

連続時間の資本構成モデル*

辻 幸民

2003年11月12日(未定稿第1版)

2005年11月12日(第2版『三田商学研究』)

2015年7月20日(訂正版)

概要

本稿では、連続時間モデルにおける資本構成モデルをサーベイする。ここでの手法は、まず本稿で取り上げるモデルすべてを包含するような一般的なモデルを提示し、この一般的なモデルに様々な拡張・特殊性を加味することで個々のモデルを導出している。その際、数学的な厳密さにこだわることを避け、個々のモデルの経済学的な意義の説明に重点を置いた議論を展開する。また個々のモデルにシミュレーションを行い、モデルから決定される最適資本構成が現実企業の資本構成を実現できるかどうかを確認する。こうすることで、モデルが現実企業の動向を把握できる道具となり得るかどうかを判断できよう。

キーワード：資本構成、連続時間、倒産コスト、負債の再交渉、負債の再発行、オプション、デリバティブ

1 はじめに

本稿では、連続時間モデルにおける資本構成のモデルをサーベイしたい。ここでいう連続時間モデルとは、状態変数が幾何ブラウン運動で記述され、これをベースにしてモデルが組み立てられているもののことをいう。また資本構成のモデルとは最適な負債の量、つまり最適資本構成が内生的に決定されるモデルのことをいう。

ファイナンス理論の世界に占める連続時間モデルのウェイトは大きい。この発端となったのが、Black-Scholes(1973)やMerton(1973)のオプション理論であろう。オプション理論は、様々なデリバティブの価格評価に使われる様々なモデルを産み出すのみならず、実物経済をも対象にした一般均衡モデルへと発展したり、債券の価格評価のための様々なモデルを提供したりしながら、理論そのものの精緻化を進めて、今日まで非常に速いテンポで非常に高度なレベルへと発展したとって

* 本稿は、『三田商学研究』第48巻6号(2006年2月)および第49巻1号(2006年4月)、第49巻3号(2006年8月)における掲載論文を合冊し、いくつかの誤りを訂正したものである。

よいであろう。^{*1} このように現在多数存在する連続時間モデルの中で、企業金融・資本構成の問題を取り扱う一群のモデルが存在している。本稿では連続時間の資本構成モデルをできる限り体系的に網羅しつつ、個々のモデルの意義や問題点を整理してみたい。

サーベイとはいっても、本稿では普通のサーベイのような、総花的に多数のモデルをただ表面的に紹介するだけという手法は採らない。ここで採った手法は、本稿で取り上げるモデルすべてを包含するような一般的なモデルを提示し、この一般的なモデルに様々な拡張・特殊性を加味して、個々のモデルを導き出すというやり方である。その際、個々のモデルの経済的な意味や問題点、さらに従来から存在する資本構成理論の考え方との関係などが明確になるよう記述に配慮して、いたずらに数学的厳密さを追求することは差し控えた。筆者の知る限り、後者（議論のベースとなる数学の記述）に重点を置く文献はいくつか存在するが、前者（モデルの経済学的な意義の説明）に重点を置いた文献は皆無のような印象がある。この点が本稿の特徴である。まず2節では、Hull(2003)を参考にしてこれを若干拡張したものを、本稿で以下取り上げる個々のモデルの一般形として示す。

連続時間の資本構成モデルの端緒となったのは Merton(1974) である。この論文は、負債価値などの証券価値の導出にオプション理論を具体的に適応させた。ただしこの論文は、最適資本構成は存在しないという MM 命題の成立を前提にしているため、最適な負債量は決められない。その意味で、Merton(1974) は本稿でいう資本構成モデルの範疇に入らない。最適な負債量を決定できるようにするためには、MM 命題を拡張しなければならない。（連続時間モデルに限定しない）一般的な資本構成理論の世界ではその当時、最適資本構成を導くための手法として倒産コストモデルが一般的になっていた。これは負債のメリットとしての節税効果と、負債のデメリットとしての倒産コストとが丁度上手くバランスするように、最適な負債量を決定しようというモデルである。そこでこの倒産コストモデルを、Merton(1974) の連続時間モデルの下でも構築しようとする試みがいくつか登場する。これが Brennan-Schwartz(1978) や Turnbull(1979)、Kane-Marcus-McDonald(1984)(1985) などである。これらを本稿では Merton タイプのモデルと称する。

Merton タイプのモデルは2つに分類できる。1つは非常に正直に、ストレートに倒産コストモデルを展開したものと、もう1つは、従来の1期間モデルではない連続時間モデルであるが故に生じる問題点を併せて考慮したものである。前者が Brennan-Schwartz(1978) と Turnbull(1979) であり、後者が Kane-Marcus-McDonald(1984)(1985) である。本稿では、前者を Merton モデルのタイプ1と称し、後者をタイプ2と称する。3節ではこれら Merton タイプのモデルを紹介したい。まずオリジナルの Merton(1974) を簡単に要約した後、タイプ1の議論としてこれを倒産コストモデルに拡張し、さらにタイプ2の議論を加味する。

ところで連続時間の資本構成モデルが今日において盛んになったのは、1つの論文が契機となっている。これが Leland(1994) である。Black-Scholes や Merton などのオプション理論に依拠する

^{*1} この点については、Sundaresan(2000)を参照のこと。

限り、モデルの均衡条件は偏微分方程式となり、これをどう扱えばよいのかという数学上の問題に直面する。しかし単純化の仮定をもう1つ追加することで、均衡条件が常微分方程式になるようにすることができるなら、モデルとしての操作性は格段に向上する。偏微分方程式を解くより常微分方程式を解く方がはるかに易しいからである。このアイデアは Black-Cox(1976) に依るものである。Black-Cox(1976) は証券価値の定式化を導出するのに留まったが、これを資本構成モデルにまで拡張したのが Leland(1994) である。これ以後今日まで数々の資本構成モデルが登場しているが、これらほとんどがこの Leland(1994) の発展形であるとみなすことができる。そこで4節では Leland モデルを詳しく説明し、さらにその問題点も指摘しておきたい。

Leland モデルは最適資本構成を決定できる。このモデル自体は倒産コストモデルである。この Merton タイプのモデルも Leland モデルも形式的には同じ倒産コストモデルなのであるが、両者の差はどこにあるかという点、倒産発生 の定義にある。Merton タイプのモデルでは、オプションの権利行使日に相当するのが負債の満期日であり、この負債の満期日以外では事実上、キャッシュフローは一切発生しない。一般的にいう倒産とは、債権者に約束された支払うべき金額を支払えなくなることである。Merton タイプのモデルでは、負債の満期日以前のキャッシュフローをすべて無視しているので、倒産は負債の満期日でのみ発生し得る。これに対して Leland モデルでは、負債の満期日という予め設定された特別な時点を排除し、負債は満期無限大のコンソル債を想定する。コンソル債は連続的に瞬間瞬間で利子を支払い、倒産が発生しない限りすべての時点で、同様なキャッシュフローがあるものと事前的には想定できる。このような想定を時間同質の time homogeneous といい、この結果、均衡条件は常微分方程式で記述されることになる。それでは Leland モデルではどのようなときを倒産発生とみなすのか。それは株式価値がゼロになるようなときと定義される。将来のいつの時点で株式価値がゼロになるかは当然未知なので、Leland モデルでは倒産発生 の時点は予めわからない。形式的にはモデルの状態変数が株式価値をゼロにするようなある臨界値に到達するとき、倒産が発生するものと定式化される。

さて最適資本構成を決定する際の理論的ベースともいえる倒産コストモデルであるが、連続時間ではない一般的な資本構成理論の世界において、実は倒産コストモデルには致命的な欠陥があるとみなされている。それは、倒産コストをどれだけ大きく見積もっても、モデルから内生的に決まる最適な負債量が現実企業の負債量に比べて大きすぎるという点である。このことから今日、倒産コストモデルは現実企業を説明する有用な道具になり得ないと考えられている。連続時間モデルの倒産コストモデルである Leland モデルにおいても事情はまったく同じである。そこでモデルから内生的に決まる資本構成を現実企業に近づけるべく、何か別の要因を持ち込んで、倒産コストモデルをもう一段階発展させなければならない。一般的な資本構成理論では、この別の要因としてエージェンシーコストに関する研究が精力的になされた。しかし連続時間モデルの世界においては、エージェンシーコストを取り込んだモデルは近年いくつか存在するが、モデルの完成度として

は今一つといった印象である。^{*2} そこで本稿では、エージェンシーコストを考慮したモデルは時期尚早であるとみなして取り上げていない。

連続時間モデルの世界では、エージェンシーコスト以外の「別の要因」を扱うモデルが存在する。筆者の知る限り、それは2つあって、1つは負債の再交渉 debt renegotiation という要因、もう1つは負債の再構成 debt restructuring という要因である。Leland モデルのような倒産コストモデルでは、倒産発生時に即企業が清算されることを想定している。負債の再交渉とは、ある一定の条件を満たすときに、企業が倒産して清算されるのではなく、企業が生き延びることを前提に負債の条件緩和を交渉することをいう。もっとストレートにいうと、ある条件を満たすとき、負債の利子を値切るのである。債権者にしてみれば、倒産(清算)して倒産コストを被るよりも、たとえ利子を値切ったとしても企業が生き延びてくれる方が有利であるかもしれない。株主にとっても、倒産(清算)して取り分ゼロとなるより、生き延びてくれればいくらかの取り分を得るので有利である。次に負債の再構成とは、将来に負債の量を変更できることをいう。通常の資本構成モデルでは最適な負債の量を決める意思決定は1つの時点のみである。しかし将来になって状態が変化すれば、前の最適な意思決定が、変化後の状態の下でも最適であり続けるという保証はどこにもない。そこで当然のこと、将来の状態は変化するので、将来における負債の再構成の機会があるかないかで、今の意思決定は大きく変化し得るのである。

5 節では負債の再交渉を取り入れたモデルを展開する。これについては MellaBarral-Perraudin(1997) や MellaBarral(1999), Fan-Sundaresan(2000) などがあるが、本稿では Fan-Sundaresan(2000) を中心にして、Leland モデルの欠陥をできる限り修正するような形で議論を展開したい。また 6 節では負債の再構成を考慮したモデルを紹介する。この文献としては Fischer-Heinkel-Zechner(1989) と Goldstein-Ju-Leland(2001), Christensen-Flor-Lando-Miltersen(2000) があるが、本稿では Goldstein-Ju-Leland(2001) を取り上げる。これは Leland モデルでみられた問題をほぼ完全に修正したものと考えられる。Leland(1994) 以降の様々なモデルの中で、手法的にも注目すべき点があるので詳しく議論したい。

2 基本的フレームワーク

2.1 無裁定条件の導出

この 2 節では、連続時間の資本構成モデルを導出する際の理論的フレームワークを示す。これは今日、オプション理論などの連続時間モデルにおける価格評価の最も基本的なフレームワーク

^{*2} 連続時間モデルでエージェンシーコストを議論したモデルには、Leland(1998) と Morellec(2004), Parrino-Poteshman-Weisbach(2005), Childs-Mauer-Ott(2005) がある。これらモデルに対する批判的検討は別の機会に譲りたい。一言でいうなら、肝心のエージェンシーコスト発生メカニズムがモデル全体の中で曖昧ないし論理非整合と筆者には感じられる。

になっていて、すでにテキストなどで多数紹介されている。^{*3} ここではこれを、証券が産み出すキャッシュフローを考慮する形に拡張する。

N 個の状態変数 state variable が存在し、時点 t のこれら値をベクトル $X_t = (x_1(t), \dots, x_N(t))'$ で表す。当面のところ、時点を表す (t) は省略して、 i 番目の状態変数を単に x_i として記そう。 x_i は次の確率微分方程式で記述される。

$$dx_i = m_i dt + s_i dZ_i \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Z_i は N 個のウィナー過程 (標準ブラウン運動) $Z_i(t)$ を略記したもので、 $Z_i(t)$ と $Z_j(t)$ との相関係数 ($i \neq j$) を ρ_{ij} で表す。また m_i と s_i は x_i のドリフトとボラティリティである。これらはそれぞれ $\rho_{ij}(X_t, t)$, $m_i(X_t, t)$, $s_i(X_t, t)$ のような状態変数ベクトルと時点の関数であるが、関数表記は省略されている。

今、 $N+1$ 個の証券が存在し、 k 番目の証券の価格を f_k 、 k 番目の証券が産み出すキャッシュフローを c_k で表す。これらは、状態変数ベクトル X_t と時点 t の関数であり、 $f_k(X_t, t)$ と $c_k(X_t, t)$ であるとする。 k 番目の証券の収益率は同様の確率微分方程式で記述でき、便宜上、

$$\frac{c_k dt + df_k}{f_k} = \mu_k dt + \sum_{i=1}^N \sigma_{ki} dZ_i \quad k = 1, \dots, N+1 \quad (2)$$

の形で記しておこう。(2) 式の左辺は、 k 番目の証券の収益率であり、右辺の μ_k は確率微分方程式のドリフトで、この証券の期待収益率を意味し、 σ_{ki} はボラティリティである。 μ_k と σ_{ki} は、状態変数ベクトル X_t と時点 t の関数であるが、これらの表記は省略されている。

さて、 k 番目の証券への組入れ比率が $w_k (k = 1, \dots, N+1)$ のポートフォリオを構成すると (ただし、 $\sum_{k=1}^{N+1} w_k = 1$)、このポートフォリオの収益率は次のように記される。

$$\sum_{k=1}^{N+1} w_k \frac{c_k dt + df_k}{f_k} = \left(\sum_{k=1}^{N+1} w_k \mu_k \right) dt + \sum_{k=1}^{N+1} w_k \left(\sum_{i=1}^N \sigma_{ki} dZ_i \right)$$

このポートフォリオを無危険にするために、第 2 項をゼロとするよう

$$\sum_{k=1}^{N+1} w_k \sigma_{ki} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

を満たすポートフォリオ組入れ比率 $w_k (k = 1, \dots, N+1)$ が存在したとしよう。無危険ポートフォリオに対する要求利回りは無危険利子率 r であるから、

$$\sum_{k=1}^{N+1} w_k \frac{c_k dt + df_k}{f_k} = \sum_{k=1}^{N+1} w_k \mu_k dt = r dt$$

^{*3} 最も有名なものは Hull(2003) であろう。これについては辻 (1999) が詳しく解説している。この節の議論は、これらを本稿の目的に応じて修正したものである。

の成立しているときが均衡であり，無裁定となる。これを書き換えて次の条件を得る。

$$\sum_{k=1}^{N+1} w_k(\mu_k - r) = 0 \quad (4)$$

ここの無危険利子率 r であるが，これは瞬間的スポットレート instantaneous spot rate と称され，瞬間時間後に満期になるスポットレートである。これも同様に，状態変数ベクトル X_t と時点 t の関数 $r(X_t, t)$ とみなすことができるが，表記の単純化のため，単に r と記述されている。

さて (3) 式と (4) 式は $(N + 1)$ 本の方程式であり，組入れ比率ベクトル $(w_1, \dots, w_{N+1})'$ がゼロ以外の解を持つためには，任意の $\lambda_i (i = 1, \dots, N)$ について，

$$\mu_k - r = \sum_{i=1}^N \lambda_i \sigma_{ki} \quad k = 1, \dots, N + 1 \quad (5)$$

が成立すればよい。なお λ_i も X_t と t の関数 $\lambda_i(X_t, t)$ を略記したものである。

証券価格の関数 $f_k(X_t, t)$ に伊藤のレンマを適用すると，

$$df_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_i} m_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} \rho_{ij} s_i s_j \right) dt + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_i} s_i dZ_i \quad (6)$$

であるから，これと (2) 式とを比較して次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \mu_k f_k - c_k &= \frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_i} m_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} \rho_{ij} s_i s_j \\ \sigma_{ki} f_k &= \frac{\partial f_k}{\partial x_i} s_i \end{aligned}$$

これらを (5) 式に代入して書き換えると，無裁定条件とよばれる均衡条件が導出される。関数表記を省略せずに記しておく。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f_k(X_t, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k(X_t, t)}{\partial x_i} [m_i(X_t, t) - \lambda_i(X_t, t) s_i(X_t, t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f_k(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} \rho_{ij}(X_t, t) s_i(X_t, t) s_j(X_t, t) - r(X_t, t) f_k(X_t, t) + c_k(X_t, t) \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 Feynman-Kac 公式

均衡条件の (7) 式は偏微分方程式であるが，この条件に従う証券価格 f_k をどのように定式化すればよいか。この定式化が Feynman-Kac 公式と総称される式であり，ここでは結果のみをまとめておこう。

k 番目の証券の価格 $f_k(X_t, t)$ は，特定の時点 $T (> t)$ において $g_k(X_T)$ であるとする。すなわち，

$$f_k(X_T, T) = g_k(X_T)$$

である。このとき，Feynman-Kac 公式によれば，上の偏微分方程式の解 $f_k(X_t, t)$ は以下のとおりである。^{*4}

$$f_k(X_t, t) = E_t^* \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^l r(X_\eta, \eta) d\eta \right) c_k(X_l, l) dl \right] + E_t^* \left[\exp \left(- \int_t^T r(X_l, l) dl \right) g_k(X_T) \right] \quad (8)$$

$E_t^*(\cdot)$ は条件付き期待値であるが，この期待値は，任意時点 $l (\geq t)$ の状態変数ベクトル X_l が，次の確率微分方程式に従う場合の確率分布から評価されなければならない。

$$dx_i(l) = [m_i(X_l, l) - \lambda_i(X_l, l) s_i(X_l, l)] dl + s_i(X_l, l) dZ_i^*(l) \quad i = 1, \dots, N \quad (9)$$

ここの (9) 式は，前の (1) 式と比べると，Girsanov 定理により確率測度の変換がなされ，ウィナー過程は，変換前の確率測度における $Z(t)$ から変換後の確率測度下の $Z^*(t)$ に変更されている。同時に確率微分方程式のドリフトが，元の m_i から $m_i - \lambda_i s_i$ に変化している。

ところで上の定式化の前提は，時間の経過により予め決められた特定の時点 T が到来すると，すべてのことが終了するということを想定している。この意味で時点 T が唯一の終了条件であるということができよう。この場合の定式化が (8) 式である。しかし，以下の本稿の議論では，時点 T に加えて終了条件が T の前にも存在するような場合を取り扱わなければならない。特に状態変数ベクトル X_l が特定の値に達することが終了条件であるような場合が問題となる。現在を時点 t とすると，将来の状態変数ベクトル X_l の値は未知であるから，これは終了する時点が現在時点では未知の確率変数になることを意味する。

ここで次のような条件で定義される時点 ξ を考えよう。

$$\xi = \inf \{ l \geq t \mid w(X_l) \leq n \}$$

この条件の意味するところは，状態変数ベクトル X_l に依存した適当な関数 w と定数 n が与えられ，現時点 t においては $w(X_t) > n$ であるとすると，将来の状態変数ベクトルに依存した関数 $w(X_l)$ の値が初めて n 以下となるような時点，これが ξ である。このように定義される ξ と T の 2 つの時点が終了条件となる場合， $f_k(X_t, t)$ は次のように定式化される。^{*5}

$$\begin{aligned} f_k(X_t, t) = & E_t^* \left[\int_t^{T \wedge \xi} \exp \left(- \int_t^l r(X_\eta, \eta) d\eta \right) c_k(X_l, l) dl \right] \\ & + E_t^* \left[\exp \left(- \int_t^\xi r(X_l, l) dl \right) f_k(X_\xi, \xi) 1_{\{\xi \leq T\}} \right] \\ & + E_t^* \left[\exp \left(- \int_t^T r(X_l, l) dl \right) g_k(X_T) 1_{\{\xi > T\}} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

よく見ると直感的には尤もらしい定式化である。ここの $1_{\{\xi \leq T\}}$ は， $\xi \leq T$ であれば 1，それ以外のときは 0 を与える関数で， $T \wedge \xi$ という表記は， $\min\{T, \xi\}$ を略記したものである。もし予め $\xi > T$

^{*4} この式については，例えば Duffie(2001) の p.343 を参照せよ。

^{*5} この式については Karatzas-Shreve(1991) の p.367 を参照せよ。

であることがわかっているなら，時点 T が終了の時点であるから，(10) 式は (8) 式に帰着できる。またもし $\xi \leq T$ が既知であるなら，(10) 式の第 3 項の期待値はゼロとなり，時点 ξ までに発生するキャッシュフローの割引価値合計と時点 ξ の証券価格の割引価値との和として，現時点の証券価格が定式化される。

2.3 唯一の状態変数が証券価格でもあるとき

前では一般的なケースとして状態変数が N 個あるときを想定しているが，実用上は状態変数の数は 1 個ないしはせいぜい 2~3 個である。本稿では以下，状態変数が 1 個のみの場合を対象にしている。しかも唯一の状態変数が証券価格であるとき，前の議論はどのように単純化できるか。もちろん証券価格が状態変数にもなっているという議論は数多い。オプション理論の創始者といえる Black-Scholes(1973) や Merton(1973) など，オプションの原資産価格に相当する変数が証券価格である場合，みなこれに該当する。それでは唯一の状態変数が証券価格であるときの議論をここで確認しておこう。

