood	-3.983517	Hannan-Quinn criter.	0.171301
F-statistic	1467.428	Durbin-Watson stat	0.860015
Prob(F-statistic)	0.000000		

これは教科書 6 章 5 節の第 2 段階で求めた推定結果と一致している。これを数式の形で書くと、

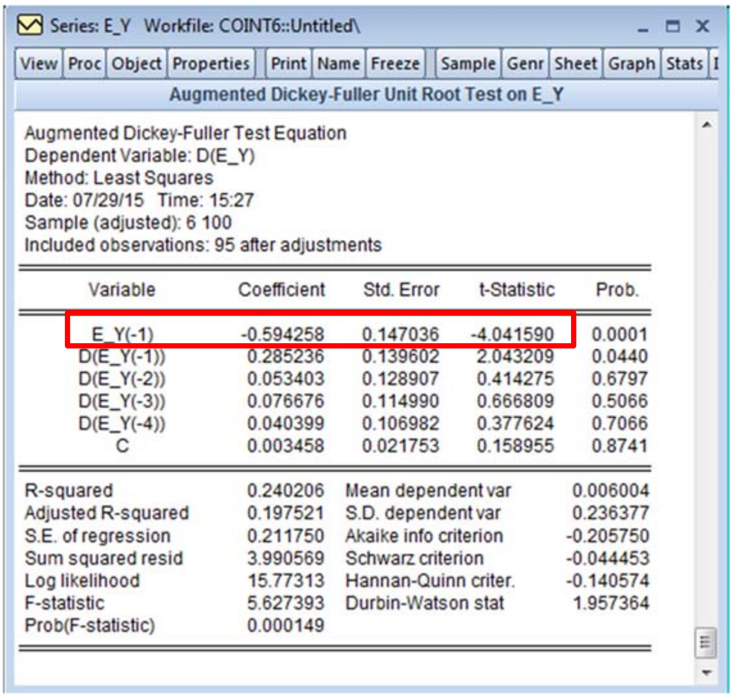
$$y_t = -0.048431 - 0.927310 z_t + 0.976876 w_t + e_{yt}$$
$$(-0.575060) \quad (-38.09512) \; (53.46259)$$

となる（括弧内は t 値である）。このとき、コマンドウィンドウに

genr e_y = resid

と入力して、回帰残差を e_y と名付けて保存しよう。同様に、Z と W を被説明変数として推定したときも、回帰残差を保存して e_z と e_w と名付けて保存しておくとよい。

回帰残差が得られたら、残差の 3 系列すべてに 4 期のラグを用いた ADF 検定を行おう（自分で DF 検定も行ってほしい）。ADF 検定は、1 節で説明した手順を思い出してほしい。残差(e_y)で 4 期のラグを用いた ADF 検定を行うと、以下の結果が得られる。これは表 6.3 とほぼ一致していることが確認できる。ここで e_y_{t-1} の係数は-0.594258 であり、その t 値は-4.041590 となる。ここで t 値は十分に小さいため、共和分が存在することを意味する。残差(e_z、e_w)についても ADF 検定を行うことで、表 6.3 の結果を再現できる。


Series: E_Y Workfile: COINT6::Untitled\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph | Stats

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on E_Y

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(E_Y)
Method: Least Squares
Date: 07/29/15 Time: 15:27
Sample (adjusted): 6 100
Included observations: 95 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
E_Y(-1)	-0.594258	0.147036	-4.041590	0.0001
D(E_Y(-1))	0.285236	0.139602	2.043209	0.0440
D(E_Y(-2))	0.053403	0.128907	0.414275	0.6797
D(E_Y(-3))	0.076676	0.114990	0.666809	0.5066
D(E_Y(-4))	0.040399	0.106982	0.377624	0.7066
C	0.003458	0.021753	0.158955	0.8741