状態変数は，1 個であるから $N = 1$ で x_1 である。前の (1) 式は

$$dx_1 = m_1 dt + s_1 dZ_1$$

である。この確率微分方程式に従う x_1 が証券価格でもあるなら，これを第 1 番目 ($k = 1$) の証券価格 f_1 とみなして， $f_1 = x_1$ とすることができよう。当然のことながら $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$ ， $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = 0$ ， $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$ である。これらを (7) 式に当てはめると，

$$m_1 - \lambda_1 s_1 - r f_1 + c_1 = 0 \quad (11)$$

が (7) 式から導出される第 1 番目の証券価格 (状態変数 x_1) の均衡条件ということになる。

(11) 式の意義は，任意の証券価格の均衡条件から λ_1 を消去できることにある。任意の証券を第 2 番目 ($k = 2$) の証券として， f_2 の均衡条件は (7) 式から形式的に

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} (m_1 - \lambda_1 s_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} s_1^2 - r f_2 + c_2 = 0$$

のように書くことができるが，この左辺第 2 項に現れる λ_1 は，(11) 式を書き換えて

$$\lambda_1 = \frac{m_1 + c_1 - r f_1}{s_1} \quad (12)$$

を満たさなければならないので，この関係を使うと

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} (r f_1 - c_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} s_1^2 - r f_2 + c_2 = 0$$

のように、任意の証券価格 f_2 の均衡条件から λ_1 を消去することができる。^{*6}

この操作は表面上は単純明解なことであるが、経済的な意味としては非常に大きい。 λ_i は、(5)式を見ると、証券のリスクプレミアム $\mu_k - r$ に対する、リスク感応度 σ_{ki} を伴うリスクファクターと解釈されるのが一般的になっているが、元来は数学上形式的に導入された変数(定数である必要はない)にすぎず、その経済的な意味は今一つ不明確である。意味不明の変数はできる限り排除するのがモデルの上で望ましいのはいうまでもないであろう。^{*7}

3 Merton タイプのモデル

3.1 Merton モデルの概要

Merton(1974) は、Black-Scholes(1973) が導出した有名なオプション価格式(以下 BS 式と称する)を使って、資本構成で登場する株式価値や負債価値を定式化した。通常 Merton(1974) モデルといわれるモデルの基本的考え方は次のようなものである。オプションの原資産に相当するのが企業の保有する資産であるとみなすなら、負債の存在する企業の株式は企業の資産価値を原資産価格とするコールオプションである。従ってそのコールオプション価格をもって株式価値とすればよい。連続時間の資本構成モデルを議論する出発点として、まず Merton モデルについて簡単に述べよう。

任意の t 時点における企業の保有資産の価値を A_t で表そう。この A_t が具体的に何であるかは今、問わない。これについては後の節で追々明らかになる。この企業には時点 T で満期となる負債が存在し、時点 T で返済額 M が債権者に支払われるとする。説明の単純化のため時点 T で企業は清算されるとしよう。すると、時点 T において企業は保有資産の売却代金 A_T の現金を保有することになるので、この A_T から負債の返済額 M を債権者に支払い、残りの $A_T - M$ が株主に帰属することになる。もし A_T が M 未満であるなら、負債の返済を完了できないので貸倒れ(デフォルト)が発生し、企業の支配権は株主から債権者に移転する。この意味は、株主は有限責任であるから、マイナスの値となる $A_T - M$ の金額を支払う義務は免除され、代わりに残余請求権(= 企業の支配権)を失うということである。^{*8} すなわち、貸倒れ発生時、株主に帰属する利益はゼロとなる。以上のことから、時点 T における株主の受取るキャッシュフローは $\max\{A_T - M, 0\}$ のように書ける。これは権利行使時点 T における、権利行使価格 M 、原資産価格 A_T のコールオプションがもたらすキャッシュフローに等しい。このことから負債の存在する企業の発行する株式は、企業の保

^{*6} 例えば状態変数が金利(利子率)ならばどうであろう。本文中の f_k はあくまでも価格であることが必要で、金利とすると本文の議論は当てはまらない。 f_k が金利であるなら、その証券の収益率を $(c_k dt + df_k)/f_k$ のように記すことができないからである。一般に状態変数が証券価格でない場合、例えば無危険利子率や(証券価格の)ボラティリティが状態変数である場合、これらに対応する λ_i は消去できずにモデルの中に残ってしまう。

^{*7} この 2 節のモデルが対象とする世界では、 r や λ_i は所与であり、これらを決定することはできない。これらを決定するには、消費の決定など、経済の実物セクターを含んだより広い範囲の一般均衡モデルが必要になる。

^{*8} 一般に残余請求権とは所有権を意味し、これは所有者としての支配権をもたらす。この点については辻(2002)第6章を参照願いたい。

有する資産価値を原資産価格とするコールオプションである。

他方、負債はどうであろう。時点 T における債権者へのキャッシュフローは $\min\{M, A_T\}$ のように表せる。この意味は次のとおりである。債権者は、 A_T が M 以上であれば返済額 M を受取り、貸倒れが発生すれば、企業の支配権をもって企業の保有資産全額 $A_T (< M)$ を得る。債権者のキャッシュフローを次に述べるような適当な方法で価値評価すれば、任意時点 t の負債価値が導かれる。

実は Merton モデルでは、キャッシュフローは負債の満期返済時点 T のみで発生し、その他の時点では一切発生しない。そこで想定されている負債は割引債で、 M は負債の元本である。つまり期中と満期の利子支払は存在しない。そして企業の保有資産は期中にキャッシュフローを一切産み出さず、株主への配当も期中はゼロである。これらの想定から 2 節の議論を用いて、Merton モデルの株式価値と負債価値を導出しよう。

原資産価格としての企業の資産価値を

$$dA_t = \mu A_t dt + v A_t dZ_1 \quad (13)$$

のような確率微分方程式で記述する。企業の資産はキャッシュフローを一切産まないのであるから、 μ は企業資産の価値変化率のみならず期待収益率をも意味する。この A_t がモデル唯一の状態変数であり、 $N = 1$ で $x_1 = A_t$ 、そして状態変数のドリフト m_1 とボラティリティ s_1 はそれぞれ $m_1 = \mu A_t$ 、 $s_1 = v A_t$ に置き換えられる。今、第 1 番目の証券価格 f_1 がこの企業の資産価値であるとしよう。すなわち、企業の資産価値は証券価格でもありかつ状態変数でもある ($f_1 = x_1 = A_t$)。すると 2.3 節の議論が適用できる。また $c_1 = 0$ であるから、(11) 式の均衡条件は

$$\lambda_1 = \frac{\mu - r}{v} \quad (14)$$

のように書き換えることができ、これを使って他の証券価格の均衡条件から λ_1 を消去することができる。

任意時点 t の株式価値 S_t を第 2 番目の証券価格 f_2 と考えて、その関数を $S_t = S(A_t, t)$ と記そう。負債の満期時点 T の価値は $S(A_T, T) = \max\{A_T - M, 0\}$ である。時点 T を除いて株式のキャッシュフローはゼロ ($c_2 = 0$) であるので、 S_t に関する均衡条件は

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial A_t} r A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - r S = 0 \quad (15)$$

のように書ける。他方、時点 t の負債価値 B_t も株式と同様に考えて、*⁹ その関数を $B_t = B(A_t, t)$ で表す。時点 T の価値は $B(A_T, T) = \min\{M, A_T\}$ であり、時点 T 以外のキャッシュフローはゼロで

*⁹ もう少し厳密にいうと、ここでは状態変数が 1 つであるから、均衡条件 (5) 式を導出するのに必要な証券の数は少なくとも 2 つである。今、企業の資産価値 A_t と株式価値 S_t がこの 2 つの証券価格とすると、負債価値 B_t は余分・重複 redundant ということになる。市場が完備であれば、余分な証券についても同様に価格形成するはずであるから、同様な均衡条件が成立する。

あるから，その均衡条件は次のような式として書ける。

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial A_t} r A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - r B = 0 \quad (16)$$

均衡条件が (15) 式と (16) 式であるので，これらと整合的になるよう Feynman-Kac 公式を用いて株式価値と負債価値を求めればよい。ここでは，時点 T 以外のキャッシュフローがゼロ ($c_k = 0$) であり，かつ無危険利子率 r が一定であるから，(8) 式は大幅に単純化されて，

$$\begin{aligned} S(A_t, t) &= e^{-r(T-t)} E_t^* [S(A_T, T)] \\ B(A_t, t) &= e^{-r(T-t)} E_t^* [B(A_T, T)] \end{aligned} \quad (17)$$

のように定式化できる。この期待値を評価するのに必要な A_T の確率分布は

$$dA_t = r A_t dt + v A_t dZ_1^* \quad (18)$$

より求めるが，ここでは r と v が定数であることから，次のような A_t を条件とした正規分布になる。

$$\ln A_T \sim N\left(\ln A_t + \left(r - \frac{v^2}{2}\right)(T-t), v^2(T-t)\right) \quad (19)$$

以上のことから株式価値と負債価値は

$$\begin{aligned} S(A_t, t) &= A_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} MN(d_2) \\ B(A_t, t) &= e^{-r(T-t)} MN(d_2) + A_t [1 - N(d_1)] \\ d_1 &= \frac{\ln(A_t/M) + \left(r + \frac{v^2}{2}\right)(T-t)}{v\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - v\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

という具合に計算することができて，株式価値は BS 式のコールオプション価格式と同じ式になることがわかる。株式価値と負債価値を合計したものが企業価値 V_t であるが，これは

$$V_t \equiv S(A_t, t) + B(A_t, t) = A_t$$

であるから，企業価値は負債の大きさにかかわらず常に A_t に等しくなる。このことは MM 命題が成立していることに他ならない。

ここで述べた Merton モデルが MM 命題の成立を導くのは当然のことである。時点 T における株主と債権者へのキャッシュフローを合計すると，

$$\max\{A_T - M, 0\} + \min\{M, A_T\} = A_T$$

であるから，貸倒れ発生の有無にかかわらずこれらキャッシュフロー合計は A_T である。上式左辺は，時点 T の株式価値と負債価値の合計，つまり時点 T の企業価値である。この企業価値が時点 T においては保有資産の価値 A_T に等しく，さらに時点 T に至る期中の任意時点において，保有資

産は一切キャッシュフローを産み出さず、株式や負債のキャッシュフローもゼロなので、任意時点 t の企業価値は、その時点の保有資産の価値と等しくなければならない。つまり $V_t = A_t$ である。

MM 命題が成立するモデルにおいては、最適な負債の大きさを決めることはできない。もちろん Merton(1974) は、資本構成を議論するのが論文の目的ではない。資本構成モデルであるためには、最適な負債の大きさを決定できる必要がある。そのための拡張の一つが倒産コストモデルである。そこで Merton モデルを倒産コストモデルの形に拡張してみよう。Merton モデルの倒産コストモデルへの拡張には 2 種類ある。1 つは、ここで述べたモデルの上に単純に節税効果と倒産コストを加味するものであり、以下ではこれをタイプ 1 と称する。もう 1 つは、節税効果と倒産コストを考慮する点で確かに倒産コストモデルではあるが、企業の資産価値 A_t について、タイプ 1 とは異なる想定をするモデルが存在する。これを以下ではタイプ 2 と称する。

3.2 Merton モデルの拡張：タイプ 1

この小節では節税効果と倒産コストを新たに考慮して、前で述べた Merton モデルを倒産コストモデルに拡張してみよう。この試みは Brennan-Schwartz(1978) や Turnbull(1979) などによる。

倒産コストモデルは元々、離散型時間の期首と期末からなる 1 期間モデルにおいて MM 命題を拡張した。1 期間モデルの倒産コストモデルによると、負債が存在しないときの企業価値 V_U に負債の節税効果による価値を加え、倒産コストによる価値を減じると、負債が存在するときの企業価値 V_L が得られる。 V_U と V_L の対象となる企業は、負債の有無による違いがあるだけで、同じ企業であることが想定される。同じ企業であるとは、企業の保有資産が同じであって、企業の産み出す将来キャッシュフローが同じであることが予想できることをいう。非常に単純にいつてしまえば、これら 2 つの同じ企業を比べると、負債の有無による差異は、貸倒れが発生しなければ節税効果を享受できるようになるという点と、貸倒れが発生し得るので倒産コストを負担しなければならないという点にある。従って V_L の定式化は、負債の有無による差異を除いた、企業の保有資産が元来産み出すことのできるキャッシュフローを価値還元した部分 V_U に、負債が存在することで生じるキャッシュフローの差異部分の価値を加減すればよいことになる。

前の小節で展開した Merton モデルの A_t は企業の資産価値と称していたが、倒産コストモデルの観点からみると、これは V_U に相当する変数である。すなわち、負債が存在することで生じる差異を除いた部分を A_t という変数に集約させるのである。連続時間の資本構成モデルにおいて、この A_t という変数は負債のないときの企業価値 unlevered firm value と称されることも多いが、それはこのような理由による。^{*10} Merton モデルでは MM 命題が成立し、 $A_t = V_t$ であった (V_t は株式価値

^{*10} A_t を負債のないときの企業価値 unlevered firm value と称するのが、余分な説明を要しない最も無難な言い方であることは確かである。ただ具体的にそれが何なのかというともう 1 つ稊然としない。本稿ではこの A_t にもう少し具体性を持たせるため、企業が保有するあらゆる資産の集合体の価値として「保有資産の価値」と称している。この「保有資産の価値」の経済的な意味や企業価値との関係については辻 (2002) 第 3 章を参照願いたい。

と負債価値の合計としての企業価値)。これは負債の存在による差異が生じないことを意味している。しかし連続時間においても、倒産コストモデルの下で A_t と V_t は一致せず、節税効果の価値と倒産コストの価値の分だけ両者は乖離する。それでは節税効果の価値はどのように求められるか。これについてまず説明しよう。

ここで想定されている負債は割引債である。満期は T 時点、額面は M である。この負債の発行時点を 0 時点とし、そのときの負債価値を B_0 で表そう。割引債であるから、現在時点から満期時点 T までの期間中、利子は発生しない。法人税は一般に負債の利子支払の損金算入が認められ、これが節税効果をもたらす。法人税率を τ とすると、(貸倒れが発生しなければ) 負債の利子支払 1 単位当たり τ の法人税額が節約される。しかし割引債の場合は負債の利子支払が存在しないので、節税効果をどのように見積もればよいのであろうか。現実の法人税法では通常、割引債の発行価格 B_0 と返済額 M との差額が利子とみなされる。この利子相当額を適当に期間配分した金額が課税対象所得の計算に際して控除されるので、負債が割引債であっても控除金額 1 単位当たり τ の節税効果が発生する。このような現実の法人税を、ここでは連続時間モデルに則して次のようにモデル化する。^{*11}

まず割引債の利回り y を $y = \frac{1}{T} \ln(\frac{M}{B_0})$ のように定義する。この y を使って任意時点 $t(0 < t < T)$ の割引債価値を $B_0 e^{yt}$ として計算しよう。これを法人税計算上の便宜的な割引債価値として \hat{B}_t で表す (つまり $\hat{B}_t = B_0 e^{yt}$ 。 \hat{B}_t は均衡の市場価値ではない)。すると、 $y\hat{B}_t$ が時点 t の負債利子であると考えることができよう。連続時間モデルとして、法人税も連続的に支払われることが想定されているなら、任意時点 t では $\tau y\hat{B}_t$ の節税額が満期時点 T まで連続的に発生しているものとみなせる。それでは次に、満期時点 T に至るまでの期間中発生した節税額の累積額はいくらになっているであろうか。途中時点で発生した節税額は、無危険利率 r で (安全資産の) 市場で運用されるものとしよう。この運用益に対しては税率 τ で課税されるものとする、 T 時点までにおける節税額の累積額 TS は次のような式で計算される。

$$TS = \int_0^T \tau y \hat{B}_t e^{r(1-\tau)(T-t)} dt = \frac{\tau y}{y - r(1-\tau)} (M - B_0 e^{r(1-\tau)T})$$

これが負債の満期時点 T における節税効果の価値である。ここで 1 つ注意すべきは、 T 時点に至る任意時点で常に $\tau y\hat{B}_t$ の節税効果が発生しているという点である。これは対称的法人税 (英語では full tax-loss offset provision という) を想定していることの帰結である。対称的法人税とは、課税対象所得がマイナスのとき、マイナスの法人税額がそのまま支払われることを想定する法人税である。すなわち、この金額が政府から企業に還付金として支払われる。もちろん現実にこのような形の法人税は存在しないが、これを想定すると、満期前の貸倒れ (倒産) を考慮しない限り、節税効果は確実に税率 \times 利子支払額で表されることになって、モデルの簡潔性の上で極めて有用である。そのため連続時間の資本構成モデルでは、ほぼ例外なくこの対称的法人税が想定されている。

^{*11} ここで採用された節税効果の計算方法は、Kane-Marcus-McDonald(1984)(1985) に依っている。

表 1 満期時点 T での負債価値と株式価値：タイプ 1

	$B(A_T, T)$	$S(A_T, T)$	V_T
$A_T + TS \geq M$	M	$A_T - M + TS$	$A_T + TS$
$M > A_T + TS$	$(1 - k)A_T$	0	$(1 - k)A_T$

この節税効果と対比すべき倒産コストの方であるが、負債の満期時点 T における倒産コストの大きさを kA_T で表そう。ここの k は定数で $0 < k < 1$ である。倒産コストの大きさは元来、企業価値の関数として定式化する方が妥当かもしれないが、連続時間の資本構成モデルではほぼ例外なく A_T の関数として定式化される。これは計算上の便宜のためである。詳しくはシミュレーションのところで述べるが、前で述べた節税効果の想定の下では、厳密には解析解を求められない。モデルの簡便性を維持するため、ここでも慣習に従って倒産コストは A_T の関数であるとする。

さて Merton タイプのモデルでは、負債の満期時点 T に至る前の時点において、負債に対する支払義務はないので、貸倒れは発生しない。貸倒れが発生し得る時点は唯一 T のみである。時点 T においては債権者に M を支払わなければならない。この M が支払えないとき、貸倒れが発生し、企業は倒産して倒産コストが生じる。Merton モデルと同様、倒産の有無にかかわらず時点 T で企業は清算されるものとする。この企業は当然時点 T 以降に節税効果を楽しむことができないので、時点 T における保有資産の売却金額は A_T である。この売却代金以外に、企業には時点 T までに過去から累積された節税効果の価値 TS を保有している。従って企業の保有現金は $A_T + TS$ であるので、これが M より大きければ負債への支払義務を履行できる。このとき債権者は M を受取り、株主は残りの $A_T - M + TS$ を受取る。これが表 1 の 2 行目に記されている。しかし $A_T + TS$ が M よりも小さければ、貸倒れが発生して倒産となる。企業の支配権は債権者に移転して、債権者は A_T の中から倒産コスト kA_T を負担した残りを受取る。このとき株主は有限責任であるから受取り額はゼロである。なお倒産時には節税効果は喪失し、 TS はゼロになることを想定しておこう。以上のことが表 1 の 3 行目に書かれている。

形式的には、表 1 の $S(A_T, T)$ と $B(A_T, T)$ を Feynman-Kac 公式の (17) 式に適用し、 A_T の確率分布には (19) 式を用いて期待値を評価すれば、任意時点 t の株式価値と負債価値を導出できる。結果のみを記しておこう。

$$S(A_t, t) = A_t N(d_1) - (M - TS) e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (20)$$

$$B(A_t, t) = e^{-r(T-t)} M N(d_2) + (1 - k) A_t [1 - N(d_1)] \quad (21)$$

$$d_1 = \frac{\ln(A_t / (M - TS)) + \left(r + \frac{v^2}{2}\right)(T - t)}{v \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - v \sqrt{T - t}$$

株式価値と負債価値とを合計したのが企業価値 V_t である。

$$V_t = S_t + B_t = A_t + TS e^{-r(T-t)} N(d_2) - kA_t [1 - N(d_1)] \quad (22)$$

以上の (20) 式と (21) 式, (22) 式が Merton モデルを倒産コストモデルに拡張したものである。最適資本構成を求めるには, 負債発行の 0 時点における企業価値 V_0 を M に関して最大化すればよい。

$$M^* = \arg \max_M V_0$$

このときの M^* に対応した株式価値と負債価値の大きさが最適資本構成である。企業価値を最大化する意味は, 1 期間モデルの倒産コストモデルと同様, 負債の存在の有無のみが差異である (2 つの) 同じ企業という設定を維持するためである。簡単に述べると, 負債の存在しない企業が 0 時点で負債を発行したとすると, その企業は以前と「同じ」企業ではあり得ない。負債発行による現金が入手されるので, 企業の保有資産が変化してしまうからである。この変化を打ち消して, 以前と同じ企業であり続けるためには, この流入現金を企業の外に流出させなければならない。つまり, 0 時点の負債価値 (これが負債発行で入手できる現金) の金額だけ株主に配当が支払われる。ということは, 0 時点の企業価値とは, 実は 0 時点の株主の富を表している。従って 0 時点の企業価値を最大化すべく資本構成が決まるということは, 0 時点の株主の富が最大化されるということの意味している。

ところで, 貸倒れ (倒産) 発生時になぜ節税効果 TS を失うと想定するのか。若干技術的な話になってしまうが, この点は後の議論展開と重要な関係を持っているので少し述べておこう。Merton タイプのモデルでは, 時点 T 以外にキャッシュフローは一切発生しないものと考えている。法人税についてはどうか。実は時点 T 以前の期間中, 連続的に法人税を見積もっているだけのことで, 実際に支払はしていない。もし法人税を期間中本当に支払っているなら, A_t の変動を記述した (13) 式は, 資産からのキャッシュフロー流出を反映する形に変更されなければならないし, 均衡条件の (15) 式や (16) 式も変更を要する。この変更は不可能ではないが, 期間中のキャッシュフローを考慮しなければならないので, モデルを複雑化させてしまうことも事実である。^{*12} モデルの簡便性を維持するため, 奇抜な感は拭えないが, 法人税には次のような仮定が暗黙に設定されている。法人税は, 仮に期間中連続的に支払われるものとみなして, 各時点の金額を見積もっておき, 実際に法人税を支払うのは時点 T で, そのときに過去からの見積もりの累計額をまとめて支払う。このように想定してモデルを作れば, 法人税額の大きさを明示的に示すことなく, 法人税の節税効果を考

^{*12} これは Brennan-Schwartz(1978) の議論になる。彼らによれば, 解析解を求めることはできず, 偏微分方程式の数値解法が必要となる。偏微分方程式の数値解法といってもそれほど難しいものではなく, これについては例えば辻 (1993) を参照願いたい。そうすることの問題点は, 解法の問題ではなく, 節税効果の計算方法にある。ここで紹介した Merton タイプのモデルの最大の特徴は本文で述べた TS にある。Brennan-Schwartz の議論では, まったく異なる法人税および節税効果の計算方法が想定される。(現実妥当性は別にして,) TS のように節税効果を見積もると, 実は倒産コストモデルとしては驚くべき (望ましい) 特徴が現れる。Brennan-Schwartz の議論では, この特徴は消えてしまい, 後で述べるような, 倒産コストモデルに関して一般によく指摘される批判がそのまま当てはまる。

慮することができる。すなわち、時点 T になって、倒産せず、見積額どおりに法人税を支払ってはいじめて、負債がなかったときと比べて、負債が存在することで TS の値だけ法人税額が安く済んでいたということである。^{*13}

ということは、時点 T に至るまで、実際には法人税を支払ってないので、(キャッシュフローとしての) 節税効果は本当には発生していない。時点 T の前では TS はあくまでも計算上の見積額にすぎない。もし時点 T で倒産するなら、結果的には法人税を支払わないのであるから、節税効果も発生しないと考えるのが妥当であろう。従って、時点 T で倒産した場合は、節税効果 TS は喪失するものと仮定するのが妥当である。

3.3 Merton モデル・タイプ 1 のシミュレーション

ここでは、前で述べた Merton モデル・タイプ 1 の特徴をシミュレーションにより調べることにする。

まず指摘すべきことは、負債発行の 0 時点 ($t = 0$) において、(21) 式は負債価値 $B_0 (= B(A_0, 0))$ の解析解にはならないという点である。(21) 式の右辺に登場する TS の中に B_0 が入り込んでいるからである。0 時点においてのみ、このモデルから解析的に解を求めることはできない。0 時点よりも後の時点であれば、 B_0 の値はわかっているので、(21) 式は解析解とみなせ、式右辺のパラメータに適当な数値を代入すれば、負債価値を求めることができる。ところがここでは資本構成の問題を扱っているので、負債発行時点での負債価値が必須である。0 時点の負債価値 B_0 を求めるには、(21) 式を満たすような B_0 の値を探索するしかない。このようにして求められる数値解が以下のシミュレーションで取り上げられる。

このモデルにおける外生的なパラメータは保有資産の価値 A_0 と無危険利子率 r 、ボラティリティ v 、負債の満期時点 T 、法人税率 τ 、倒産コスト k である。これらパラメータの数値は $A_0 = 200$ 、 $r = 0.05$ 、 $v = 0.35$ 、 $T = 30$ 、 $\tau = 0.4$ 、 $k = 0.3$ である。これらの数値を与えれば、企業価値 V_0 を最大化する M の値 M^* を見つけることができ、この M^* の下での負債価値 B_0 と株式価値 S_0 が最適な資本構成である。そして 1 つのパラメータのみ数値が変化するとき、最適な資本構成がどのように変化するかをシミュレーションしたのが、表 2 から表 7 である。

表 2 は A_0 の変化によって、最適資本構成がどのように変化するかを調べている。 A_0 の上昇により M^* や B_0 、 S_0 、 V_0 は上昇している。容易に確認できるが、これらは 1 次同次の関係にある。つまり A_0 が 2 倍になれば、その他の値もすべて 2 倍になる。この 1 次同次性を反映して負債比率 $D.R.$ は変化しない。

無危険利子率 r の変化を調べたのが表 3 であり、ボラティリティ v の変化を調べたのが表 4 である。 r や v が増加すると両方とも最適な負債額面 M^* を増加させる。しかし r が増加しても S_0 の

^{*13} このように解釈したとしてもまだ不都合な点が残る。というのは、法人税の支払額のみで、時点 T で A_t には価格の断層(株価の場合の配当の権利落ちに相当)が生じるはずであるが、このことはどこにも考慮されていない。

増加は小さいが、 v の増加による S_0 の増加は大きい。また v の増加で M^* が増加しても、 B_0 はむしろ低下している。以上のことから、 r の増加は負債比率を上昇させ、 v の増加は負債比率を低下させる。

表 5 は負債の満期時点 T が変化する場合である。負債の満期が長くなるほど、最適な負債比率は低下している。これは少々意外な結果かもしれない。直感的には、負債の満期が遠い将来になるほど最適な負債量は大きくなりそうに感じられる。確かに負債の額面 M^* は、 T が 10 年から 40 年へと 4 倍になると、10 倍以上に大きくなっている。しかし額面の上昇にもかかわらず、現在価値低下の効果で負債価値は低下し、また株式価値の方は、オプションの時間価値増大を反映して上昇している。このようにして結果的には、 T の上昇は負債比率を低下させる。

法人税率 τ の変化と倒産コスト k の変化の効果を調べたのが、表 6 と表 7 である。法人税率が上昇すれば節税効果が大きくなって、最適な負債依存度は上昇する。また倒産コストが大きくなれば、これを回避しようとして最適な負債依存度は小さくなる。このような倒産コストモデルの特性が表 6 と表 7 で確認できる。 k の上昇により、負債比率が低下するのみならず M^* も低下している。

さてこの外生的パラメーターの値は、現実に尤らしい値が設定されている。これら値の下で計算された負債比率は、ほとんどすべてが 0.5 を下回っているので、現実企業の値として尤らしい。^{*14} 実はこれは驚くべきことである。というのは、倒産コストモデルにおいて計算される最適な負債比率の値というのは、外生的パラメーターに尤らしい数値を設定する限り、ほとんどのケースで 0.6 を超えてしまう。モデルのベースが 1 期間 CAPM に依存する倒産コストモデルであれ、オプション理論に依存した倒産コストモデルであれ、皆そうである。そんな中、ここで得られた 0.4 前後の負債比率というのはほとんど唯一といってもよい。この原因は節税効果の計算方法にあるであろう。ここでの節税効果、つまり法人税の想定は少々現実離れした奇抜な印象を拭えないものであった。しかしこの想定によって節税効果の大きさが他のモデルに比べて小さく見積もられ、結果的に最適な負債依存度が小さく決定される。そして負債比率は現実企業のものとして尤らしい値となっている。

3.4 Merton モデルの拡張：タイプ 2

前のタイプ 1 では、株式価値 S_t と負債価値 B_t の満たすべき均衡条件は Merton モデルと同様、(15) 式と (16) 式であった。これらの式は、状態変数の A_t が第 1 番目の証券価格でもあるとみなされた結果成立する (14) 式を前提にしている。すなわち、タイプ 1 では企業の保有する資産価値があたかも証券価格であるかのごとく、企業の保有資産を市場で売買可能な証券として扱っていた。このことを前提に導出された株式価値と負債価値を合計した企業価値 V_t は A_t に等しくはない。単純に言えば、 V_t には負債の節税効果の価値が反映されている分、 A_t よりも大きくなるはずである。

^{*14} 時価で評価したわが国企業の平均的な負債比率は製造業で 0.3 前後、非製造業でも 0.5 弱の値である。特定の業種や経営不振企業を除いて、0.7 を超えるような負債比率の企業はほとんど存在しないといってもよい。

表2 Merton モデル・タイプ1: A_0 の変化

$A_0^{(a)}$	M^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.^{(b)}$
180	1551.3	81.0	120.5	201.5	0.40
190	1637.5	85.5	127.2	212.7	0.40
200	1723.7	90.0	133.9	223.9	0.40
210	1809.9	94.5	140.6	235.0	0.40
220	1896.1	99.0	147.2	246.2	0.40

(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $r = 0.05$, $T = 30$, $v = 0.35$ 。

(b) 負債比率で B_0/V_0 。

表3 Merton モデル・タイプ1: r の変化

$r^{(a)}$	M^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.03	854.9	82.8	133.0	215.8	0.38
0.04	1219.5	86.5	133.3	219.8	0.39
0.05	1723.7	90.0	133.9	223.9	0.40
0.06	2419.4	93.4	134.6	228.0	0.41
0.07	3377.5	96.8	135.4	232.2	0.42

(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $T = 30$, $v = 0.35$ 。

表4 Merton モデル・タイプ1: v の変化

$v^{(a)}$	M^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.25	1284.0	118.9	117.2	236.0	0.50
0.30	1468.1	103.5	125.8	229.3	0.45
0.35	1723.7	90.0	133.9	223.9	0.40
0.40	2080.4	78.1	141.2	219.3	0.36
0.45	2588.0	67.6	147.9	215.5	0.31

(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $T = 30$ 。

表5 Merton モデル・タイプ1: T の変化

$T^{(a)}$	M^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
10	313.3	106.1	107.6	213.7	0.50
20	778.7	99.1	122.1	221.3	0.45
30	1723.7	90.0	133.9	223.9	0.40
35	2532.2	85.6	138.5	224.1	0.38
40	3715.7	81.5	142.4	223.9	0.36

(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$ 。

表6 Merton モデル・タイプ1: τ の変化

$\tau^{(a)}$	M^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.30	974.8	66.7	145.9	212.7	0.31
0.35	1315.6	78.2	139.5	217.7	0.36
0.40	1723.7	90.0	133.9	223.9	0.40
0.45	2215.9	102.4	128.8	231.3	0.44
0.50	2818.0	116.0	124.2	240.2	0.48

(a) その他のパラメータは $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $T = 30$, $v = 0.35$ 。

表7 Merton モデル・タイプ1: k の変化

$k^{(a)}$	M^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.1	3031.1	118.1	113.9	232.0	0.51
0.3	1723.7	90.0	133.9	223.9	0.40
0.5	1105.2	70.6	147.9	218.4	0.32
0.7	766.4	56.7	158.0	214.7	0.26
0.9	562.2	46.5	165.5	212.0	0.22

(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $T = 30$, $v = 0.35$ 。

しかし本当に A_t が市場で取引可能な証券価格であるなら, A_t と V_t が乖離しているような状況では, 新たな裁定が発生する可能性がある。この点を指摘したのが Kane-Marcus-McDonald(1984)(1985)である。彼らによれば, もし $A_t < V_t$ であったなら, 自分で A_t の金額を出資してこの資産を購入し, 自分で借入をした後その出資の持ち分(株式)を売却すれば, 裁定の利益を得ることができる。

この裁定をもう少し形式的に記そう。 $A_t < V_t = S_t + B_t$ であるとする。任意時点 t (ただし $t < T$) で, ある人が企業を設立して A_t 円を出資し, この金額で資産を購入する。この段階で出資の持ち

分(株式)の価値は A_t である。次に B_t 円を借入れる。この B_t 円はそのまま出資者に配当される。負債の存在する段階では、出資者の持ち分は S_t 円の価値であるから、この持ち分すべてを売却すれば S_t 円入手できる。つまりこの出資者は $S_t + B_t = V_t$ 円を入手できる。これらのことすべてを時点 t で瞬時に行えば、 A_t 円出資して結果的に V_t 円入手するのであるから、この差額は裁定の利益である。

このような裁定の機会があるのでは均衡とはいえない。この裁定の機会が排除されるのは $A_t = V_t$ のときだけである。従って均衡では $A_t = V_t$ が成立していなければならない。これが Kane-Marcus-McDonald による議論である。この結果、0 時点における最適資本構成の決定は、次のような最適な M の決定として定式化できる。

$$M^{**} = \arg \max_M V_0 \quad \text{subject to } A_t = V_t \quad \text{ただし } 0 \leq t < T$$

このような形で最適な M を決定しようとする、タイプ 1 では外生変数であった A_t が内生化される。この条件を満たす M^{**} は、1 つは明らかに $M^{**} = 0$ のときであるが、 $M^{**} \neq 0$ のような M^{**} の値も存在する。これを可能にするためには 1 つのトリックが必要になる。そのトリックとは Kane-Marcus-McDonald による次のような議論である。

$A_t = V_t$ という制約が付けられる結果、 A_t の確率微分方程式はもはや (18) 式ではなく、次のように変更されるものとしよう。

$$dA_t = (r - i)A_t dt + vA_t dZ_1^{**} \quad (23)$$

ここの i は調整後利回り adjusted yield と名付けられる。この変更により S_t と B_t の均衡条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial A_t}(r - i)A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - rS &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial A_t}(r - i)A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - rB &= 0 \end{aligned}$$

のようになり、これに Feynman-Kac 公式を用いると

$$\begin{aligned} S(A_t, t) &= e^{-r(T-t)} E_t^{**} [S(A_T, T)] \\ B(A_t, t) &= e^{-r(T-t)} E_t^{**} [B(A_T, T)] \end{aligned}$$

が S_t と B_t の定式化になる。この期待値 (E^{**}) を評価するのに必要な A_T の確率分布は、(23) 式から次のような正規分布となる。

$$\ln A_T \sim N\left(\ln A_t + (r - i - \frac{v^2}{2})(T - t), v^2(T - t)\right)$$

以上のことから， S_t と B_t は

$$\begin{aligned} S(A_t, t) &= e^{-i(T-t)}A_tN(\hat{d}_1) - e^{-r(T-t)}(M - TS)N(\hat{d}_2) \\ B(A_t, t) &= e^{-r(T-t)}MN(\hat{d}_2) + e^{-i(T-t)}(1 - k)A_t[1 - N(\hat{d}_1)] \\ \hat{d}_1 &= \frac{\ln(A_t/(M - TS)) + (r - i + \frac{v^2}{2})(T - t)}{v\sqrt{T - t}} \\ \hat{d}_2 &= \hat{d}_1 - v\sqrt{T - t} \end{aligned}$$

のように導出することができ，これらを合計した企業価値 V_t は次のとおりである。

$$V_t = S_t + B_t = e^{-i(T-t)}A_t + e^{-r(T-t)}TSN(\hat{d}_2) - e^{-i(T-t)}kA_t[1 - N(\hat{d}_1)]$$

どうしてこの議論がトリックかという点，企業価値 V_t が証券価格であるなら，容易に確認できるが，均衡においては

$$dV_t = rV_t dt + vV_t dZ_1^*$$

のように記すこともできる。従って $A_t = V_t$ という制約を課したとしても， $\frac{dA_t}{A_t}$ のドリフトは r のままであると考えるのが妥当で，これが r から $r - i$ に変化するという理由が不明確である。このように論理整合性という点で，Kane-Marcus-McDonald の議論は問題がないわけではないが，こうすることによって，確かに M^{**} は非ゼロでも存在する。この点は次のシミュレーションで示そう。

3.5 Merton モデル・タイプ 2 のシミュレーション

Merton モデル・タイプ 2 のシミュレーションは， $A_t = V_t$ の制約が付いていること，調整後利回り i が内生的に決定されていること，これら 2 点を除いてタイプ 1 と同じである。外生パラメターの数値はタイプ 1 と同じものを採用している。ただし倒産コスト k だけは，タイプ 2 で 0.5 までしか計算してない。これは k がこれ以上大きくなると，計算が収束せず結果が求められないからである。

表 8 から表 13 を見て，全体的な特徴を指摘すると，確かに最適な負債額面 M^{**} はすべて非ゼロになっている。また調整後利回り i の値はそれほど小さくなく，概ね 0.5% 弱である。さらにタイプ 2 の負債比率 $D.R.$ はタイプ 1 とそれと同じである。その他の特性についてもタイプ 2 はタイプ 1 と大差ない。簡単にまとめると， A_0 の変化を調べた表 8 では， M^{**} と B_0 ， S_0 は A_0 に関して 1 次同次の関係にあることが確認できる。無危険利子率 r の変化を調べた表 9 から， r の上昇は負債比率を上昇させる。表 10 から，ボラティリティ v の増加は負債比率を低下させる。また負債の満期時点 T の増加も負債比率を低下させる (表 11)。さらに法人税率 τ の上昇は負債比率を増加させる (表 12)，倒産コスト k の上昇は負債比率を低下させる (表 13)。唯一の差異は r が変化したときである。タイプ 1 では r の上昇は S_0 を上昇させたが (表 3)，タイプ 2 では S_0 を低下させている (表 9)。

表 8 Merton モデル・タイプ 2 : A_0 の変化

$A_0^{(a)}$	M^{**}	B_0	S_0	$D.R.$	i
180	1386.0	72.4	107.6	0.40	0.00376
190	1463.0	76.4	113.6	0.40	0.00376
200	1540.0	80.4	119.6	0.40	0.00376
210	1617.0	84.4	125.6	0.40	0.00376
220	1694.0	88.4	131.6	0.40	0.00376

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $r = 0.05$, $T = 30$, $v = 0.35$. $A_0 = V_0$ の制約を付けて計算。

表 9 Merton モデル・タイプ 2 : r の変化

$r^{(a)}$	M^{**}	B_0	S_0	$D.R.$	i
0.03	792.4	76.7	123.3	0.38	0.00253
0.04	1109.5	78.7	121.3	0.39	0.00315
0.05	1540.0	80.4	119.6	0.40	0.00376
0.06	2122.5	82.0	118.1	0.41	0.00436
0.07	2909.1	83.4	116.6	0.42	0.00498

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $T = 30$, $v = 0.35$. $A_0 = V_0 = 200$ の制約を付けて計算。

表 10 Merton モデル・タイプ 2 : v の変化

$v^{(a)}$	M^{**}	B_0	S_0	$D.R.$	i
0.25	1088.1	100.7	99.3	0.50	0.00552
0.30	1280.5	90.3	109.8	0.45	0.00456
0.35	1540.0	80.4	119.6	0.40	0.00376
0.40	1897.0	71.2	128.8	0.36	0.00308
0.45	2401.8	62.8	137.2	0.31	0.00249

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $r = 0.05$, $T = 30$. $A_0 = V_0 = 200$ の制約を付けて計算。

表 11 Merton モデル・タイプ 2 : T の変化

$T^{(a)}$	M^{**}	B_0	S_0	$D.R.$	i
10	293.2	99.3	100.7	0.50	0.00662
20	703.9	89.6	110.4	0.45	0.00505
30	1540.0	80.4	119.6	0.40	0.00376
35	2260.6	76.4	123.6	0.38	0.00324
40	3319.3	72.8	127.2	0.36	0.00282

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $r = 0.05$, $v = 0.35$. $A_0 = V_0 = 200$ の制約を付けて計算。

表 12 Merton モデル・タイプ 2 : τ の変化

$\tau^{(a)}$	M^{**}	B_0	S_0	$D.R.$	i
0.30	916.6	62.8	137.2	0.31	0.00205
0.35	1208.3	71.8	128.1	0.36	0.00283
0.40	1540.0	80.4	119.6	0.40	0.00376
0.45	1917.0	88.6	111.4	0.44	0.00483
0.50	2345.8	96.6	103.4	0.48	0.00611

(a) その他のパラメーターは $k = 0.3$, $r = 0.05$, $T = 30$, $v = 0.35$. $A_0 = V_0 = 200$ の制約を付けて計算。

表 13 Merton モデル・タイプ 2 : k の変化

$k^{(a)}$	M^{**}	B_0	S_0	$D.R.$	i
0.1	2613.5	101.8	98.2	0.51	0.00494
0.2	1972.0	90.3	109.7	0.45	0.00429
0.3	1540.0	80.4	119.6	0.40	0.00376
0.4	1235.1	71.9	128.1	0.36	0.00331
0.5	1011.8	64.6	135.4	0.32	0.00294