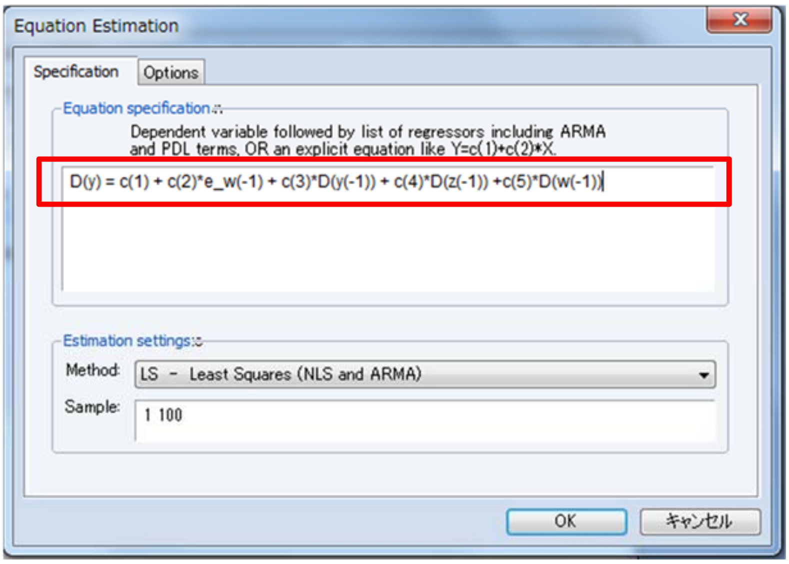
R-squared	0.240206	Mean dependent var	0.006004
Adjusted R-squared	0.197521	S.D. dependent var	0.236377
S.E. of regression	0.211750	Akaike info criterion	-0.205750
Sum squared resid	3.990569	Schwarz criterion	-0.044453
Log likelihood	15.77313	Hannan-Quinn criter.	-0.140574
F-statistic	5.627393	Durbin-Watson stat	1.957364
Prob(F-statistic)	0.000149		

3. 誤差修正モデル

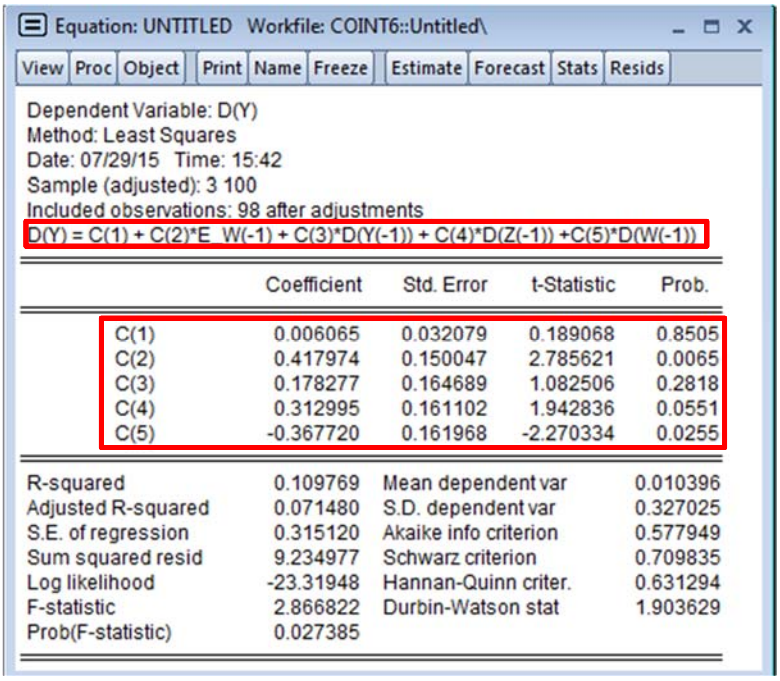
1 次のラグのある誤差修正モデルを推定しよう。回帰式は教科書の(6.37)(6.38)(6.39)式である。このモデルを推定するには、メインメニューから「Quick」→「Equation Estimation」を選択し、Equation specification に

d(y) = c(1)+c(2)*e_w(-1)+c(3)*d(y(-1))+c(4)*d(z(-1))+c(5)*d(w(-1))

と入力する。ここで、e_w は、先に W を Y と Z で回帰したときに保存しておいた回帰残差である。また、1 章で学んだ通り、d(x)という記号は( )内の系列の階差をとるという操作を表し、y(-1)は y の 1 期ラグをとる操作である。