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $r = 0.05$, $T = 30$, $v = 0.35$. $A_0 = V_0 = 200$ の制約を付けて計算。

ところで i は負債比率が大きいほど大きくなっている。これは直感的には納得的な結果である。 $A_t = V_t$ という制約がなければ、負債比率が大きいほど A_t と V_t の乖離は大きいであろう。制約条件ということで V_t を強制的に A_t に等しくさせるのであるから、当然何か別のパラメーター（ここでは i ）による調整がなされなければならない。乖離が大きいほどこの調整は大きくなければならない。このことが負債比率と i との間に正の関係をもたらす。

4 Leland モデル

4.1 モデルの前提

近年になって展開された連続時間の資本構成モデルは、3 節で述べたような Merton タイプとはモデルの想定が大きく異なっている。最も顕著な差は倒産発生の定義にある。Merton タイプでは、特定の時点 T (負債の満期) において、負債への支払義務を履行できるか否かで倒産発生かどうかが決まったが、近年の資本構成モデルではこのような想定をしない。変化の契機となったのが Leland(1994) であり、このモデルをベースにして、その後様々な連続時間の資本構成モデルが展開されている。

Leland モデルでは、負債として満期が無限大のコンソル債を想定する。これにより負債の満期という特別な時点をモデルから排除できる。そして倒産発生の定義については、状態変数でもある企業の保有資産の価値 A_t がある臨界値に達すると倒産が発生するものと仮定される。すなわち、いつの時点で倒産が発生するかは、事前には未知の確率変数である。このような時点のことを一般に停止時点 *stopping time* という。倒産を発生させる A_t の臨界値のことを以下では倒産発生点と称する。以上のような想定でモデル構築するのは、Leland(1994) がオリジナルではなく、元は Black-Cox(1976) が最初である。しかし Black-Cox(1976) は負債や株式などの価値を求めただけで、これを資本構成のモデルにしたのは Leland(1994) の貢献である。特に倒産発生点をモデルの中で内生的に決定し、節税効果と倒産コストを考慮して、倒産コストモデルの観点から最適資本構成を決定できるようにした。

負債がコンソル債という想定は一見して非現実的なように感じるが、例えば満期が 30 年の負債ならどうであろう。30 年後のキャッシュフローの現在価値は非常に小さくなる。これをゼロとみなすのは無理であろうが、証券価格 f_k を t で微分した偏微分係数 $\frac{\partial f_k}{\partial t}$ はゼロとみなしてもよからう。すなわち、満期まで 30 年あるとしたら、満期までの残存期間が 1 日や 2 日変化したところで証券価格への影響は無視できるぐらいのものであろう。 $\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$ とできることの分析に与える効果は絶大である。均衡条件の (7) 式は偏微分方程式から常微分方程式になるので、解を求めるのが格段と容易になる。いくら遠い将来の満期を考えるとしても、それが有限である限り、満期時点のキャッシュフローの現在価値をゼロと仮定することはできないから、 $\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$ という分析の便宜との整合性を保持するため、満期を無限大の将来と仮定するのである。いいかえると、解析解が容易に得られるという分析の便宜を優先させて、経済的な意味としては若干の疑問がないわけではないが、負債はコンソル債であると仮定するのである。すると、満期という予め設定された特別な時点というのはなくなるから、すべての時点は(事前的には)同質的 *time homogeneous* ということになる。

さて負債にコンソル債を想定するので、負債の利子は連続的かつ(倒産しない限り)永久に支払

われる。任意時点の利子支払額を C で表す。 C は定数である。同様に法人税では利子支払額の損金算入を認め、法人税率を τ とする。3 節と違いこの Leland モデルでは、倒産しない限りキャッシュフローとして本当に C の支払を連続的に行っているのであるから、節税効果として τC の節税額が連続的に発生している。^{*15}

Leland モデルの状態変数は、3 節と同様、企業の保有資産の価値 A_t である。 A_t は唯一の状態変数 ($N = 1, x_1 = A_t$) であり、かつ第 1 番目の証券価格 ($f_1 = A_t$) でもあると仮定する。状態変数としての A_t は

$$dA_t = \mu A_t dt + v A_t dZ_1 \quad (13)$$

という確率過程に従う。 μ と v が定数であるのも前と同じである。 A_t に (13) 式を想定する Leland モデルの問題点は後述する。証券価格としての A_t の均衡条件から (11) 式が成立していて、 $m_1 - \lambda_1 s_1 = r A_t$ であるから、その他 (負債や株式など) の任意の証券価格を f_k で表すと、その均衡条件は次のとおりに書ける。

$$\frac{\partial f_k}{\partial A_t} r A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - r f_k + c_k = 0 \quad (24)$$

この常微分方程式の一般解は、 c_k が定数であるなら、

$$f_k(A_t) = \frac{c_k}{r} + G_1 A_t + G_2 A_t^{-X} \quad \text{ただし } X = \frac{2r}{v^2} \quad (25)$$

であり (G_1 と G_2 は定数)、各証券の特徴を表す境界条件によって、具体的な証券各々の価値が定式化されることになる。

倒産は、 A_t が A_B に下落すると倒産発生であるとする。この A_B が倒産発生点である。倒産が発生すると、企業の支配権が株主から債権者へと移転する。つまり A_t は債権者のものである。ここで倒産コストが $k A_B$ であるとする (k は定数)。債権者は A_t から倒産コストを負担した残りの $(1 - k) A_B$ を受取る。倒産発生時、株主の取り分はゼロである。また倒産発生時には節税効果は消滅するものとする。

4.2 証券価値の定式化

前で述べたような想定の下で、様々な証券価値を定式化しよう。まず負債についてであるが、負債価値を ($f_k(A_t) =$) $B(A_t)$ で表す。負債のキャッシュフローは C であるので、 $c_k = C$ である。境界条件は次の 2 つである。

$$\begin{aligned} A_t \gg A_B \text{ のとき } B(A_t) &= \frac{C}{r} \\ \lim_{A_t \rightarrow A_B} B(A_t) &= (1 - k) A_B \end{aligned} \quad (26)$$

^{*15} 前でも述べたように、倒産しない限り節税効果をもたらすのは法人税として対称的法人税を想定していることによる。

ここの X は正であるから, A_t が極めて大きいとき一般解 (25) 式の第 3 項はゼロになる。(26) 式の最初の条件は, A_t が極めて大きいとき倒産発生の可能性はほとんどゼロであるので, 負債価値は $\frac{C}{r}$ となることを表している。この条件から (25) 式の G_1 はゼロでなければならない。(26) 式の 2 番目の条件は倒産発生時の負債価値である。この条件から

$$G_2 = \left[(1-k)A_B - \frac{C}{r} \right] A_B^X$$

のように (25) 式の G_2 が特定化されるので, 負債価値は次のとおりである。

$$B(A_t) = \frac{C}{r} + \left[(1-k)A_B - \frac{C}{r} \right] \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-X} \quad (27)$$

次に倒産コスト価値 $BC(A_t)$ と節税効果の価値 $TS(A_t)$ を定式化したい。これらが証券価格のように定式化できるとして, 同じ一般解の (25) 式に従うと考える。倒産コスト価値という証券があったとすると, これは実際に倒産するまでキャッシュフローの存在しない証券であるから, $c_k = 0$ とすることができる。境界条件は

$$\begin{aligned} A_t \gg A_B \text{ のとき } BC(A_t) &= 0 \\ \lim_{A_t \rightarrow A_B} BC(A_t) &= kA_B \end{aligned} \quad (28)$$

である。最初の条件は, A_t が極めて大きければ, A_B に到達する確率はほとんどゼロで倒産コスト価値がゼロであることをいっている。2 番目の条件では, $A_t = A_B$ となって倒産になると, 倒産コスト kA_B が発生する。以上のことから, 倒産コスト価値は

$$BC(A_t) = kA_B \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-X} \quad (29)$$

のように定式化できる。他方, 節税効果の価値については, 倒産に至るまで連続的に節税額 τC を産み続けるので, $c_k = \tau C$ である。境界条件は

$$\begin{aligned} A_t \gg A_B \text{ のとき } TS(A_t) &= \frac{\tau C}{r} \\ \lim_{A_t \rightarrow A_B} TS(A_t) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

である。 A_t が極めて大きく倒産する可能性がほぼゼロなら, 節税額もほぼ確実に享受できるので, その価値は $\frac{\tau C}{r}$ である。これが最初の条件の意味で, 次の条件は倒産発生時に節税効果が消滅することを表している。(30) 式の境界条件から節税効果の価値を定式化すると

$$TS(A_t) = \frac{\tau C}{r} \left[1 - \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-X} \right] \quad (31)$$

である。容易に確認できることであるが, 倒産が発生するとき ($A_t = A_B$) のみに 1 円を支払う証券の価値を求めると, それは $(A_t/A_B)^{-X}$ である。

さて企業価値 $V_t = V(A_t)$ は, A_t に (31) 式の節税効果価値を加え, (29) 式の倒産コスト価値を減じれば計算できる。

$$V(A_t) = A_t + \frac{\tau C}{r} \left[1 - \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-X} \right] - k A_B \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-X} \quad (32)$$

そして企業価値から負債価値を減じれば, 株式価値 $S_t = S(A_t)$ を得ることができる。

$$S(A_t) = A_t - (1 - \tau) \frac{C}{r} + \left[(1 - \tau) \frac{C}{r} - A_B \right] \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-X} \quad (33)$$

これは (27) 式と (32) 式から求められる。

以上のようにして, 株式価値と負債価値, そして企業価値が導出されたが, これらを使って企業は倒産発生点 A_B と負債の利子支払額 C を決定する。企業の意思決定の基準は株主の富の最大化である。

まず倒産発生点 A_B については, 資金調達後の株主の富を最大化すべく決定されるなら, $\frac{\partial S(A_t)}{\partial A_B} = 0$ という最大化の 1 階条件から A_B が決定される。ただし実際にはこのようにして A_B を求めることは稀で, 次のような

$$\lim_{A_t \rightarrow A_B} \frac{\partial S(A_t)}{\partial A_t} = 0$$

という式から A_B を求めるのが半ば慣例化している。これは smooth pasting 条件といい, どちらの条件から計算しても A_B は同じになると考えられている。^{*16} 一般的には smooth pasting 条件に依る方が計算は容易である。結果は次のとおりである。

$$A_B = (1 - \tau) \frac{C}{r} \frac{X}{1 + X} \quad (34)$$

この A_B を負債価値の (27) 式と株式価値の (33) 式, 企業価値の (32) 式に各々代入すると次のようになる。

$$S(A_t) = A_t - (1 - \tau) \frac{C}{r} \left[1 - \left(\frac{C}{A_t} \right)^X m \right] \quad (33')$$

$$B(A_t) = \frac{C}{r} \left[1 - \left(\frac{C}{A_t} \right)^X q \right] \quad (27')$$

$$V(A_t) = A_t + \frac{\tau C}{r} \left[1 - \left(\frac{C}{A_t} \right)^X h \right] \quad (32')$$

$$m = \left(\frac{(1 - \tau) X}{r(1 + X)} \right)^X \frac{1}{1 + X}$$

$$q = [1 + X - (1 - k)(1 - \tau)X] m$$

$$h = \left[1 + X + k \frac{1 - \tau}{\tau} X \right] m$$

^{*16} ここでは形式的な証明は省略する。この議論については Dixit-Pindyck(1994) 第 4 章を参照願いたい。Leland モデルの場合は両条件とも確かに結果が一致するのであるが, 後で登場するような多少複雑化したモデルについては, 最大化の 1 階条件と smooth pasting 条件とは同じ結果をもたらさないこともある。

次に負債の利子支払額 C については、負債発行時の株主の富の最大化から決定される。負債による調達資金は即株主に配当されるので、資金調達時の株主の富は株式価値に負債価値を加えた企業価値で表される。0 時点で負債が発行されるものとする、最適な利子支払額 C^* は、 $\frac{\partial V_0}{\partial C} = 0$ を満たすような C の値であって、計算すると、

$$C^* = A_0 [h(1+X)]^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (35)$$

が得られる。この C^* を (34) 式の A_B に代入すると、

$$A_B^* = A_0 \left(\frac{m}{h} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

が最適な利子支払額の下における最適な倒産発生日である。そしてこれら最適な C^* と A_B^* が企業に選択されることを前提とした、0 時点における株式価値や負債価値、企業価値は、(33') 式と (27') 式、(32') 式に各々 (35) 式の C^* を代入して得られる。

$$S^*(A_0) = A_0 \left(1 - \frac{1-\tau}{r} [h(1+X)]^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 - \frac{m}{h(1+X)} \right) \right) \quad (33'')$$

$$B^*(A_0) = A_0 [h(1+X)]^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 - \frac{q}{h(1+X)} \right) \frac{1}{r} \quad (27'')$$

$$V^*(A_0) = A_0 \left(1 + \frac{\tau}{r} [h(1+X)]^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{X}{1+X} \right) \quad (32'')$$

以上の証券価値や C^* 、 A_B^* はすべて A_0 の一次同次関数になっている。すなわち、モデルの中の内生変数はすべて、負債発行時点における状態変数の値 (企業の資産価値) に比例して決定されているのである。

4.3 モデルの問題点

Leland モデルの最大の問題は、モデルとしての論理整合性という観点からすると、キャッシュフローの取り扱いが曖昧になっているという点である。

負債にコンソル債を想定することで、負債の利子が (永久に) 連続的に支払われているが、それではこの利子は誰が支払っているのだろうか。Leland モデルでは、企業ではなく株主が利子を支払うことになってしまう。ここでこの点を強調したいために、前の小節では、あえて株式価値をストレートに導出せず、企業価値から負債価値を減じることで遠回りして株式価値を導いた。もちろん、均衡条件から株式価値をストレートに導出しても (33) 式を得ることができる。(33) 式を解とするような、均衡条件としての常微分方程式は

$$\frac{\partial S}{\partial A_t} r A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - r S - (1-\tau) C = 0$$

である。この均衡条件に次の境界条件を考慮すれば S_t の解は (33) 式である。

$$A_t \gg A_B \text{ のとき } S(A_t) = A_t - (1 - \tau) \frac{C}{r} \quad (36)$$

$$\lim_{A_t \rightarrow A_B} S(A_t) = 0$$

前の小節の均衡条件 (24) 式において、証券のキャッシュフローを意味する c_k に相当する項が上の均衡条件では $-(1 - \tau)C$ の項である。負債に対して利子 C を支払うが、利払い 1 単位当たり τC の節税効果が発生するので、株主が負担する (支払う) のは $(1 - \tau)C$ である。これは一見もっともらしいが、よく考えると奇妙でもある。実はこの企業はキャッシュフローを一切産み出していない。もし企業が活動の成果として何らかのキャッシュフローを産み出しているなら、企業の資産価値を表す確率微分方程式を (13) 式のように書くのは望ましくない。(13) 式を慣例に従い文字通り解釈すれば、 A_t はキャッシュフローをまったく産み出さずに価値変動が生じるだけで、値上り益のみで期待収益率 μ を享受する見込みであるということである。もし本当に企業がキャッシュフローを産み出していないなら、負債の利子は誰から支払われるのか。ここでは企業の保有資産を売却することは想定されてない。企業には支払のためのキャッシュがないから、負債の利子を支払うのは株主しかいない。すなわち、株主が自分のポケットの現金から負債の利子を支払っているのである。これが $-(1 - \tau)C$ という項の意味である。しかしこれでは株主が有限責任であるということにならない。もっと深刻なのは法人税である。法人税は誰が支払っているのかという点に対して、Leland モデルはもはや意味不明である。

もちろん、企業の資産価値が (13) 式のように記述されたからといって、そのことが即、企業の保有資産はまったくキャッシュフローを産み出さないということの意味するわけではない。連続時間モデルの慣例には反しているが、(13) 式は単に資産価値の変動のみを表していて、その資産の産み出すキャッシュフローは別に定式化され得る、という具合に解釈すればよいからである。このとき、 μ は期待収益率ではなく単なる価格変化率である。Leland モデルでは、この資産のキャッシュフローについて、ほとんど記述がないのでブラックボックスになっている。Leland モデルにおける倒産発生点 A_B とは、実は $A_t = A_B$ のとき株式価値がゼロになるような状態である。これは株式価値の境界条件である (36) 式の 2 番目の条件が記すところである。倒産を回避するには、株式を新たに発行して資金を入手し、その資金でもって負債の利子を支払えばよい。しかし株式価値がゼロであるなら、新たに株式から調達しようとしても資金を入手できないので、倒産に至る。もし企業のキャッシュフローが (暗黙にであれ) 考慮されているなら、倒産の定義はこのキャッシュフローと整合的かどうかとも検討されなければならない。しかしそのような検討はなされていないので、やはり Leland モデルは、企業の保有資産が一切キャッシュフローを産まないことを前提にしていると考えるのが妥当である。

この小節の冒頭で指摘した、キャッシュフローの取り扱いが曖昧であるという点を克服するにはどうすればよいか。企業の保有する資産価値の源泉は、それが産み出すキャッシュフローであるこ

とはいうまでもない。このキャッシュフローは EBIT(earning before interest and tax) である。従ってモデルが本当に資本構成のモデルであるためには、やはり EBIT を明示的に考慮して、EBIT から負債の利子や法人税が支払われるような形のモデルを作ることが必要不可欠である。

4.4 Leland モデルのシミュレーション

この小節では Leland モデルの特徴をシミュレーションにより調べたい。Leland モデルの場合は、前の Merton タイプの倒産コストモデルと違い、解析的に完全に解かれているので、数値解を求める必要がない。また Leland(1994) ではモデルの特徴を詳細に検討しているから、わざわざここでシミュレーションする必要はないかもしれない。しかし他のモデルとの間で数値上の比較をするという観点から、若干のシミュレーション結果を提示することは無駄ではないであろう。

負債発行がなされる 0 時点を分析対象としよう。モデルの外生的なパラメータは保有資産の価値 A_0 と無危険利子率 r 、ボラティリティ v 、法人税率 τ 、倒産コスト k である。これらパラメータを所与に最適な意思決定として負債の利子支払額 C^* と倒産発生点 A_B が決定される。そしてそのときの負債価値 B_0 と株式価値 S_0 、企業価値 V_0 が計算される。外生パラメータの数値は、前と同様、 $A_0 = 200$ 、 $r = 0.05$ 、 $v = 0.35$ 、 $\tau = 0.4$ 、 $k = 0.3$ である。これらの値をベースにして、1 つのパラメータのみ数値が変化するとき、 C^* と A_B 、 B_0 、 S_0 、 V_0 がどのように変化するかを調べた。

まず A_0 が変化するときが表 14 である。容易に確認できるが C^* と A_B 、 B_0 、 S_0 、 V_0 は A_0 の 1 次同次になっている。次に r の変化が表 15、 v の変化が表 16、 τ の変化が表 17、 k の変化が表 18 に各々まとめられている。これらの特徴は Merton モデル・タイプ 2 で述べたことがそのまま当てはまる。 r が上昇すれば負債比率は上昇し、 v が上昇すれば負債比率は低下する。 τ の上昇と k の下落は負債比率を上昇させる。

さてこれらシミュレーションの結果から最も述べたいことは何かというと、それは負債比率の値そのものである。倒産コストが $k = 0.3$ のとき、負債比率は概ね 0.7 前後となっている。これは現実企業の負債比率としては大きすぎる。前の Merton モデルの拡張タイプでは、外生パラメータに同じ数値を使うと負債比率は 0.4 前後であった。Leland モデルにおける負債比率 0.7 という数値は、実は倒産コストモデルの典型的な結果でもある。表 18 を見ると、 $k = 0.9$ というような倒産コストを非現実的なぐらいに大きく見積もった場合でも、負債比率は 0.5 を下回れない。真面目な現実企業のほとんどすべてが 0.5 以下の負債比率である現状を鑑みると、これでは現実企業の動向を把握する道具として Leland モデルは使い物にならないことがわかるであろう。

4.5 修正 Leland モデル：キャッシュフローの形式的な導入

この小節では、Leland モデルの欠点であったキャッシュフローの取り扱いについて、その欠点を修正しておこう。Leland モデルに、形式的にキャッシュフローを導入するのは比較的容易である。

表 14 Leland モデル : A_0 の変化

$A_0^{(a)}$	C^*	A_B	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
180	12.8	69.1	161.2	64.9	226.1	0.71
190	13.5	73.0	170.1	68.5	238.7	0.71
200	14.2	76.8	179.1	72.2	251.2	0.71
210	15.0	80.7	188.0	75.8	263.8	0.71
220	15.7	84.5	197.0	79.4	276.3	0.71

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $r = 0.05$, $v = 0.35$ 。

表 15 Leland モデル : r の変化

$r^{(a)}$	C^*	A_B	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.03	10.2	66.9	168.1	76.4	244.6	0.69
0.04	12.2	72.1	173.9	74.2	248.1	0.70
0.05	14.2	76.8	179.1	72.2	251.2	0.71
0.06	16.4	81.1	183.8	70.3	254.1	0.72
0.07	18.6	85.0	188.2	68.5	256.7	0.73