ここで OK を押すと、1 次のラグを用いた誤差修正モデルが推定される。この結果は教科書(6.37)式の推定結果と一致している。他の回帰式についても同様の操作を行えばよい。



Equation: UNTITLED Workfile: COINT6::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: D(Y)
Method: Least Squares
Date: 07/29/15 Time: 15:42
Sample (adjusted): 3 100
Included observations: 98 after adjustments
D(Y) = C(1) + C(2)*E_W(-1) + C(3)*D(Y(-1)) + C(4)*D(Z(-1)) +C(5)*D(W(-1))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.006065	0.032079	0.189068	0.8505
C(2)	0.417974	0.150047	2.785621	0.0065
C(3)	0.178277	0.164689	1.082506	0.2818
C(4)	0.312995	0.161102	1.942836	0.0551
C(5)	-0.367720	0.161968	-2.270334	0.0255

R-squared	0.109769	Mean dependent var	0.010396
Adjusted R-squared	0.071480	S.D. dependent var	0.327025
S.E. of regression	0.315120	Akaike info criterion	0.577949
Sum squared resid	9.234977	Schwarz criterion	0.709835
Log likelihood	-23.31948	Hannan-Quinn criter.	0.631294
F-statistic	2.866822	Durbin-Watson stat	1.903629
Prob(F-statistic)	0.027385		

ここで均衡誤差 e_w の係数は 0.417 となっている。つまり、均衡誤差がプラスであれば、ΔY は増加することが分かる。

4. ヨハンセンの方法

同じデータを用いて、ヨハンセンの方法を実践してみよう（教科書 6 章 9 節を参照されたい)。1 節の分析において、すべての変数は I(1)であることを確認した。

VAR モデルの次数選択の問題を考えよう。まず、シムズ(Sims (1980))による尤度比検定によって、次数 2 から 4 までのラグ変数が重要かを検定する。このため、以下の VAR モデルを推定する。

1 次の VAR： $x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_{1t}$

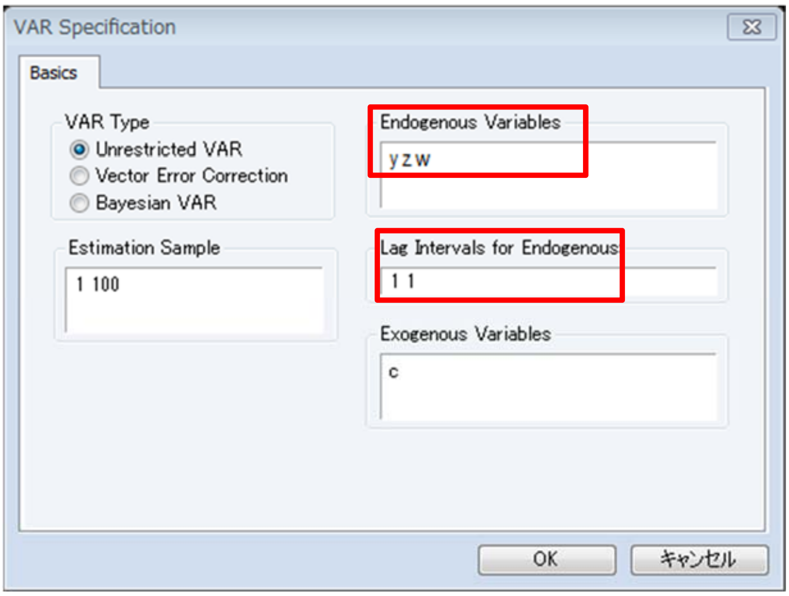
4 次の VAR： $x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + A_3 x_{t-3} + A_4 x_{t-4} + e_{2t}$

このとき、ラグ次数選択の尤度比検定は、

$$(T-c)(\ln|\Sigma_1| - \ln|\Sigma_4|)$$

を計算すればよい(教科書 6 章 9 節参照)。ここで、T はサンプルサイズ、c は制約のないシステムのパラメータ数、Σ_i は i 次の VAR モデルの残差の標本分散共分散行列である。