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $v = 0.35$ 。

表 16 Leland モデル : v の変化

$v^{(a)}$	C^*	A_B	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.25	12.8	94.5	198.7	64.3	263.0	0.76
0.30	13.3	84.3	187.3	68.9	256.2	0.73
0.35	14.2	76.8	179.1	72.2	251.2	0.71
0.40	15.4	71.2	172.9	74.6	247.5	0.70
0.45	16.9	67.0	168.3	76.4	244.7	0.69

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$ 。

表 17 Leland モデル : τ の変化

$\tau^{(a)}$	C^*	A_B	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.30	10.9	68.9	147.4	82.1	229.5	0.64
0.35	12.5	73.2	162.8	76.6	239.4	0.68
0.40	14.2	76.8	179.1	72.2	251.2	0.71
0.45	16.2	79.9	196.8	68.5	265.3	0.74
0.50	18.3	82.5	216.9	65.5	282.5	0.77

^(a) その他のパラメータは $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$ 。

表 18 Leland モデル : k の変化

$k^{(a)}$	C^*	A_B	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.1	16.5	88.9	200.9	58.4	259.3	0.77
0.3	14.2	76.8	179.1	72.2	251.2	0.71
0.5	12.5	67.4	161.0	83.9	245.0	0.66
0.7	11.1	60.0	145.9	94.1	240.0	0.61
0.9	10.0	53.9	133.1	102.8	235.9	0.56

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$ 。

導入の結果による解が知られているものとして 2 つの方法があるが、1 つは非常に高級な (複雑な) 関数が登場する方法であり、もう 1 つは多少の制約はあるものの Leland モデルと同様の手法で解を導出できる方法である。ここでは、Leland(1994) でほんの少しだけ触れられている後者の方法に依ってキャッシュフローを導入する。

企業のキャッシュフローを明示する最も簡単な方法は、状態変数を記述する (13) 式を次のように変更することである。

$$dA_t = (\mu - \beta)A_t dt + vA_t dZ_1 \quad (37)$$

ここで登場する βA_t が何かということが重要な点なのであるが、とりあえずここでは、仮に企業に負債が存在しないとき株主へ配当されるキャッシュフローであるとしておく。

モデルの基本的な前提についてはすべて 4 節を踏襲する。法人税や負債、そして倒産コストの仮定はすべて同じである。負債はコンソル債が想定されていて利子 C を支払う。いうまでもなく債権者へのキャッシュフローは C である。この場合、株主へ配当されるキャッシュフローはどのように表現できるか。これは $\beta A_t - C + \tau C$ である。負債の存在しないときの配当が βA_t であるなら、同じ企業 (同じ保有資産) であり続ける限り、^{*17} 負債が存在するときの配当は βA_t から利子支払分を控除したものである。ただし利払い 1 単位当り τ の節税効果が発生するので τC が加えられる。周知のように、負債の利子支払額が C であるとき、企業が投資家全体 (株主と債権者) に支払うキャッシュフローは $\beta A_t + \tau C$ になる。

以上のようなキャッシュフローを導入すると、株式価値 S_t や負債価値 B_t が満たすべき均衡条件

*17 どうして同じ企業 (同じ保有資産) であり続ける必要があるかということ、もし企業がキャッシュフローの一部を内部留保したとすると、これは企業の保有資産を変化させる。内部留保されたキャッシュは再投資されるのでいくらかの収益をもたらすであろう。するとこれはパラメーター μ や v を変化させることになる。本稿で扱っているモデルはすべて μ や v に相当するパラメーターを定数と考えている。これらが定数であるためには、キャッシュフローを産み出す源泉の保有資産が同じままでなければならないし、そのためには産み出されたキャッシュフローは投資家 (債権者と株主) にすべて配分され社外へ流失しなければならない。

は次のように書ける。

$$\frac{\partial S}{\partial A_t}(r - \beta)A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - rS + \beta A_t - (1 - \tau)C = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial A_t}(r - \beta)A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - rB + C = 0$$

これら常微分方程式に境界条件を考慮すると解を導くことができる。株式価値については (36) 式を、負債価値については (26) 式を境界条件にすると、

$$S(A_t) = A_t - (1 - \tau) \frac{C}{r} + \left[(1 - \tau) \frac{C}{r} - A_B \right] \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^y \quad (38)$$

$$B(A_t) = \frac{C}{r} + \left[(1 - k)A_B - \frac{C}{r} \right] \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^y \quad (39)$$

$$\text{ただし, } y = \frac{1}{2} - \frac{r - \beta}{v^2} - \sqrt{\left(\frac{r - \beta}{v^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{v^2}} \quad (< 0)$$

が解であり、これらを合計すれば企業価値が得られる。

$$V(A_t) = A_t + \frac{\tau C}{r} \left[1 - \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^y \right] - k A_B \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^y \quad (40)$$

オリジナルの Leland モデルで得られた各価値の定式化 ((33) 式と (27) 式, (32) 式), そしてここでキャッシュフローを考慮して導出された定式化 ((38) 式と (39) 式, (40) 式), これらを見比べると違いはオリジナルの方の X を $-y$ で置き換えればよいだけである。従って倒産発生点 A_B や最適な利子支払額 C^* , およびこれらを前提に導出される各価値の定式化も, すべてオリジナルの X のところを $-y$ で置き換えればよい。

さてキャッシュフローを明示的に導入したので, 倒産発生の定義について確認しておこう。キャッシュフローを導入したとしてもやはり, 状態変数 A_t が A_B に到達したとき倒産発生という点では前の定義と同じである。元々倒産とは C というキャッシュフローを支払えなくなることによって発生するものであるが, この点はキャッシュフローを明示しても, 外見的には倒産発生の定義に入っていない。これはどうしてなのか。

企業の保有資産の産み出す収益を EBIT としよう。説明の便宜上, この EBIT(の瞬間的な値) を Q_t で表す。EBIT から負債の利子と法人税を支払った残りが株主に帰属する利益であるが, 単純化のため, 企業は一切内部留保せずこれをすべて株主に配当したとしよう。もし負債が存在しないなら, EBIT から法人税を支払った残りの $(1 - \tau)Q_t$ が株主に配当されることになる。この $(1 - \tau)Q_t$ がこの小節で示した βA_t に相当する。資産とはそもそも収益の源泉として定義されるので, その資産に帰属する収益として何らかのキャッシュフローが対応しているはずである。この A_t とは, 企業の保有する資産価値であるとされているが, 厳密にいうなら, $(1 - \tau)Q_t$ というキャッシュフローを資本還元した資産価値が A_t である。なおモデルでは, β は定数と仮定されているので, $\frac{(1 - \tau)Q_t}{A_t}$ という比率ないしは利回りは定数である。

議論を倒産発生の定義に戻すと、負債が存在するなら、 Q_t が C 以上であるとき、EBIT から負債の利子を支払えばよいから倒産は発生し得ない。問題は $Q_t < C$ のときである。EBIT だけでは利子を全額支払うことができない。しかしそうであっても、 $Q_t < C$ が即倒産を意味するわけではない。たとえ $Q_t < C$ であっても、株式価値が正であるなら倒産は回避できる。株式価値が正ということは、新株を発行すればいくらかの資金を調達できるからである。この調達資金でもって利子を支払えばよい。すなわち、EBIT でもって利子を全額支払えないとき、不足分は新株発行により調達した資金から支払われるので、結局利子全額は支払われていて倒産が回避される。ところが株式価値がゼロであるなら、もはや新株発行して新しい資金を入手することは不可能なので、EBIT の Q_t が C 未満であるなら、このときは即座に倒産である。

Leland モデルでは、株式価値の境界条件において $A_t = A_B$ のとき株式価値はゼロであった。今、キャッシュフローが導入されたので、 $A_t = A_B$ が本当に倒産であるためには、 $Q_t < C$ でなければならない。ところで $(1 - \tau)Q_t = \beta A_t$ という関係があるので、

$$\frac{\beta A_t}{1 - \tau} < C$$

であってはじめて、 $A_t = A_B$ が倒産ということになる。これを書き換えると、

$$A_B < \frac{C(1 - \tau)}{\beta}$$

である。この不等式は、内生的に決定される A_B が満たさなければならない制約である。証明は省略するが、この不等式制約は満たされている。以上のことから、キャッシュフローをモデルに明示的に導入しても、倒産発生は状態変数 A_t が A_B に到達するときであると定義することができるのである。

4.6 修正 Leland モデルのシミュレーション

以上が Leland モデルにキャッシュフローを導入した修正モデルである。これについて前と同様のシミュレーションを実行してみた。結果はオリジナルの Leland モデルで得られたものとほぼ同様となったので、掲載は省略したい。若干の違いはキャッシュフローを導入すると、負債比率が数% 低下することである。

それでは、 β が変化するときどのような結果となるか。これが表 19 である。確かに β が増加するとき負債比率は低下している。現実企業の負債比率は、企業収益率と強い負の相関のあることが知られている。この点では、修正 Leland モデルは現実企業の動向と整合的である。ただ β の値が 15 倍に増大しても、負債比率の低下は高々数% にすぎないので、負債比率のレベルに与える効果は小さいと考えられる。この結果、オリジナルの Leland モデルにキャッシュフローを形式的に導入したとしても、モデルから計算される負債比率は高留まりしていて、前で述べたことと同じ批判が当てはまる。

表 19 修正 Leland モデル : β の変化

$\beta^{(a)}$	C^*	A_B	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.01	14.6	74.9	176.9	73.0	249.9	0.71
0.05	16.4	68.3	169.7	75.8	245.5	0.69
0.08	18.0	64.7	165.7	77.4	243.1	0.68
0.10	19.3	62.8	163.6	78.2	241.8	0.68
0.15	22.6	59.2	159.8	79.7	239.5	0.67

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4, k = 0.3, A_0 = 200, r = 0.05, v = 0.35$ 。

5 Leland モデルの拡張 : 負債の再交渉

5.1 負債の再交渉 : FS モデル

ここでは、4.5 節で述べたようなキャッシュフローの想定の下、負債の再交渉という新たな要因を考慮して Leland モデルを拡張したい。負債の再交渉の問題を本格的に議論しているのは、MellaBarral-Perraudin(1997) と MellaBarral(1999) であるが、残念なことにこれらは負債の大きさ、つまり資本構成決定の問題を所与としている。負債の再交渉を包含して負債の最適値までを議論しているのは Fan-Sundaresan(2000) である。そこで Fan-Sundaresan(2000) のモデル (以下では FS モデルと称する) を紹介することにしよう。

Leland モデルでは、状態変数の A_t が下落して倒産発生点 A_B に到達すると、倒産が発生して企業は消滅してしまう。その際、 kA_B という倒産コストが発生するので、債権者の取り分は残りの $(1-k)A_B$ で、株主の取り分はゼロである。ところがもっと早い段階で、いいかえると、 A_B よりも大きな値の臨界値に A_t が到達するとき、企業と債権者が交渉して、利子支払額 C を値切るならば倒産は回避され、かつそのとき株主も債権者も倒産時より大きな取り分を手にすることができる。利子が値切られる結果、債権者の取り分は $(1-\theta)V_t$ 、株主の取り分は θV_t であるとしよう。これらが本当に倒産時における取り分よりも大きいなら、このような負債の再交渉が (倒産の前に) 両者の誘因により始められるはずである。負債の再交渉が開始される状態変数の臨界値を A_S で表し、これを交渉開始点と称する。

$A_t = A_S$ となって負債の再交渉がなされる結果、取り分のシェア θ はどのように決定されると考えればよいか。ここでは Nash 交渉解に従い θ が決定されるものとする。仮に交渉が実施されず倒産に至るのであれば、取り分は株主がゼロ、債権者が $(1-k)A_t$ である。対して、もし交渉がなされて株主と債権者の間で取り分のシェアが合意されるなら、取り分の増加は株主が $\theta V_t - 0$ 、債権者が $(1-\theta)V_t - (1-k)A_t$ である。交渉力を株主が η 、債権者が $1-\eta$ というパラメーターで表現する

なら，Nash 交渉解とは次のように決定される θ^* のことをいう。

$$\theta^* = \arg \max_{\theta} \{\theta V_t\}^{\eta} \{(1 - \theta)V_t - (1 - k)A_t\}^{1-\eta}$$

上式を θ で微分して計算すると，

$$\theta^* = \eta - \eta \frac{(1 - k)A_t}{V_t}$$

という結果を得る。この θ^* が Nash 交渉解による最適な取り分である。

負債の再交渉の結果，株主と債権者の取り分は企業価値に依存する。従ってまず企業価値の定式化から求めることにしよう。 $A_t > A_S$ の場合，企業が投資家（債権者 + 株主）に支払うキャッシュフローは $\beta A_t + \tau C$ である。対して $A_t \leq A_S$ の場合は，負債の節税効果を喪失するものと仮定する。よって $A_t \leq A_S$ のときに V_t が産み出すキャッシュフローは βA_t になる。これらのことから企業価値 V_t の均衡条件は次のように定式化できる。^{*18}

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial A_t}(r - \beta)A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - rV + \beta A_t + \tau C &= 0 & \text{for } A_t > A_S \\ \frac{\partial V}{\partial A_t}(r - \beta)A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - rV + \beta A_t &= 0 & \text{for } A_t \leq A_S \end{aligned}$$

これら式の 1 階の偏微分係数の項は，(11) 式を書き換えた

$$(\mu - \beta)A_t - \lambda_1 v A_t = rA_t - \beta A_t$$

という関係を利用している。この関係は Leland モデルと同様， A_t が市場取引可能な（第 1 番目の）証券価格であることを想定したときに成立するものである。これら常微分方程式を解くと

$$V(A_t) = \begin{cases} A_t + \frac{\tau C}{r} + G_1 A_t^x + G_2 A_t^y & \text{for } A_t > A_S \\ A_t + G_3 A_t^x + G_4 A_t^y & \text{for } A_t \leq A_S \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \frac{r - \beta}{v^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \beta}{v^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{v^2}} > 1 \\ y &= \frac{1}{2} - \frac{r - \beta}{v^2} - \sqrt{\left(\frac{r - \beta}{v^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{v^2}} < 0 \end{aligned}$$

を得る。ここの G_1, G_2, G_3, G_4 は任意の定数である。これら定数は境界条件を考慮することで特定化される。まず第 1 の境界条件の

$$A_t \gg A_S \text{ のとき } \quad V(A_t) = A_t + \frac{\tau C}{r}$$

^{*18} このモデルの状態変数 A_t は (37) 式に従うものとする。このとき本文のような均衡条件が導出される点はもはや説明を要しないであろう。

から $G_1 = 0$ である。第 2 の境界条件

$$\lim_{A_t \downarrow 0} V(A_t) = 0$$

から $G_4 = 0$ である。 G_2 と G_3 については次のような 2 つの境界条件を連立方程式にして解く。

$$\begin{aligned} \lim_{A_t \downarrow A_S} V(A_t) &= \lim_{A_t \uparrow A_S} V(A_t) \\ \lim_{A_t \downarrow A_S} \frac{\partial V}{\partial A_t} &= \lim_{A_t \uparrow A_S} \frac{\partial V}{\partial A_t} \end{aligned}$$

この結果、企業価値 V_t の定式化は以下のとおりとなる。

$$V(A_t) = \begin{cases} A_t + \frac{\tau C}{r} - \frac{x}{x-y} \frac{\tau C}{r} \left(\frac{A_t}{A_S}\right)^y & \text{for } A_t > A_S \\ A_t - \frac{y}{x-y} \frac{\tau C}{r} \left(\frac{A_t}{A_S}\right)^x & \text{for } A_t \leq A_S \end{cases}$$

企業価値が導出されたので、これを使って株式価値 $S_t = S(A_t)$ を導く。この均衡条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A_t}(r - \beta)A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - rS + \beta A_t - (1 - \tau)C &= 0 & \text{for } A_t > A_S \\ \frac{\partial S}{\partial A_t}(r - \beta)A_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial A_t^2} v^2 A_t^2 - rS + \beta A_t - P(A_t) &= 0 & \text{for } A_t \leq A_S \end{aligned}$$

である。 $A_t \leq A_S$ で負債の再交渉が行われるため、利子 C が値切られて $P(A_t)$ のキャッシュフローが債権者に支払われる。この $P(A_t)$ がどのような形になるかは後述する。まず $A_t > A_S$ の場合を取り上げよう。この常微分方程式の解は

$$S(A_t) = A_t - \frac{(1 - \tau)C}{r} + G_1 A_t^x + G_2 A_t^y$$

のように書ける。 G_1 と G_2 は定数で、境界条件から特定化される。境界条件は

$$\begin{aligned} A_t \gg A_S \text{ のとき } S(A_t) &= A_t - \frac{(1 - \tau)C}{r} \\ \lim_{A_t \downarrow A_S} S(A_t) &= \lim_{A_t \downarrow A_S} \theta^* V(A_t) \end{aligned}$$

の 2 つであるが、最初の条件から $G_1 = 0$ である。2 番目の条件の右辺は、適当に代入すると

$$\lim_{A_t \downarrow A_S} \theta^* V(A_t) = \lim_{A_t \downarrow A_S} \eta \left\{ kA_t + \frac{\tau C}{r} - \frac{x}{x-y} \frac{\tau C}{r} \left(\frac{A_t}{A_S}\right)^y \right\} = \eta \left\{ kA_S - \frac{y}{x-y} \frac{\tau C}{r} \right\}$$

であるから、これを使うと株式価値は以下のとおりである。

$$S(A_t) = A_t - \frac{(1 - \tau)C}{r} - \left\{ (1 - \eta k)A_S - \frac{(1 - \tau)C}{r} + \eta \frac{y}{x-y} \frac{\tau C}{r} \right\} \left(\frac{A_t}{A_S}\right)^y$$

交渉開始点 A_S の決定は次のような smooth pasting 条件から求める。^{*19}

$$\lim_{A_t \downarrow A_S} \frac{\partial S}{\partial A_t} = \frac{\partial \theta^* V(A_S)}{\partial A_S}$$

この右辺に θ^* と $V(A_S)$ を代入し、左辺は前の $S(A_t)$ を A_t で微分する。そしてこの smooth pasting 条件を満たすような A_S は次のようになる。

$$A_S = \frac{1}{1 - \eta k} \frac{-y}{1 - y} \frac{C}{r} \left(1 - \tau - \frac{y}{x - y} \tau \eta \right)$$

次に $A_t \leq A_S$ の場合はどのように考えればよいか。 A_t が A_S 以下である限り、再交渉が連続的に実行される。再交渉の結果は株主の取り分が $\theta^* V(A_t)$ でなければならないから、 $A_t \leq A_S$ である限り株式価値は

$$S(A_t) = \theta^* V(A_t) = \eta \left\{ k A_t - \frac{y}{x - y} \frac{\tau C}{r} \left(\frac{A_t}{A_S} \right)^x \right\}$$

でなければならない。そこで問題としては、株式価値が上記のものであるためには、債権者に利子を値切っていくらを支払う必要があるかということになる。すなわち、この株式価値の定式化を均衡条件に代入することで $P(A_t)$ を決定することになる。この計算の結果は

$$P(A_t) = (1 - \eta k) \beta A_t$$

である。前で求められた A_S を使うと、 $P(A_S) < C$ であることが容易に確認できる。

さて以上のように企業価値と株式価値が定式化されたので、負債価値 $B_t = B(A_t)$ は $V(A_t) - S(A_t)$ として求めればよい。結果のみを記すと、

$$B(A_t) = \begin{cases} \frac{C}{r} + \left[(1 - \eta k) A_S - \frac{(1 - \tau) C}{r} - \eta \frac{\tau C}{r} - \frac{x}{x - y} \frac{\tau C}{r} (1 - \eta) \right] \left(\frac{A_t}{A_S} \right)^y & \text{for } A_t > A_S \\ (1 - \eta k) A_t - (1 - \eta) \frac{y}{x - y} \frac{\tau C}{r} \left(\frac{A_t}{A_S} \right)^x & \text{for } A_t \leq A_S \end{cases}$$

のようになる。なおこの定式化は、負債価値の満たすべき均衡条件に境界条件を考慮しても導出することができる。

最後に最適な資本構成は、負債を発行する 0 時点において、 $\frac{\partial V_0}{\partial C} = 0$ を満たすような C の値を求めれば、それが最適な利子支払額 C^* である。これらの計算結果は次のとおりである。

$$C^* = \left(\frac{x(1 - y)}{x - y} \right)^{\frac{1}{y}} \frac{A_0}{\Gamma}$$

ただし $\Gamma = \frac{1}{1 - \eta k} \frac{-y}{(1 - y)r} \left(1 - \tau - \frac{y}{x - y} \tau \eta \right)$

^{*19} 前のバージョン『三田商学研究』では、smooth pasting 条件の適用方法を間違えて、異なる交渉開始点 A_S を導いていた。本稿の A_S が正しい導出方法で、この場合、 A_S に関する株式価値 $S(A_t)$ 最大化が保証される。この点については、富田信太郎氏から指摘を受けた。記して謝意を表したい。この変更に伴い、以下のシミュレーションの計算結果も変更している。

表 20 FS モデル： A_0 の変化

$A_0^{(a)}$	C^*	A_S	θ^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
180.0	28.0	125.4	0.24	188.9	58.1	247.0	0.765
190.0	29.6	132.3	0.24	199.4	61.3	260.7	0.765
200.0	31.1	139.3	0.24	209.9	64.6	274.4	0.765
210.0	32.7	146.3	0.24	220.3	67.8	288.1	0.765
220.0	34.2	153.2	0.24	230.8	71.0	301.9	0.765

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\eta = 0.5$, $\beta = 0.08$ 。

表 21 FS モデル： r の変化

$r^{(a)}$	C^*	A_S	θ^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.03	27.6	129.3	0.24	207.1	63.7	270.8	0.765
0.04	29.3	134.4	0.24	208.6	64.1	272.7	0.765
0.05	31.1	139.3	0.24	209.9	64.6	274.4	0.765
0.06	33.0	144.0	0.25	210.9	65.1	276.0	0.764
0.07	34.9	148.5	0.25	211.8	65.5	277.4	0.764

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $v = 0.35$, $\eta = 0.5$, $\beta = 0.08$ 。

表 22 FS モデル： v の変化

$v^{(a)}$	C^*	A_S	θ^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.25	22.6	130.0	0.24	204.0	65.2	269.2	0.758
0.30	26.6	134.7	0.24	207.1	64.7	271.8	0.762
0.35	31.1	139.3	0.24	209.9	64.6	274.4	0.765
0.40	36.4	143.7	0.25	212.3	64.8	277.0	0.766
0.45	42.3	147.9	0.25	214.3	65.3	279.6	0.767

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $\eta = 0.5$, $\beta = 0.08$ 。

これを見るとわかるように、最適な利子支払額 C^* は、負債の発行時点の状態変数 (企業の資産価値) A_0 の 1 次同次になっている。そして C^* が A_0 の 1 次同次関数であれば、 A_S も A_0 の 1 次同次であり、証券価値の S_0 や B_0 , V_0 も A_0 の 1 次同次関数になっている。

5.2 FS モデルのシミュレーション

ここで FS モデルの特色をシミュレーションで調べてみよう。FS モデルは解析的に完全に解かれているので、数値探索をする必要はない。前で導出した式を使って、パラメータに適切な数値を代入することで、モデルが決定する内生変数の値を知ることができる。

前と同様、負債発行時の 0 時点分析対象とし、外生的なパラメータは保有資産の価値 A_0 と無

表 23 FS モデル : τ の変化

$\tau^{(a)}$	C^*	A_S	θ^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.30	27.2	139.3	0.22	192.1	56.8	248.8	0.771
0.35	29.1	139.3	0.23	200.4	60.4	260.8	0.768
0.40	31.1	139.3	0.24	209.9	64.6	274.4	0.765
0.45	33.5	139.3	0.26	220.8	69.4	290.2	0.760
0.50	36.3	139.3	0.27	233.6	75.0	308.5	0.757

^(a) その他のパラメータは $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\eta = 0.5$, $\beta = 0.08$ 。

表 24 FS モデル : k の変化

$k^{(a)}$	C^*	A_S	θ^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.1	34.8	139.3	0.18	234.5	48.6	283.2	0.828
0.3	31.1	139.3	0.24	209.9	64.6	274.4	0.765
0.5	27.5	139.3	0.31	185.2	80.5	265.7	0.697
0.7	23.8	139.3	0.38	160.5	96.4	256.9	0.625
0.9	20.1	139.3	0.46	135.8	112.4	248.2	0.547

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\eta = 0.5$, $\beta = 0.08$ 。

表 25 FS モデル : β の変化

$\beta^{(a)}$	C^*	A_S	θ^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.01	27.8	190.3	0.26	219.5	75.4	295.0	0.744
0.05	29.5	157.1	0.25	215.3	66.6	282.0	0.764
0.08	31.1	139.3	0.24	209.9	64.6	274.4	0.765
0.10	32.4	130.4	0.24	206.2	64.2	270.4	0.762
0.15	36.1	115.0	0.23	198.4	64.9	263.3	0.754

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\eta = 0.5$ 。

表 26 FS モデル : η の変化

$\eta^{(a)}$	C^*	A_S	θ^*	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.2	35.7	139.3	0.10	249.7	35.5	285.2	0.875
0.4	32.6	139.3	0.20	222.6	55.3	277.9	0.801
0.5	31.1	139.3	0.24	209.9	64.6	274.4	0.765
0.6	29.7	139.3	0.29	197.6	73.4	271.0	0.729
0.8	26.9	139.3	0.38	174.3	90.0	264.3	0.660

^(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\beta = 0.08$ 。

危険利子率 r , ボラティリティ v , 法人税率 τ , 倒産コスト k , そして企業の収益率 β と株主の交渉力 η である。これらの値は $A_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $\beta = 0.08$, $\eta = 0.5$ をベースとする。これらの中で1つのみパラメーターの値が変化するとき、モデルの内生変数がどうなるかをシミュレーションする。内生変数は利子支払額 C^* , 交渉開始点 A_S , 最適な取り分 θ^* , 負債価値 B_0 , 株式価値 S_0 , 企業価値 V_0 である。

表 20 から、 C^* と A_S , B_0 , S_0 , V_0 が A_0 の 1 次同次になっていることが確認できる。また表 21 から、Leland モデルと異なり、 r の変化により負債比率はほとんど変化しないことがわかる。表 23 から k の上昇により負債比率は低下している。負債比率の値は 0.7 前後とやはり大きく、倒産コストが $k = 0.9$ のケースであっても負債比率が 0.5 を下回ることはない。この特徴は Leland モデルと同じである。

さて負債の再交渉という要因をどう評価すべきであろうか。直感的に考えると、負債の再交渉が可能であるなら、それが不可能な場合よりも最適な負債依存度は大きくなるであろう。負債依存度を大きくして節税効果を楽しみ、倒産しそうになれば再交渉を申し出て利子支払額を値切れるからである。 A_0 と r の変化に関しては、Leland モデルの表 14・表 15 と、ここの表 20・表 21 とを比較すると、確かに負債の再交渉を考慮することで、負債比率は上昇している。しかしその上昇の程度は高々数 % ほどであるから、負債の再交渉という要因そのものは、負債比率のレベルにそれほど大きなインパクトを与えないのかもしれない。

FS モデルと Leland モデルとで顕著な差となるのが v と τ の変化の効果である。表 22 を見ると、 v の上昇は負債比率をわずかに上昇させているのがわかる (Leland モデルの場合、負債比率は低下)。 v の上昇で負債価値は上昇し、株式価値は低下して、通常の倒産コストモデルとまったく異なる動きをする。これはある程度は納得できよう。つまりボラティリティが大きい状況であるほど、負債の再交渉の重要性が増す可能性がある。もっとストレートにいつてしまうと、ボラティリティが大きな状況下では、負債の再交渉をはじめから当てにして、節税効果を楽しむべく負債依存度を高める可能性がある。この結果、ボラティリティの上昇は負債比率を上昇させる。この考え方が妥当かどうかは、パラメーターの設定値をもう少しいろいろ変更して検討する必要がある。他方、解釈不能な結果をもたらしているのが、 τ の変化を調べた表 23 である。 τ の上昇によりわずかに負債比率は低下してしまう。

次の表 25 は β の変化の効果調べている。 β の上昇が負債比率を低下させるかどうかは不明である。この β は企業収益率とみなすことができよう。現実には、企業収益率と負債比率との間に強い負の相関を見出すことが多い。しかし β の値が大きく増大しても、負債比率の動きはごくわずかである。

最後に表 26 は η が変化する場合である。株主の交渉力 η が増大するほど負債比率は低下している。株主の交渉力の増大は、負債価値の低下と株式価値の上昇をもたらしているという点は納得的である。

以上が FS モデルのシミュレーション結果であるが、Leland モデルと同様、モデルで決定される負債比率が大きすぎる。負債の再交渉という要因は、ボラティリティが大きいような状況下では重要になり得るかもしれないが、それでも負債比率の値に与える影響度はそれほど大きなものでないことが、このシミュレーションで明らかである。

6 負債の再構成：GJL モデル

6.1 モデルの概要

Goldstein-Ju-Leland(2001) は (以下 GJL モデルと略称)、4 節で述べた Leland モデルを拡張した。彼らは Leland モデルの欠点を克服した上で、さらに動学的な資本構成モデルの構築という点で著しい成果をあげたといつてよい。

ここでいう動学的な資本構成モデルとは、複数時点での負債に関する意思決定をいう。それまでのモデルは基本的には 1 つの時点のみの意思決定であったが、彼らは将来に負債が再構成 debt restructuring される可能性を考慮して、現在時点の最適資本構成を決定しようとした。将来の負債の再構成ということで、将来に負債を改めて発行できるチャンスがあるなら、今、無理に過大な負債を発行する必要はないであろう。シミュレーションからわかるように、Leland モデルのような倒産コストモデルでは、最適な資本構成における負債が、現実企業の負債よりも相当過大になってしまう。これは意思決定が負債発行時点のみで行われ、将来に負債を拡大するチャンスがないからかもしれない。もし将来、幸なことに良好な状態が継続し、企業の規模が徐々に拡大していくなら、その規模に適った負債の最適も大きくなるはずである。ところが将来に負債発行のチャンスがないなら、将来の負債拡大の可能性をも考慮して、今、負債の量を決めなければならないので、どうしても最適な負債依存度は過大になってしまう。これに対して、将来に負債発行のチャンスが存在するなら、今、無理をして大きな負債を発行する必要がないから、現在の最適な負債量は小さくできる。この理由から、将来の負債の再構成を考慮すると、たとえ倒産コストモデルであっても、現在時点での最適な負債量は現実企業の水準並みに小さくできるかもしれない。

将来の負債の再発行というこのアイデア自体は GJL モデルが最初ではなく、Fischer-Heinkel-Zechner(1989) に依る。GJL モデルは、Leland モデルを修正・拡張して、このアイデアを包含することに成功したモデルであり、今後、様々なトピックスに応用され得るモデルであるから、ここで詳しく触れておこう。

6.2 モデルの前提

Leland モデルでは、コンソル債を想定し連続的な利子支払と法人税の節税を考慮していたにもかかわらず、企業の資産の産み出すキャッシュフローを明示的に取り扱わなかったため、利子や法人

税がどのように支払われているのかという点が曖昧であった。GJL モデルではこの欠点を修正すべく、企業の保有資産の産み出すキャッシュフローを EBIT として明示的にモデルに取り入れる。

負債はここでもコンソリ債が想定され、連続的に利子 C (定数) が支払われる。ただしここでは未知の将来時点で、倒産発生の可能性のみならず、負債が再構成され得ることを考慮する。負債が再構成される場合、単純化のため、既発行の負債すべてが一旦途中償還され、その時点で最適な負債量のコンソリ債が再発行されるものとする。なお負債の償還価格は発行価格でなされるものとする。

ところで、もし負債を再構成する際の取引コストがゼロであるなら、負債の再構成は状態変数の値に応じて連続的に実行されるであろう。この点を Leland モデルを借用して説明すると、最適な利子支払額 C^* は負債発行時点の状態変数の値 A_0 の一次同次関数であった。状態変数が刻々と変化するのに対し、利子支払額は負債が一度発行されてしまえば定数である。時間が経過し状態変数の値が変化すれば、前に発行された負債の利子支払額はもはや最適値ではない。状態変数の新しい値に対応した利子支払額の新しい最適値が存在するであろう。従って負債の再構成の取引コストがゼロであるなら、状態変数の変化に伴って連続的に負債はそのときの最適値に調整される。しかし取引コストがゼロでないなら、このような負債の再構成は起らない。取引コストが存在すると、連続的な調整ではコストが大きくなり過ぎるからである。取引コストが存在するときの調整方法は、臨界値を設定しておいて、状態変数とその臨界値に到達するときに、一度に調整を行うのが最適であることが知られている。すなわち、負債の再構成は将来時点において離散的な間隔をもって (可付番無限個で) 発生する。このような負債の再構成を発生させる状態変数の臨界値を、ここでは負債再発行点と称しよう。負債の再構成に伴う取引コストは負債の発行価格に比例するものとし、その比率は κ である。

モデルの状態変数は唯一 EBIT で、以下では EBIT を δ_t で表す ($x_1 = \delta_t$)。 δ_t の確率過程は

$$d\delta_t = \alpha\delta_t dt + v\delta_t dZ_1 \quad (41)$$

のような確率微分方程式に従うとする (α と v は定数)。この状態変数に基づく証券価格の均衡条件では、 δ_t が証券価格ではないので、状態変数 δ_t に伴う λ_1 は決定できずにそのまま式の中に残ることになる。ここで将来 EBIT の $\delta_t (l \geq t)$ を価値還元した価格 W_t を考えよう。 W_t は市場取引可能な証券価格であると考え、第 1 番目の証券価格であるとしよう ($f_1 = W_t = W(\delta_t, t)$)。すると (7) 式を適用して、

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \delta_t} (\alpha - \lambda_1 v) \delta_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \delta_t^2} v^2 \delta_t^2 - rW_t + \delta_t = 0$$

が W_t に関する均衡条件である。なお W_t から連続的に δ_t のキャッシュフローが産み出されるので、(7) 式の c_k に相当するのが δ_t である。この均衡条件に Feynman-Kac 公式の (8) 式を当てはめたいのであるが、今 $T \rightarrow \infty$ である。通常の数学的条件の下では $T \rightarrow \infty$ の下、(8) 式の第 2 項はゼ

口になり，期待値自体も収束すると考えられるので，(8) 式は

$$W_t = E_t^* \left[\int_t^\infty \delta_l e^{-r(l-t)} dl \right]$$

のように書ける。もし λ_1 が定数であるなら，^{*20} δ_l は

$$\ln \delta_l \sim N \left(\ln \delta_t + \left(\alpha - \lambda_1 v - \frac{v^2}{2} \right) (l-t), v^2 (l-t) \right)$$

という δ_l を条件とした確率分布に従うので，これを使って期待値を評価すると

$$W_t = \frac{\delta_t}{r - \alpha + \lambda_1 v} \quad (42)$$

となる。このことから W_t は δ_t と線形関係にあることがわかり， δ_t の値がわかれば W_t の値もわかるので， W_t も状態変数ということになる。

そこで次に状態変数としての W_t の確率過程を (41) 式と (42) 式とから導くと，

$$dW_t = \alpha W_t dt + v W_t dZ_1 \quad (43)$$

が得られる。 W_t は証券価格でもあるから，状態変数が証券価格でもあるときに成立する (11) 式を書き換えると，

$$(\alpha - \lambda_1 v) W_t = r W_t - \delta_t \equiv \gamma W_t$$

という関係が成立する。この式の最左辺は，状態変数が (43) 式に従うときの $m_1 - \lambda_1 s_1$ に相当する。この中の $(\alpha - \lambda_1 v)$ の部分は定数と仮定され，これを γ で記そう。このとき他の任意の証券価格 $f_k(W_t, t)$ の均衡条件および Feynman-Kac 公式は，

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial W_t} \gamma W_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial W_t^2} v^2 W_t^2 - r f_k + c_k(t) = 0 \quad (44)$$

$$f_k(W_t, t) = E_t^* \left[\int_t^\infty c_k(l) e^{-r(l-t)} dl \right]$$

となる。ただし $c_k(t)$ はこの証券の時点 t におけるキャッシュフローである。この期待値を評価するには，

$$dW_t = \gamma W_t dt + v W_t dZ_1^*$$

から求められる次の正規分布を用いればよい。

$$\ln W_l \sim N \left(\ln W_t + \left(\gamma - \frac{v^2}{2} \right) (l-t), v^2 (l-t) \right)$$

^{*20} もちろん本稿の範囲内のモデルでは， λ_1 が定数であると仮定する理由は何もない。 λ_1 が定数でないなら， $\ln \delta_t$ は正規分布には従わない。Goldstein-Zapatero(1996) は実物経済を考慮した (消費を内生化した) モデルを作って，この λ_1 に相当する変数が定数になるための条件を検討している。

ただここでは Leland モデルと同様、負債はコンソル債が想定されているので、負債の満期という特定の時点は存在せず、すべての時点は同質的である。すなわち、 $\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$ であるから均衡条件の (44) 式は常微分方程式になって、Feynman-Kac 公式を使うことなく解を導出できる。この常微分方程式の解は次のとおりであり、具体的な証券の価値は境界条件から特定化される。

$$f_k(W_t) = F_{PS} + G_1 W_t^{-Y} + G_2 W_t^{-X}$$

$$X = \frac{1}{v^2} \left[\gamma - \frac{v^2}{2} + \sqrt{\left(\gamma - \frac{v^2}{2} \right)^2 + 2rv^2} \right] > 0$$

$$Y = \frac{1}{v^2} \left[\gamma - \frac{v^2}{2} - \sqrt{\left(\gamma - \frac{v^2}{2} \right)^2 + 2rv^2} \right] < 0$$

この F_{PS} は特殊解であり、例えば $c_k(t) = \delta_t$ のとき $F_{PS} = W_t$ であり、 $c_k(t) = C$ のとき $F_{PS} = C/r$ 、 $c_k(t) = 0$ のとき $F_{PS} = 0$ である。

6.3 価値の定式化

ここでは前で述べた GJL モデルの前提に基づいて、株式価値や負債価値を定式化する。資本構成理論ではその伝統として、EBIT に対して負債や株式に帰属する部分を考え、EBIT を分割したキャッシュフローに対応する価値として負債価値や株式価値を定式化した。これに対し GJL モデルでは、EBIT 全体に対する価値をまず W_t として、この W_t を適当に分割することで株式価値と負債価値を導出する。

この価値の導出方法を直感的にいうと次のとおりである。負債（コンソル債）が 0 時点で発行されるとする。その利子支払額は C である。倒産発生点を W_B で、負債再発行点を W_U で表そう。今、任意時点 t で W_t は $W_U > W_t > W_B$ であるとする。将来の未知の時点 l で、 W_l が W_B に到達すると倒産であり、 W_l が W_U に到達すると負債の再構成（途中償還・再発行）が行われる。 $W_U > W_t$ であるから $W_l = W_U$ のとき、企業規模は時点 t より拡大しているので、最適な負債は増大するであろう。また W_l が W_B にも W_U にも達しない限り C が支払われ続ける。これらのことから将来の状態は、負債の利子支払、倒産、負債の再構成という 3 つの状態が起り得る。これら 3 つの状態に基づいて、 W_t を 3 つに分解しよう。永久に負債利子が支払われ続けるという将来の状態に基づく価値を $W_{sol}(W_t)$ で、倒産という状態に基づく価値を $W_{ban}(W_t)$ で、負債の再構成という状態に基づく価値を $W_{res}(W_t)$ で表す。当然、 $W_t = W_{sol}(W_t) + W_{ban}(W_t) + W_{res}(W_t)$ である。次に $W_{sol}(W_t)$ と $W_{ban}(W_t)$ 、 $W_{res}(W_t)$ の各々について、株式に帰属する部分と負債に帰属する部分、そして税金に帰属する部分と倒産コストに帰属する部分の 4 つに分解する。これらの中で株式に帰属する部分を合計したのが株式価値であり、負債に帰属する部分を合計したのが負債価値である。最後にこうして求められた株式価値 + 負債価値の 0 時点における値を最大化すべく、最適な C 、 W_B 、 W_U が決定される。後でも説明されるが、モデル内の内生変数、つまり株式価値や負債価値などの証券価格、そ

して C , W_B , W_U はすべて W_0 に関する 1 次同次関数になる。

以上の説明はごく直感的なもので、厳密には以下のとおりもう少し細かい話となる。まず W_t が未知の将来時点で W_U に到達するとき、1 円が支払われる証券の t 時点の価値を $p_U(W_t)$ で定義する。これは $c_k(t) = 0$ のケースで、境界条件を $p_U(W_U) = 1$, $p_U(W_B) = 0$ とし解を求めると、

$$p_U(W_t) = -\frac{W_B^{-X}}{\Sigma} W_t^{-Y} + \frac{W_B^{-Y}}{\Sigma} W_t^{-X} \quad \text{ただし } \Sigma = W_B^{-Y} W_U^{-X} - W_U^{-Y} W_B^{-X}$$

のようになる。次に W_t が未知の将来時点で W_B に到達するとき、1 円が支払われる証券の t 時点の価値を $p_B(W_t)$ とし定義すると、その境界条件は $p_B(W_U) = 0$, $p_B(W_B) = 1$ であるから、解は

$$p_B(W_t) = \frac{W_U^{-X}}{\Sigma} W_t^{-Y} - \frac{W_U^{-Y}}{\Sigma} W_t^{-X}$$

である。こうして求められた $p_U(W_t)$ と $p_B(W_t)$ を用いれば、上で述べた $W_{sol}(W_t)$ や $W_{ban}(W_t)$, $W_{res}(W_t)$ は非常に簡単な形で表現できるようになる。