VAR モデルを推定するために、メインメニューから「Quick」→「Estimate VAR」を選択する。そうすると、以下の画面が表示される。



1 次の 3 変量 VAR モデルを推定するため、項目 Endogenous Variable に y z w と入力し、Lag Intervals for Endogenous に 1 1 と入力する。そして、OK を選択すると、以下の結果が得られる。残差の標本分散共分散行列の行列式は、推定結果の下部に Determinant resid covariance として記載されている。つまり、$|\Sigma_1|$=0.000423 となる。

	Y	Z	W
Y(-1)	0.770323	0.068673	0.274015
	(0.12797)	(0.15104)	(0.17473)
	[6.01974]	[0.45465]	[1.56823]
Z(-1)	-0.268715	0.989651	0.163130
	(0.12085)	(0.14265)	(0.16502)
	[-2.22348]	[6.93770]	[0.98856]
W(-1)	0.223432	-0.018495	0.753071
	(0.12593)	(0.14864)	(0.17194)
	[1.77432]	[-0.12443]	[4.37979]
C	-0.131434	0.121744	-0.084182
	(0.10475)	(0.12364)	(0.14302)
	[-1.25479]	[0.98470]	[-0.58860]
R-squared	0.951863	0.959295	0.968394
Adj. R-squared	0.950343	0.958009	0.967395
Sum sq. resids	9.240895	12.87446	17.22865
S.E. equation	0.311886	0.368131	0.425857
F-statistic	626.1799	746.2790	970.2385
Log likelihood	-23.08660	-39.50114	-53.92187
Akaike AIC	0.547204	0.878811	1.170139
Schwarz SC	0.652057	0.983664	1.274992
Mean dependent	-4.306119	-2.160368	-6.413939
S.D. dependent	1.399604	1.796491	2.358439
Determinant resid covariance (dof adj.)		0.000479	
Determinant resid covariance		0.000423	
Log likelihood		-36.93580	
Akaike information criterion		0.988602	
Schwarz criterion		1.303162	

次に、4 次の VAR モデルを推定するため、同様の操作を行う（ただし、Lag Intervals for

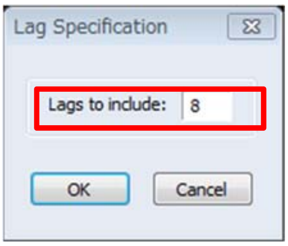
Endogenous に 1 4 と入力する)。そうすると、$|\Sigma_4|$=0.000297 が得られる（自分で確認してもらいたい)。

これらを用いて尤度比検定を行うと、統計量は

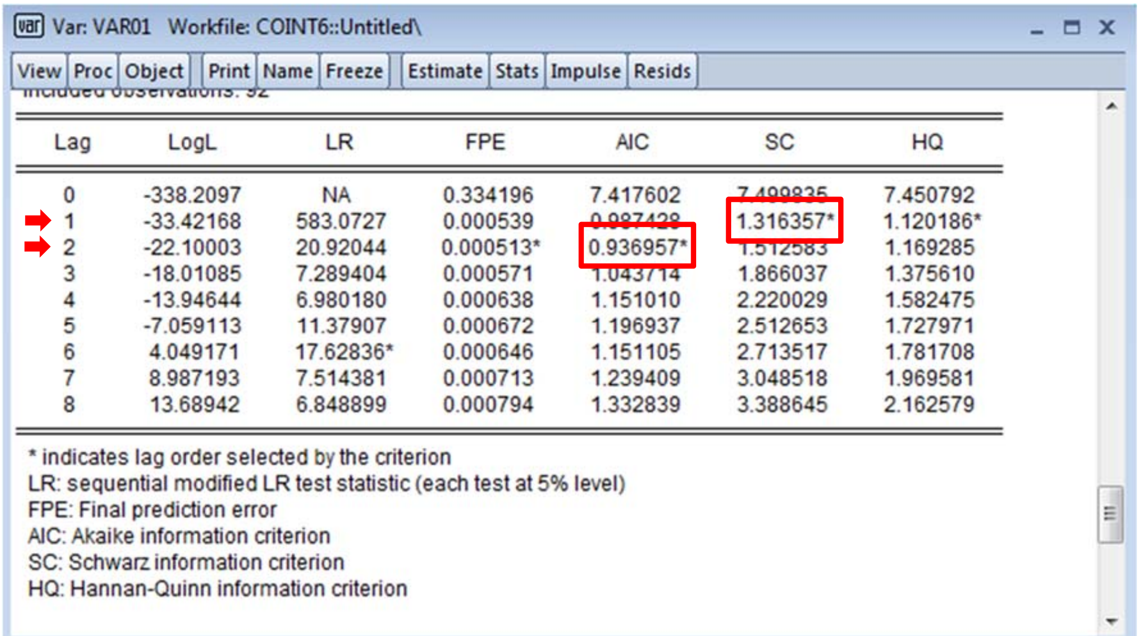
$$(100-39)(\ln(0.000423)-\ln(0.000297))=21.572$$