$W_{res}(W_t)$ から始めよう。これは将来時点 t の W_t が W_U に到達してはじめて、EBIT への請求権が発生する証券の t 時点の価値と考えられるので、その境界条件を $W_{res}(W_U) = W_U$, $W_{res}(W_B) = 0$ とすると、解は

$$W_{res}(W_t) = W_U p_U(W_t)$$

である。 $W_{ban}(W_t)$ の方は、 W_t が W_B に到達してはじめて、EBIT への請求権が発生する証券の t 時点の価値であるから、その境界条件は $W_{ban}(W_U) = 0$ と $W_{ban}(W_B) = W_B$ である。このとき、

$$W_{ban}(W_t) = W_B p_B(W_t)$$

が解である。最後に $W_{sol}(W_t)$ は、 W_t が W_U や W_B に到達しない限り、EBIT への請求権を保持する証券の t 時点の価値であると考えられる。これは $c_k(t) = \delta_t$ のケースの解を適用し、境界条件は $W_{sol}(W_U) = 0$ と $W_{sol}(W_B) = 0$ のように書けるので、

$$W_{sol}(W_t) = W_t - W_U p_U(W_t) - W_B p_B(W_t) = W_t - W_{res}(W_t) - W_{ban}(W_t)$$

という解が導出される。 $p_U(W_t)$ と $p_B(W_t)$ の定義から、これら $W_{sol}(W_t)$ や $W_{ban}(W_t)$, $W_{res}(W_t)$ の定式化は整合的なものであることが容易に確認できよう。

もう 1 つ後で有用になるので、 $W_{int}(W_t)$ という価値を導出しておきたい。これは、 W_t が W_U や W_B に到達しない限り、 C を支払い続ける場合の t 時点の価値とする。解を求めると、 $c_k(t) = C$ のケースの解を適用し、境界条件を $W_{int}(W_U) = 0$ と $W_{int}(W_B) = 0$ とすると、

$$W_{int}(W_t) = \frac{C}{r} [1 - p_U(W_t) - p_B(W_t)]$$

のように書くことができる。この定式化は、 $W_{sol}(W_t)$ の中で負債に帰属する部分と考えることができる。このことは $p_U(W_t)$ と $p_B(W_t)$ の定義からも明らかであろう。

今までは任意の時点を対象にしていた。ここで導出したいのは、負債が発行される 0 時点の株式価値と負債価値であり、これらを導くのに、説明の便宜上「期間」という用語を定義しておこう。現在を第 0 時点としよう。そして $W_l(l > 0)$ がはじめて W_U に到達するまでの期間を第 0 期という。第 0 期の期末が第 1 時点である。第 0 期に関する倒産発生点が $W_B^{(0)}$ 、負債再発行点が $W_U^{(0)}$ 、負債の利子支払額が $C^{(0)}$ であり、これらが第 0 時点で選択される。次に $W_U^{(0)}$ の定義から、第 1 時点において、第 0 時点で発行された負債の再構成 (途中償還・再発行) が行われる。そして第 1 時点から次に W_l が W_U に到達するまでの期間が第 1 期である。第 1 期の期末を第 2 時点という。第 1 時点において第 1 期に関する倒産発生点 $W_B^{(1)}$ と負債再発行点 $W_U^{(1)}$ 、負債利子支払額 $C^{(1)}$ が選択されている。そして第 2 時点においては、第 1 時点で発行された負債の再構成がまた実行される。このように倒産しない限り、将来の無数の離散的な (可付番無限個の) 時点で負債の再構成が実行される。

期間という用語を用いると、その定義から $W_{res}(W_0)$ は、上で述べた第 1 期以降のすべての期間の EBIT に対する価値評価ということになる。また第 0 期の EBIT に対する価値評価は $W_{sol}(W_0)$ と $W_{ban}(W_0)$ の合計である。それでは $W_{sol}(W_0)$ と $W_{ban}(W_0)$ の中で、株式と負債に帰属する部分および税金、倒産コストに帰属する部分を求めよう。まず $W_{sol}(W_0)$ の中で負債に帰属する部分であるが、これは前で述べた $W_{int}(W_0)$ である。この $W_{int}(W_0)$ を $W_{sol}(W_0)$ から控除した部分が税金に帰属する価値と株式に帰属する価値となる。これらは法人税率 τ と残りの $1 - \tau$ で分配される。次に $W_{ban}(W_0)$ であるが、この中で株主に帰属する部分はゼロである。倒産になると倒産コストが発生する。倒産コストは kW_B であるとする、 $W_{ban}(W_0)$ の中で倒産コストに帰属する価値は $kW_{ban}(W_0)$ であり、残りの $(1 - k)W_{ban}(W_0)$ が負債に帰属する価値となる。

第 0 期の EBIT の価値評価は $W_{sol}(W_0) + W_{ban}(W_0)$ であり、これを第 0 期の EBIT に対する分け前として適当に分割してみよう。第 0 期の EBIT の中で負債に帰属する部分の第 0 時点での価値を $d^{(0)}(W_0)$ 、株式に帰属する部分の第 0 時点での価値を $e^{(0)}(W_0)$ 、税金に帰属する部分の第 0 時点での価値を $g^{(0)}(W_0)$ 、倒産コストに関する第 0 時点での価値を $bc^{(0)}(W_0)$ のように記す。これらは

$$\begin{aligned} d^{(0)}(W_0) &= W_{int}(W_0) + (1 - k)W_{ban}(W_0) \\ e^{(0)}(W_0) &= (1 - \tau)[W_{sol}(W_0) - W_{int}(W_0)] \\ g^{(0)}(W_0) &= \tau[W_{sol}(W_0) - W_{int}(W_0)] \\ bc^{(0)}(W_0) &= kW_{ban}(W_0) \end{aligned}$$

である。これらを合計すれば当然、次のような関係が成立している。

$$\begin{aligned} e^{(0)}(W_0) + d^{(0)}(W_0) + g^{(0)}(W_0) + bc^{(0)}(W_0) &= W_{sol}(W_0) + W_{ban}(W_0) \\ &= W_0 - W_U p_U(W_0) (= W_0 [1 - p_U(W_0)\theta]) \end{aligned}$$

続いて第 1 期以降のすべての EBIT に対する価値評価を求めなければならない。これについては同次性を考慮する。第 0 時点で選択される負債の利子支払額 $C^{(0)}$ 、倒産発生点 $W_B^{(0)}$ 、証券の価値はすべて W_0 に関して 1 次同次である。これは Leland モデルからの類推としてそうなるものと

予想できるが、とりあえずここではこれらが一次同次であるものと仮定しよう。さらに負債再発行点 $W_U^{(0)}$ も W_0 に関して 1 次同次を仮定する。ここで $W_U^{(0)}/W_0 \equiv \theta$ とすると、定義から第 1 時点の $W_1(= W_U^{(0)})$ は W_0 の θ 倍の値である。ということは、第 1 時点で選択される負債の利子支払額 $C^{(1)}$ や倒産発生点 $W_B^{(1)}$ 、負債再発行点 $W_U^{(1)}$ 、証券の価値はすべて第 0 時点の値を θ 倍したものである。さらに、定義から第 2 時点の $W_2(= W_U^{(1)})$ は W_1 の θ 倍であり、 W_0 の θ^2 倍である。ということは、第 2 時点で選択される負債の利子支払額 $C^{(2)}$ や倒産発生点 $W_B^{(2)}$ 、負債再発行点 $W_U^{(2)}$ 、証券の価値はすべて第 1 時点の値を θ 倍、そして第 0 時点の値を θ^2 倍したものである。要するに負債の再構成が実施される各期の期首では、前の期の期首に比べて、すべてが θ 倍になっているのである。ここで $C^{(0)} \equiv C$ 、 $W_B^{(0)} \equiv W_B$ 、 $W_U^{(0)} \equiv W_U$ のように記号を改めて定義しておく。

この同次性の性質を考慮すれば、第 1 期以降について定式化するのは容易である。第 1 期以降のすべての EBIT に対する第 0 時点の価値評価は $W_{res}(W_0)$ であるが、これの分け前として負債に帰属する価値と株式に帰属する価値、そして税金や倒産コストに帰属する価値はどのようになるか。第 1 期以降のすべての EBIT に対して、負債に帰属する部分の第 0 時点での価値を $d(W_0)$ で表す。第 0 期の EBIT に対する負債に帰属する価値は $d^{(0)}(W_0)$ であった。第 1 期の EBIT に対するそれは $d^{(0)}(W_0)$ を θ 倍した大きさになるはずで、これを第 0 時点の価値に割引くのに $p_U(W_0)$ を乗ずればよい。また第 2 期の EBIT に対するそれは $d^{(0)}(W_0)$ を θ^2 倍した大きさになるはずで、これを第 0 時点の価値に割引くには $p_U(W_0)^2$ を乗ずればよい。このように考えれば、 $d(W_0)$ は

$$d(W_0) = \left[p_U(W_0)\theta + (p_U(W_0)\theta)^2 + \dots \right] d^{(0)}(W_0) = \frac{p_U(W_0)\theta}{1 - p_U(W_0)\theta} d^{(0)}(W_0)$$

のように書ける。次に第 1 期以降のすべての EBIT に対して、株式に帰属する部分の第 0 時点での価値を $e(W_0)$ 、税金に帰属する部分の価値を $g(W_0)$ 、倒産コストに関する価値を $bc(W_0)$ で表すと、これらは負債の場合と同様の考え方で、

$$\begin{aligned} e(W_0) &= \frac{p_U(W_0)\theta}{1 - p_U(W_0)\theta} e^{(0)}(W_0) \\ g(W_0) &= \frac{p_U(W_0)\theta}{1 - p_U(W_0)\theta} g^{(0)}(W_0) \\ bc(W_0) &= \frac{p_U(W_0)\theta}{1 - p_U(W_0)\theta} bc^{(0)}(W_0) \end{aligned}$$

として書くことができるであろう。いうまでもなく、これらの合計は $W_{res}(W_0)$ に等しくなる。

$$e(W_0) + d(W_0) + g(W_0) + bc(W_0) = W_U p_U(W_0) = W_{res}(W_0)$$

さて第 0 時点の負債価値を $B(W_0)$ とする。第 1 時点でこの負債は全額途中償還される。償還価格は発行価格であると仮定されているので、第 1 時点では債権者に $B(W_0)$ が支払われる。従って第 0 時点の負債価値は、第 0 期の EBIT からの分け前 $d^{(0)}(W_0)$ と、第 1 時点での途中償還額 $B(W_0)$ に関する第 0 時点価値 $p_U(W_0)B(W_0)$ とから成り、これら合計が第 0 時点の価値 $B(W_0)$ に等しいと

いうことになる。つまり

$$B(W_0) = d^{(0)}(W_0) + p_U(W_0)B(W_0)$$

であるから，これを書き換えて負債価値 $B(W_0)$ の定式化は次のとおりである。

$$B(W_0) = \frac{d^{(0)}(W_0)}{1 - p_U(W_0)}$$

第 0 時点の株式価値の方は複雑である。これを $S(W_0)$ で表すが，これを求めるには次の 3 つを考慮しなければならない。1 つは EBIT からの分け前の価値である。2 つめは，将来の負債の発行と償還に伴うキャッシュフローが存在するため，これも株式価値の一部となる。というのは，負債の再構成として途中償還と再発行が同時になされるが，このモデルでは絶えず途中償還額よりも再発行の金額の方が大きい。つまり再構成時点の毎に企業には現金が流入する。この現金は即株主に配当されなければならない。このため負債の発行と償還に伴うキャッシュフローは株式価値の一部となる。3 つめは負債発行に伴う調整コストである。これは企業によって負担されるが，この負担は当然株式価値を減じることになる。以上の 3 つを考慮して株式価値が計算される。

1 番目の EBIT からの分け前としての価値であるが，これは第 0 期の EBIT からの分け前と第 1 期以降のすべての EBIT からの分け前の合計である。

$$e^{(0)}(W_0) + e(W_0) = \frac{e^{(0)}(W_0)}{1 - p_U(W_0)\theta}$$

次に 2 番目の負債の発行と償還に伴うキャッシュフローであるが，これらキャッシュフローの第 0 時点における価値は下の表のようにまとめられる。

$+B(W_0)$	第 0 時点で発行される $B(W_0)$ の負債
$-p_U(W_0)B(W_0)$	第 1 時点で途中償還される第 0 時点発行の負債
$+p_U(W_0)\theta B(W_0)$	第 1 時点で発行される $\theta B(W_0)$ の負債
$-p_U(W_0)^2\theta B(W_0)$	第 2 時点で途中償還される第 1 時点発行の負債
$+p_U(W_0)^2\theta^2 B(W_0)$	第 2 時点で発行される $\theta^2 B(W_0)$ の負債
$-p_U(W_0)^3\theta^2 B(W_0)$	第 3 時点で途中償還される第 2 時点発行の負債
.....	

これらを合計すると次のような式になる。

$$B(W_0) [1 - p_U(W_0)] [1 + p_U(W_0)\theta + (p_U(W_0)\theta)^2 + \dots] = \frac{d^{(0)}(W_0)}{1 - p_U(W_0)\theta}$$

ただし資本構成理論の伝統的な表記では，株式価値は配当落ちの値であるため，株式価値 $S(W_0)$ の中には，第 0 時点の負債発行で入手した現金の配当 $B(W_0)$ を含めない。そこで株式価値にカウントすべき値は

$$\frac{d^{(0)}(W_0)}{1 - p_U(W_0)\theta} - B(W_0)$$

でなければならない。最後に 3 番目の負債発行に伴う調整コストの第 0 時点での価値であるが、これについては次のとおりに求められる。

$$\kappa B(W_0) + \kappa p_U(W_0)\theta B(W_0) + \kappa p_U(W_0)^2\theta^2 B(W_0) + \dots = \frac{\kappa B(W_0)}{1 - p_U(W_0)\theta}$$

第 0 時点の株式価値は上記 3 つの合計として計算される。

$$S(W_0) = \frac{e^{(0)}(W_0) + d^{(0)}(W_0) - \kappa B(W_0)}{1 - p_U(W_0)\theta} - B(W_0)$$

株式価値 $S(W_0)$ と (現金配当をもたらす) 負債価値 $B(W_0)$ の合計が企業価値 V_0 であるから、この $V_0 (= V(W_0))$ が株主の富を表す。これは

$$V(W_0) = \frac{e^{(0)}(W_0) + d^{(0)}(W_0) - \kappa B(W_0)}{1 - p_U(W_0)\theta}$$

であるが、書き換えると次のような式が得られる。

$$V(W_0) = e^{(0)}(W_0) + p_U(W_0)\theta V(W_0) + (1 - \kappa)B(W_0) - p_U(W_0)B(W_0)$$

右辺第 1 項は第 0 期の EBIT からの分け前、第 2 項は第 0 期末 (第 1 時点) の株主の富 (これは第 0 時点の θ 倍)、第 3 項は第 0 時点負債発行による配当、第 4 項は第 0 期末の負債の途中償還を表す。株主の富の最大化をもたらすような最適な意思決定は、 $\frac{\partial V(W_0)}{\partial C} = 0$ と $\frac{\partial S(W_0)}{\partial W_B} = 0$ 、 $\frac{\partial S(W_0)}{\partial \theta} = 0$ を満たすように C^* と W_B^* 、 θ^* (これは W_U^* のこと) を決定することである。

以上が GJL モデルであるが、これは 1 次同次性が想定されてモデルが組み立てられている。それではこの 1 次同次性は本当に成立しているのか。容易に確認できるが、 C^* や W_B^* 、 W_U^* が W_0 の 1 次同次であるなら、株式価値や負債価値などの証券価値は W_0 の 1 次同次関数になっている。しかしモデルで内生的に決まる C^* や W_B^* 、 W_U^* が W_0 について 1 次同次かどうかは直接的にはよくわからない。 C^* 、 W_B^* 、 W_U^* を解析的に解くことは不可能であるからである。原論文の Goldstein-Ju-Leland(2001) もこの点については何も言及していない。これら 1 次同次性については数値解析で検討しなければならない。

6.4 GJL モデルのシミュレーション

ここでは GJL モデルの特徴をシミュレーションにより調べたい。特に C^* 、 W_B^* 、 W_U^* を解析的に解くことが不可能であるにもかかわらず、これらが状態変数 W_0 に対して 1 次同次であることを前提にモデルが構築されていた。本当にこれらの中に 1 次同次性が成立しているのだろうか。ここでは、数値解析によって C^* 、 W_B^* 、 W_U^* の最適値を探索する。

これら 3 つのパラメーターに関する最適値探索は結構厄介である。本稿では次のような手法を採用して計算を実行した。GJL モデルの場合、次の smooth pasting 条件

$$\lim_{W_t \rightarrow W_B} \frac{\partial S}{\partial W_t} = 0$$

表 27 GJL モデル : W_0 の変化

$W_0^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
180	13.8	69.7	0.31	240.2	0.58	107.7	53.6	161.2	0.67
190	14.6	73.5	0.31	253.5	0.58	113.6	56.6	170.2	0.67
200	15.3	77.4	0.31	266.9	0.58	119.6	59.5	179.2	0.67
210	16.1	81.3	0.31	280.2	0.58	125.6	62.5	188.1	0.67
220	16.9	85.1	0.31	293.6	0.58	131.6	65.5	197.1	0.67

(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\gamma = -0.01$, $\kappa = 0.02$ 。

表 28 GJL モデル : r の変化

$r^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.03	11.4	69.2	0.33	273.9	0.58	114.2	68.2	182.4	0.63
0.04	13.4	73.7	0.32	270.0	0.58	117.3	63.2	180.5	0.65
0.05	15.3	77.4	0.31	266.9	0.58	119.6	59.5	179.2	0.67
0.06	17.2	80.5	0.30	264.3	0.58	121.5	56.6	178.1	0.68
0.07	19.0	83.1	0.29	262.0	0.58	123.0	54.3	177.3	0.69

(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $W_0 = 200$, $v = 0.35$, $\gamma = -0.01$, $\kappa = 0.02$ 。

表 29 GJL モデル : v の変化

$v^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.25	12.7	90.4	0.29	255.0	0.57	126.8	46.6	173.4	0.73
0.30	14.0	83.6	0.30	261.4	0.58	123.2	53.0	176.2	0.70
0.35	15.3	77.4	0.31	266.9	0.58	119.6	59.5	179.2	0.67
0.40	16.6	71.9	0.32	271.6	0.58	116.0	66.1	182.1	0.64
0.45	17.9	66.9	0.33	275.9	0.59	112.4	72.7	185.1	0.61

(a) その他のパラメータは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $W_0 = 200$, $r = 0.05$, $\gamma = -0.01$, $\kappa = 0.02$ 。

表 30 GJL モデル : τ の変化

$\tau^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.30	10.8	61.9	0.24	255.1	0.65	98.9	71.8	170.7	0.58
0.35	13.2	71.2	0.29	265.4	0.59	110.8	63.9	174.7	0.63
0.40	15.3	77.4	0.31	266.9	0.58	119.6	59.5	179.2	0.67
0.45	17.4	81.8	0.32	265.3	0.58	127.3	57.5	184.9	0.69
0.50	19.6	84.9	0.32	262.5	0.59	134.8	57.4	192.2	0.70

(a) その他のパラメータは $k = 0.3$, $W_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\gamma = -0.01$, $\kappa = 0.02$ 。

表 31 GJL モデル： k の変化

$k^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.1	25.7	98.8	0.38	270.7	0.53	165.9	45.5	211.4	0.78
0.2	20.3	89.2	0.35	270.2	0.55	143.0	51.6	194.6	0.73
0.3	15.3	77.4	0.31	266.9	0.58	119.6	59.5	179.2	0.67
0.5	7.6	49.6	0.19	248.5	0.68	74.2	79.2	153.4	0.48
0.7	3.5	26.7	0.10	230.3	0.79	41.0	95.9	136.9	0.30

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $W_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\gamma = -0.01$, $\kappa = 0.02$.

表 32 GJL モデル： γ の変化

$\gamma^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
-0.07	22.3	91.1	0.39	251.9	0.53	126.4	38.3	164.7	0.77
-0.03	17.9	83.6	0.34	260.9	0.56	123.2	49.1	172.3	0.72
-0.01	15.3	77.4	0.31	266.9	0.58	119.6	59.5	179.2	0.67
0.02	10.5	61.7	0.24	282.0	0.61	106.8	95.3	202.1	0.53
0.04	5.9	40.4	0.17	313.5	0.59	80.0	184.5	264.5	0.30

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $W_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\kappa = 0.02$.

表 33 GJL モデル： κ の変化

$\kappa^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.01	16.0	76.5	0.24	244.5	0.68	120.4	64.9	185.2	0.65
0.02	15.3	77.4	0.31	266.9	0.58	119.6	59.5	179.2	0.67
0.03	14.8	77.9	0.36	285.6	0.51	118.5	55.7	174.3	0.68
0.04	14.3	78.0	0.39	302.3	0.46	117.3	52.7	170.0	0.69
0.05	13.8	78.0	0.42	317.5	0.42	115.8	50.3	166.1	0.70

(a) その他のパラメーターは $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $W_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\gamma = -0.01$.