となる。ここでサンプル数 T は 100、制約のないシステムのパラメータ c は 39 である（4 次の 3 変量 VAR は、パラメータが 3×(12+1)=39 となる)。2 次から 4 次のパラメータが 0 という仮説なので、制約数は 27（=3×9）となる。自由度 27 のχ^2 分布を用いると、有意水準 5%で棄却することができない（有意水準 5%での臨界値は 40.1133)。

さらに、ラグの次数を他の選択基準で確認したいなら、Var Window において、「View」→「Lag Structure」→「Lag Length Criteria」を選択すると、下記の画面が表示されるので、Lags to include を 8 として OK しよう（これは最大のラグ次数が 8 まで考慮するということ)。



そうすると、下画面が表示されて、AIC と SBC などのラグ選択の結果も得ることができる。この結果から、AIC では 2、SBC（この表では SC）では 1 のラグが選択されることも確認できる。以下では、ラグ次数を 2 として分析を進めよう。

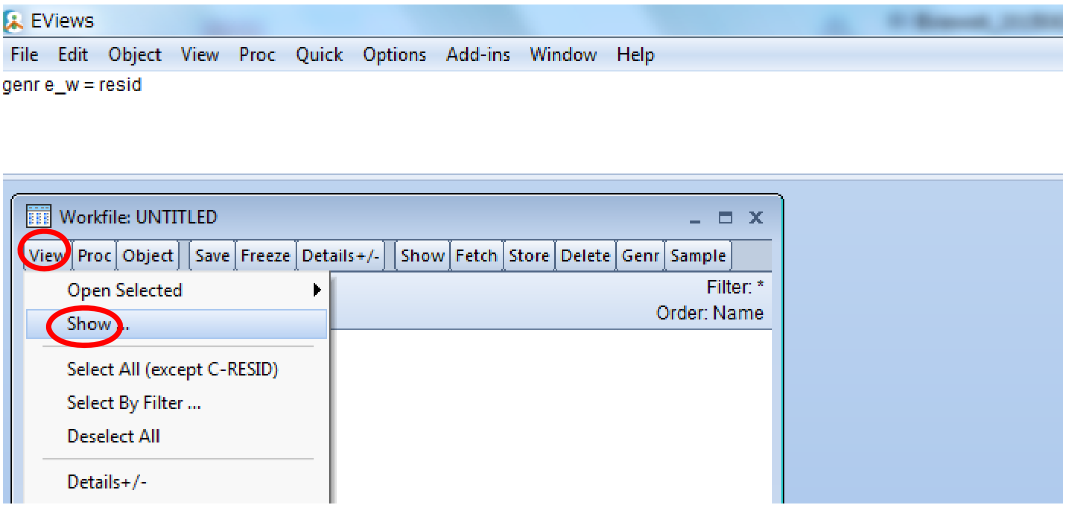

Var: VAR01 Workfile: COINT6::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Stats | Impulse | Resids

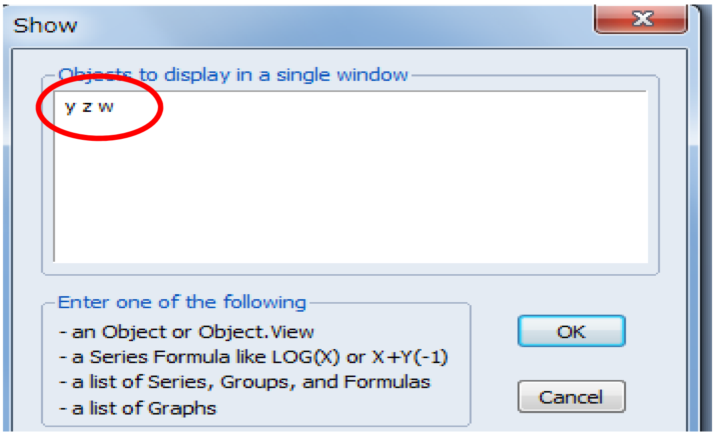
Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-338.2097	NA	0.334196	7.417602	7.499835	7.450792
1	-33.42168	583.0727	0.000539	0.987428	1.316357*	1.120186*
2	-22.10003	20.92044	0.000513*	0.936957*	1.512583	1.169285
3	-18.01085	7.289404	0.000571	1.043714	1.866037	1.375610
4	-13.94644	6.980180	0.000638	1.151010	2.220029	1.582475
5	-7.059113	11.37907	0.000672	1.196937	2.512653	1.727971
6	4.049171	17.62836*	0.000646	1.151105	2.713517	1.781708
7	8.987193	7.514381	0.000713	1.239409	3.048518	1.969581
8	13.68942	6.848899	0.000794	1.332839	3.388645	2.162579

* indicates lag order selected by the criterion
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
FPE: Final prediction error
AIC: Akaike information criterion
SC: Schwarz information criterion
HQ: Hannan-Quinn information criterion

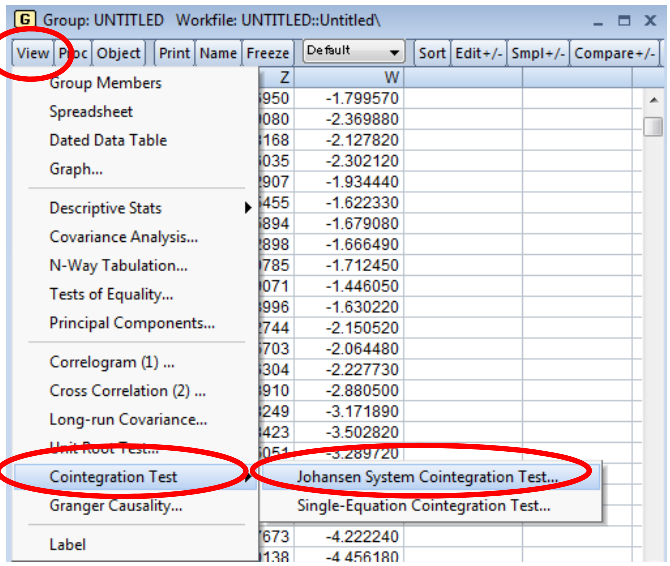
モデルを最尤法で推定し、πの階数を決定しよう。まず、Workfile Window から、「View」→「Show」を選択する。