が成立するはずである。この W_B に関する smooth pasting 条件と、2 つの 1 階条件 $\frac{\partial V(W_0)}{\partial C} = 0$ と $\frac{\partial S(W_0)}{\partial W_U} = 0$, 以上 3 つの式を成立させる C^* , W_B^* , W_U^* の値を探索する。^{*21} このようにして計算したのが、表 27 から表 33 である。外生的なパラメーターは状態変数 W_0 , 無危険利子率 r , ボラティリ

^{*21} なぜ W_U に関する smooth pasting 条件を使わないのか。その理由はモデルの構造上、 W_U に関する smooth pasting 条件を導出することができないからである。なお、 W_B に関する smooth pasting 条件は以下のとおりである。

$$C = -\frac{(1+\kappa)(1-k)rW_B}{\tau-1-\kappa} + \frac{r(1-\tau)}{\tau-1-\kappa} \frac{1}{\Psi+\Phi} + \frac{(\tau-k-\kappa(1-k))rW_U}{\tau-1-\kappa} \frac{\Psi}{\Psi+\Phi} + \frac{(\tau-k)rW_B}{\tau-1-\kappa} \frac{\Phi}{\Psi+\Phi}$$

$$\text{ただし } \Psi \equiv \left. \frac{\partial P_U}{\partial W_t} \right|_{W_t \rightarrow W_B} = -\frac{W_B^{-X-Y-1}}{\Sigma} (X-Y)$$

$$\Phi \equiv \left. \frac{\partial P_B}{\partial W_t} \right|_{W_t \rightarrow W_B} = \frac{W_B^{-X-Y-1}}{\Sigma} \left(X \left(\frac{W_U}{W_B} \right)^{-Y} - Y \left(\frac{W_U}{W_B} \right)^{-X} \right)$$

C と W_U の値を与えれば、上式を満たす W_B を数値解を得る。数値計算の実際の手続きは、 W_B をこのように求めることを前提にして、 $V(W_0)$ を最大化する C の値と、 $S(W_0)$ を最大化する W_U の値とを同時に探索する。

テイ v , 法人税率 τ , 倒産コスト k , ドリフト γ , 負債再発行コスト κ である。ベースとなる数値は $W_0 = 200$, $r = 0.05$, $v = 0.35$, $\tau = 0.4$, $k = 0.3$, $\gamma = -0.01$, $\kappa = 0.02$ で、これらの中で 1 つのパラメーターだけ数値を変更するときの効果を調べている。

表 27 は W_0 が変化する場合である。金額ベースの変数 (C^* , W_B^* , W_U^* , B_0 , S_0 , V_0) はすべて W_0 と 1 次同次の関係にあることが確認できる。またこれらが 1 次同次であれば、 p_U と p_B は各式の形からゼロ次同次であり、実際に W_0 が変化しても p_U と p_B は不変である。

次に、 r が変化する場合 (表 28), v が変化する場合 (表 29), τ が変化する場合 (表 30), k が変化する場合 (表 31) については、各々 Leland モデルで得られた結果とほぼ同様である。 r が上昇すれば負債比率は上昇し、 v が上昇すれば負債比率は低下する。また τ の上昇で負債比率は上昇し、 k の上昇で負債比率は下落する。これらの中で Leland モデルに対する GJL モデルの特徴としては、 k の変化による感応度が大きい点が指摘できよう。Leland モデルでは k が 0.7 や 0.9 のような (非現実的なぐらい) 倒産コストが大きくても、負債比率は 0.6 前後で高留まりしていた。対して GJL モデルでは、 k が 0.5 のとき負債比率は 0.5 を切り、 k が 0.7 のとき負債比率は 0.3 と飛躍的に低下する。

GJL モデルで登場するパラメーター γ と κ の変化を調べたのが、表 32 と表 33 である。 γ とは無危険利子率 r から δ_0/W_0 を引いたものであるから、これは正值にも負値にもなり得る。恐らくは負とした方が無難であろうと考え、このシミュレーションでは -0.01 という値にした。というのは、この δ_0/W_0 が r 以下なら、企業活動を止めて無危険資産に投資する方がいいからである。この設定の下、ここのシミュレーションでの負債比率はほとんどが 0.6 前後であるため、Leland モデルと同様に現実企業への適用は困難かもしれない。しかし、計算上は γ が正值であってももちろん構わない。注目すべきは γ が正のとき、負債比率が著しく低下して 0.3 前後の値を取り得るようになるという点である。これならば現実企業の負債比率にモデルをフィットさせることができるかもしれない。ただ残念なことに、 γ が正でもっと大きな値になると、最適値探索の計算が収束しないことが多い。

表 33 は、負債の再発行コストが変化する場合である。 κ が 0.02 という設定は若干大きいかもしれないが、この κ には単なる発行だけではなく、その前の償還に関する取引コストも暗黙に含んでいる。従って κ は 1~2% ぐらいが妥当な大きさであろう。この κ が大きくなると、負債比率は上昇する。これは取引コストが増大すると一度により大量の負債発行が有利であろうから、納得的な結果である。

以上が GJL モデルのシミュレーション結果であるが、 γ の設定値を正にすると、現実企業の負債比率として尤らしい値をモデルで決定できるという点が、前の Leland モデルや FS モデルと決定的に異なっている。この意味で、GJL モデルは現実企業の動向を把握できる道具になり得るかもしれない。しかし問題点は、 γ を正值と想定することに経済的な意味があるのかということ、そして γ が正のとき収束計算が難しくなりやすいということ、これら 2 点で実用上の問題を抱えているこ

とになる。

7 結び

本稿では、連続時間の資本構成モデルとして4つのモデルを体系的かつ詳細に検討した。これらのうち、1つは古典的なオプション理論の Merton(1974) を倒産コストモデルに拡張したもの (Merton タイプのモデル) で、他の3つは1990年代に盛んになった手法に基づくモデルである。これらは倒産の定義が異なっている。

4つのモデルの中で、どれが現実企業の動向を把握できる道具となり得るモデルであろうか。このシミュレーションから判断すると、それは Merton タイプのモデルであろう。外生的なパラメータに妥当な値を設定すると、このモデルのみが現実企業の負債比率に相応しい値をはじき出す。その他3つのモデルでは、最適資本構成として決定される負債比率の値は高すぎる。ただし GJL モデルのみは、倒産コストを大きく見積もることで、また γ に正值を想定することで、現実企業の負債比率のレベルを実現できる。

ここで述べたような Merton タイプのモデルにおける法人税は奇抜な印象を拭えないような想定である。これは一般的なオプション理論が、キャッシュフローの取り扱いを苦手とすることに起因する。これに対して GJL モデルは、キャッシュフローを真正面からモデルの中に取り込んでいるので、理論的には飛躍的な進歩といえる。しかし GJL モデルは複雑な割には、シミュレーション結果を見る限り、その現実適用力には疑問符を付けざるを得ない。

今日、連続時間モデルのフレームワークを使って資本構成のモデル構築をすることが流行になっているが、連続時間モデルでは元々キャッシュフローの取り扱いに難点があること、そしてキャッシュフローをモデルに包含すればモデルそのものが複雑にならざるを得ないこと、そして複雑化させた割には、現実適用力がもう一つであること、以上の理由により、筆者個人は連続時間の資本構成モデルでは、現実を説明できる道具として限界があると感じている。

付録 A Leland モデルに関する別の解法

本文の2節で、Feynman-Kac 公式を用いて証券価格が定式化されたにもかかわらず、4節以降の議論では、均衡条件を常微分方程式と考え、これを機械的に解いてしまうことで証券価格を導いている。もちろん、Feynman-Kac 公式から証券価格を定式化したとしても同じ証券価格の式を得るはずである。この付録ではこの点を確認しておきたい。

例として、4節の修正 Leland モデルを取り上げよう。本文では均衡条件の常微分方程式を、数学の定石どおりに解くことで株式価値の (38) 式と負債価値の (39) 式を導出した。ここでこれらを Feynman-Kac 公式から定式化してみる。現在を 0 時点とし、将来の状態変数 $A_t (t \geq 0)$ が倒産発生

点 A_B に到達するとき倒産であるが、いつ倒産が発生するかは未知であるから、

$$\xi = \inf \{l \geq 0 \mid A_l = A_B\}$$

のような確率変数 ξ を定義する。 $A_0 > A_B$ とすると、この ξ は将来の状態変数 A_l が初めて A_B に到達する時点を表す。 ξ に依存する場合の Feynman-Kac 公式は (10) 式が適用できる。ただし、Leland モデルでは負債の満期は無限大としているから、 $T \rightarrow \infty$ であって、 $T > \xi$ は確定し、(10) 式の第 3 項はゼロになる。さらに r は定数である。

負債は、倒産前に C (定数) のキャッシュフローを連続的に発生させ、倒産時に $(1-k)A_B$ の価値を有する。(10) 式の記号では、 $c_k(X_l, l) = C$ 、 $f_k(X_\xi, \xi) = (1-k)A_B$ である。株式の方は、倒産前に $\beta A_l - (1-\tau)C$ のキャッシュフローを産み、倒産時の価値はゼロである。つまり、 $c_k(X_l, l) = \beta A_l - (1-\tau)C$ 、 $f_k(X_\xi, \xi) = 0$ である。また時間同質的 time homogeneous であることが仮定され、関数形は時点そのものには依存しないので、 $f_k(X_t, t)$ という関数は、負債価値の場合 $B(A_t)$ 、株式価値の場合 $S(A_t)$ と表記される。

以上のことを (10) 式に適用すると、現在 (0 時点) の負債価値と株式価値は次のような式になる。

$$B(A_0) = C E_0^* \left[\int_0^\xi e^{-rl} dl \right] + (1-k)A_B E_0^* \left[e^{-r\xi} \right] \quad (45)$$

$$S(A_0) = \beta E_0^* \left[\int_0^\xi A_l e^{-rl} dl \right] - (1-\tau)C E_0^* \left[\int_0^\xi e^{-rl} dl \right] \quad (46)$$

上式の期待値は次の確率微分方程式

$$dA_l = (r - \beta)A_l dl + vA_l dZ_l^*$$

から導かれる確率分布によって評価される。^{*22} この式から、

$$A_l = A_0 \exp \left((r - \beta - \frac{v^2}{2})l + vZ_l^* \right) \quad (47)$$

を得るので、 $\ln A_l$ は A_0 を条件とした正規分布に従う。

さて (45) 式と (46) 式を見ると、証券価値を求めるには、3 種類の期待値を評価しなければならない。 A_l の確率分布が (47) 式から与えられるとしても、これら期待値の中には ξ が存在する。こ

^{*22} このウィナー過程 (dZ_l^*) は本文の (37) 式のウィナー過程 (dZ_l) と

$$dZ_l^* = dZ_l(l) + \frac{\mu - r}{v} dl$$

という関係にある。これについて 2 節の記号を使って補足しておこう。Girsanov 定理によれば、元の確率測度の下でのウィナー過程 $dZ_l(l)$ と新しい確率測度の下でのウィナー過程 $dZ_l^*(l)$ との間には、

$$dZ_l^*(l) = dZ_l(l) + \lambda_1 dl$$

という関係がある。また唯一の状態変数が証券価格でもあるなら、この λ_1 は (12) 式を満たさなければならない。今、 $m_1 = (\mu - \beta)A_l$ 、 $s_1 = vA_l$ 、 $c_1 = \beta A_l$ 、 $f_1 = A_l$ であるから、これらを代入すれば上記の式が得られる。なおここでは $Z_l^*(l)$ のことを Z_l^* と記している。

の ξ をどのように扱えばよいか。ここでは Morellec(2004) を参考にして、この計算方法をまとめておこう。

まず $E_0^* \left[\int_0^\xi e^{-rl} dl \right]$ である。これを展開するには、

$$E_0^* \left[\int_0^\xi e^{-rl} dl \right] = E_0^* \left[\int_0^\infty e^{-rl} dl \right] - E_0^* \left[\int_\xi^\infty e^{-rl} dl \right]$$

のように書き換える。この右辺第 1 項は、期待値の中に確率変数がないので期待値は外れ、普通に積分すれば $\frac{1}{r}$ が得られる。問題は第 2 項の方である。次の 2 つの変数を定義する。

$$Z_l^\dagger = Z_l^* + bl \quad \text{ただし } b = \frac{r - \beta - \frac{v^2}{2}}{v} \quad (48)$$

$$Z_B = \frac{1}{v} \ln \left(\frac{A_B}{A_0} \right) \quad (49)$$

この Z_B は負であることを注意しておく。(47) 式と (48) 式、(49) 式から容易に確認できるが、 $A_l \geq A_B$ という不等式は $Z_l^\dagger \geq Z_B$ という式に帰着できる。ここで、(48) 式の Z_l^\dagger がウィナー過程であり続けるために確率測度の変換を考えよう。新しい確率測度の下での期待値を E_0^\dagger で表す。この期待値について、

$$\varphi_l = \exp \left(bZ_l^\dagger - \frac{b^2}{2} l \right)$$

で定義される φ_l を用いると、適当な確率変数 Φ に対して、 $E_0^*(\Phi) = E_0^\dagger(\Phi\varphi_l)$ という関係が成立する。^{*23} また倒産発生の時点を $\Xi(Z_B)$ と書こう。これは次のように定義される。

$$\Xi(Z_B) = \inf \{ l \geq 0 \mid Z_l^\dagger = Z_B \}$$

以上のことを前提にして、 $E_0^* \left[\int_\xi^\infty e^{-rl} dl \right]$ を次のように展開する。

$$\begin{aligned} E_0^* \left[\int_\xi^\infty e^{-rl} dl \right] &= E_0^\dagger \left[\int_{\Xi(Z_B)}^\infty \exp \left(-\frac{\omega^2}{2} l \right) \exp \left(bZ_l^\dagger \right) dl \right] \quad \text{ただし } \omega^2 = 2r + b^2 \\ &= E_0^\dagger \left[\exp \left(-\frac{\omega^2}{2} \Xi(Z_B) \right) \int_0^\infty \exp \left(b(Z_l^\dagger + Z_B) \right) \exp \left(-\frac{\omega^2}{2} l \right) dl \right] \\ &= \exp \left(bZ_B - |Z_B|\omega \right) E_0^\dagger \left[\int_0^\infty \exp \left(bZ_l^\dagger \right) \exp \left(-\frac{\omega^2}{2} l \right) dl \right] \\ &= \exp \left((b + \omega)Z_B \right) \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^\infty e^{-|u|\omega} e^{bu} du \\ &= \exp \left((b + \omega)Z_B \right) \frac{2}{\omega^2 - b^2} \end{aligned}$$

この展開の 1 行目から 2 行目の書き換えはウィナー過程の強マルコフ性という性質を用いている。1 行目の右辺の期待値の中は、 $\Xi(Z_B)$ という時点から無限大までの時間に関する積分であるが、時

^{*23} この点について、Duffie(2001)pp.335-338 がわかりやすくまとめている。

間を $\Xi(Z_B)$ だけずらして、0 時点から無限大までの積分として表記したのが 2 行目の式である。次に 2 行目の期待値の中の積分は $\Xi(Z_B)$ に依存しない。この $\Xi(Z_B)$ については、

$$E_0^\dagger \left[\exp \left(-\frac{\omega^2}{2} \Xi(Z_B) \right) \right] = \exp(-|Z_B|\omega)$$

とすることができるので、^{*24} 3 行目のような式に展開できる。3 行目から 4 行目の式への書き換えについては、 Z_B が負であるという点と、3 行目の式の期待値には Morellec(2004) の Lemma2 にある公式を適用するという点から導出が可能になる。最後に、4 行目の積分は普通の積分であるから、絶対値を外して計算すれば容易に 5 行目の式を得る。

定義から、

$$\begin{aligned} \omega^2 - b^2 &= 2r \\ \exp((b + \omega)Z_B) &= \left(\frac{A_0}{A_B} \right)^y \end{aligned}$$

であるから、結局、

$$E_0^* \left[\int_{\xi}^{\infty} e^{-rl} dl \right] = \frac{1}{r} \left(\frac{A_0}{A_B} \right)^y$$

となって、次のような結果となる。

$$E_0^* \left[\int_0^{\xi} e^{-rl} dl \right] = \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{A_0}{A_B} \right)^y \right]$$

他の期待値 $E_0^* \left[\int_0^{\xi} A_l e^{-rl} dl \right]$ や $E_0^* \left[e^{-r\xi} \right]$ もまったく同様に計算することができて、

$$\begin{aligned} E_0^* \left[e^{-r\xi} \right] &= \left(\frac{A_0}{A_B} \right)^y \\ E_0^* \left[\int_0^{\xi} A_l e^{-rl} dl \right] &= \frac{A_0}{\beta} \left[1 - \left(\frac{A_0}{A_B} \right)^{y-1} \right] \end{aligned}$$

という結果が導かれる。これらから (38) 式や (39) 式が導かれるのは明らかであろう。

参考文献

- [1] Black, F., and M. Scholes. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81: 637-654.
- [2] Black, F., and J. C. Cox. 1976. Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions. *Journal of Finance* 31: 351-367.
- [3] Brennan, M. J., and E. S. Schwartz. 1978. Corporate Income Taxes, Valuation, and the Problem of Optimal Capital Structure. *Journal of Business* 51: 103-114.

^{*24} この式については、Karatzas-Shreve(1991) の p.96 を参照のこと。

- [4] Childs, P. D., D. C. Mauer, and S. H. Ott. 2005. Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions: The Effects of Agency Conflicts. *Journal of Financial Economics* 76: 667-690.
- [5] Christensen, P. O., C. R. Flor, D. Lando, and K. R. Miltersen. 2000. Dynamic Capital Structure with Callable Debt and Debt Renegotiations. working paper.
- [6] Dixit, A. K., and R. S. Pindyck. 1994. *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press.
- [7] Duffie, D. 2001. *Dynamic Asset Pricing Theory(3rd edition)*. Princeton University Press.
- [8] Fan, H., and S. M. Sundaresan. 2000. Debt Valuation, Renegotiation, and Optimal Dividend Policy. *Review of Financial Studies* 13: 1057-1099.
- [9] Fischer, E. O., R. Heinkel, and J. Zechner. 1989. Dynamic Capital Structure Choice: Theory and Tests. *Journal of Finance* 44: 19-40.
- [10] Goldstein, R., N. Ju, and H. Leland. 2001. An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure. *Journal of Business* 74: 483-512.
- [11] Goldstein, R., and F. Zapatero. 1996. General Equilibrium with Constant Relative Risk Aversion and Vasicek Interest Rates. *Mathematical Finance* 6: 331-340.
- [12] Hull, J. C. 2003. *Options, Futures, and Other Derivatives(5th edition)*. Prentice Hall.
- [13] Kane, A., A. J. Marcus, and R. L. McDonald. 1984. How Big Is The Tax Advantage to Debt? *Journal of Finance* 39: 841-853.
- [14] Kane, A., A. J. Marcus, and R. L. McDonald. 1985. Debt Policy and The Rate of Return Premium to Leverage. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 20: 479-499.
- [15] Karatzas, I., and S. E. Shreve. 1991. *Brownian Motion and Stochastic Calculus(2nd edition)*. Springer-Verlag.
- [16] Leland, H. E. 1994. Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure. *Journal of Finance* 49: 1213-1252.
- [17] Leland, H. E. 1998. Agency Costs, Risk Management, and Capital Structure. *Journal of Finance* 53: 1213-1243.
- [18] Mella-Barral, P. 1999. The Dynamics of Default and Debt Reorganization. *Review of Financial Studies* 12: 535-578.
- [19] Mella-Barral, P., and W. Perraudin. 1997. Strategic Debt Service. *Journal of Finance* 52: 531-556.
- [20] Merton, R. C. 1973. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics* 4: 141-183.
- [21] Merton, R. C. 1974. On The Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance* 29: 449-470.
- [22] Morellec, E. 2004. Can Managerial Discretion Explain Observed Leverage Ratios? *Review of Financial Studies* 17: 257-294.

- [23] Parrino, R., A. M. Potoshman, and M. S. Weisbach. 2005. Measuring Investment Distortions When Risk-Averse Managers Decide Whether to Undertake Risky Projects. *Financial Management* 34: 21-60.
- [24] Sundaresan, S. M. 2000. Continuous-Time Methods in Finance: A Review and An Assessment. *Journal of Finance* 55: 1569-1622.
- [25] 辻 幸民. 1993. 「転換社債発行の資本コスト：東証上場 55 社の平均資本コスト」『金融経済研究』 第 4 号, 15-24 頁.
- [26] 辻 幸民. 1999. 「デリバティブ価格の評価：金利オプション」『三田商学研究』 第 42 卷 1 号, 1-32 頁.
- [27] 辻 幸民. 2002. 『企業金融の経済理論』(創成社)
- [28] Turnbull, S. M. 1979. Debt Capacity. *Journal of Finance* 34: 931-940.