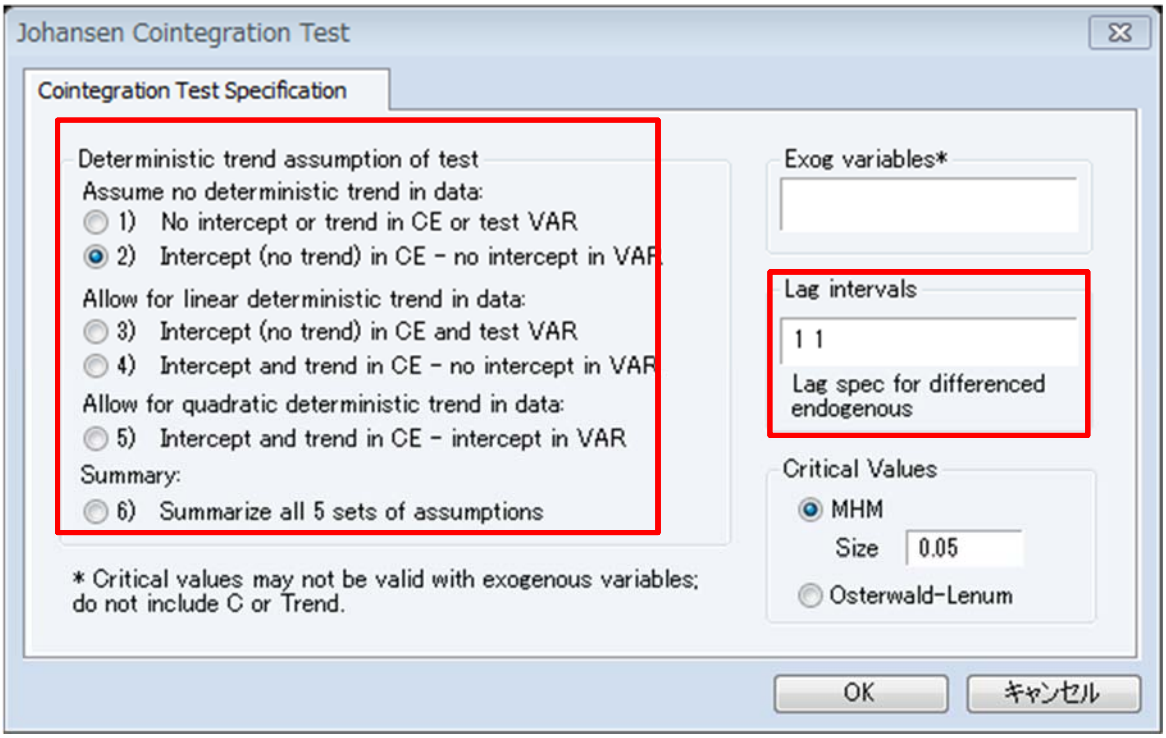
そうすると、以下の画面が表示されるので、Objects to display in a single window という部分に y z w と入力し OK を選択する。



そうすると、以下の画面が表示されるので、「View」→「Cointegration Test」→「Johansen System Cointegration Test」を選択する。



その結果、以下の画面が表示される。



推定するモデルは

$$\Delta x_t = A_0 + \pi x_{t-1} + \pi_1 \Delta x_{t-1} + \varepsilon_t$$

である。Lag intervals には 1 1 と入力する[1]。また、ここで行列 A_0 には共和分ベクトルの中に定数項が含まれる制約を課したいとする（共和分ベクトルには定数項がないと分かっているが、ここでは真のデータ生成過程を知らないとして定数項を含めよう）。ただし、データにはトレンドが存在するようにみえないので、2) Intercept (no trend) in CE を選択した（CE は cointegrating vector の略）[2]。

OK ボタンを押すと、下画面が表示される。たくさんの推定結果が表示されるので、ここでは結果の読み方を説明する。

[1] 2 次の VAR が選ばれたのに、なぜ 1 次のラグを選ぶか不思議に思うかもしれない。Lag Intervals の項目をみると Lag spec for differenced endogenous と書かれている。つまり、これは階差 Δx_t のラグ次数を聞いているのである。ここでは、説明変数に Δx_{t-1} だけを入れたいので、「1 1」とした。たとえば、3 次の VAR であれば、階差 Δx_t は 2 次のラグまでいれるので、「1 2」とすればよい。

[2] 共和分ベクトルから定数項を除きたいなら、1) No intercept or trend in CE を選ぶ。また、もしトレンドが存在するようなら、3)か 4)を選べばよい。たとえば、共和分ベクトルの中にトレンドをいれたいなら 4)を、共和分ベクトルは定数項だけなら 3)を選択する。

Date: 08/29/15 Time: 15:29
Sample (adjusted): 3 100
Included observations: 98 after adjustments
Trend assumption: No deterministic trend (restricted constant)
Series: Y Z W
Lags interval (in first differences): 1 to 1

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.325997	56.78592	35.19275	0.0001
At most 1	0.140322	18.12291	20.26184	0.0959
At most 2	0.033168	3.305551	9.164546	0.5252

Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.325997	38.66301	22.29962	0.0001
At most 1	0.140322	14.81735	15.89210	0.0731
At most 2	0.033168	3.305551	9.164546	0.5252

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b'*S11*b=I):

Y	Z	W	C
-4.111508	-4.255550	4.178258	-0.054715
2.314460	1.460767	-2.077255	-0.422367
0.038668	-0.408678	0.560490	2.401370

Unrestricted Adjustment Coefficients (alpha):

D(Y)	0.132867	0.059145	-0.027647
D(Z)	0.040321	0.074074	0.054267
D(W)	0.053254	0.154885	0.008142

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b'*S11*b=I):

Y	Z	W	C
-4.111508	-4.255550	4.178258	-0.054715
2.314460	1.460767	-2.077255	-0.422367
0.038668	-0.408678	0.560490	2.401370

Unrestricted Adjustment Coefficients (alpha):

D(Y)	0.132867	0.059145	-0.027647
D(Z)	0.040321	0.074074	0.054267
D(W)	0.053254	0.154885	0.008142

1 Cointegrating Equation(s): Log likelihood -33.77080

Normalized cointegrating coefficients (standard error in parentheses)

Y	Z	W	C
1.000000	1.035034	-1.016235	0.013308
	(0.03682)	(0.02704)	(0.12349)

Adjustment coefficients (standard error in parentheses)

D(Y)	-0.546284
	(0.12325)
D(Z)	-0.165782
	(0.15364)
D(W)	-0.218954
	(0.17933)

2 Cointegrating Equation(s): Log likelihood -26.36212

Normalized cointegrating coefficients (standard error in parentheses)

Y	Z	W	C
1.000000	0.000000	-0.711984	-0.488463
		(0.12512)	(0.85094)
0.000000	1.000000	-0.293952	0.484787
		(0.12473)	(0.84827)

Adjustment coefficients (standard error in parentheses)

D(Y)	-0.409394	-0.479025
	(0.13848)	(0.13206)
D(Z)	0.005659	-0.063385
	(0.17258)	(0.16457)
D(W)	0.139522	-0.000373
	(0.19149)	(0.18260)

行列πの特性根は、Eygenvalue と表示されており、

$$\hat{\lambda}_1 = 0.325997、\hat{\lambda}_2 = 0.140322、\hat{\lambda}_3 = 0.033168$$

となる。同様に、λ_{trace} は Trace Statistic と表示され、

$$\lambda_{\mathrm{trace}}(0) = 56.78592、\lambda_{\mathrm{trace}}(1) = 18.12291、\lambda_{\mathrm{trace}}(2) = 3.305551$$

となる。$\lambda_{\max}$ は Max-Eigen Statistic と表示され、

$$\lambda_{\max}(0,1)= 38.66301、\lambda_{\max}(1,2)= 14.81735、\lambda_{\max}(2,3)= 3.305551$$

である。教科書で説明された通り、λ_{trace}と$\lambda_{\max}$をみることで、πの階数は正しく 1 であると判断される。

最後に、基準化された共和分ベクトルと調整係数を分析しよう。共和分ベクトルの数が 1 の場合については、上画面の中央部に、1 Cointegrating Equation(s)としてまとめられている。たとえば、共和分ベクトル$\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)'$の推定値（$\beta_1$を 1 に基準化）と速度調整$\alpha = (\alpha_y, \alpha_z, \alpha_w)'$のパラメータの推定値は、それぞれ

(–0.013308, 1.0000, 1.035034, –1.016235)'、(–0.54284、–0.165782、–0.218954)'

になる。これは長期均衡誤差が

$$e_t = y_t - 0.013308 + 1.035034 z_t - 1.016235 w_t$$
$$(0.12349) \quad (0.03682) \quad (0.02704)$$

であることを意味している（括弧内は標準誤差）。この結果をみると、定数項はほぼ 0 であり、Z の係数は 1、W の係数は-1 と正しく推定されている。

共和分ベクトルは 1 が選ばれているが、共和分が 2 つある場合についても、推定結果が掲載されている。これは上画面の下部に 2 Cointegrating Equation(s)として、まとめられている。この場合、共和分ベクトルが 2 つあるので、速度調整のベクトルも 2 つある。ただし、λ_{trace}と$\lambda_{\max}$を用いた検定により、共和分ベクトルは 1 つしかないことが分かっているので、この推定結果を用いることはできない。