倒産コストモデルの再検討 *

辻幸民

2016 年 6 月 7 日 (第 2 版修正→『三田商学研究』第 59 巻 1 号掲載)

概要

本稿では，1 期間モデルの倒産コストモデルを再検討し，2 種類の定式化を提示する。1 期間モデルの倒産コストモデルでは通常，債権者に約束した期末の元本返済と金利支払の合計額を支払えないときが倒産であると仮定する。本稿ではこれをモデル A と称する。これに対してモデル B では，金利支払額を支払えないとき，倒産が発生するものとみなす。倒産発生の条件を緩和するわけであるから，当然企業の負債利用は促進され，最適資本構成は，モデル B においてモデル A よりも格段に負債比率が高くなる。ところで倒産コストモデルでは，企業キャッシュフローの期待値上昇は負債比率を上昇させるとか，その標準偏差上昇は負債比率を低下させるというのが，今日の学界共有の一般的見解であろうが，モデルの特徴をシミュレーションで調べると，この見解は，モデル B の方がモデル A よりもはるかに綺麗に当てはまる。

キーワード：最適資本構成，倒産コストモデル，貸倒れ，負債比率

1　問題意識

MM 命題 (Modigliani-Miller(1958)) に始まる資本構成理論は，学界のみならず企業金融の現場にも少なくない影響を与えながら，今までに様々な要因を取り込んで，実に多種多様な理論モデルを構築してきた。WACC(加重平均資本コスト) が企業の実物投資の意思決定で広く用いられていることからして，資本構成理論における 2 番目の仮説，修正 MM 命題 (Modigliani-Miller(1963)) は今や実務界に深く浸透していると言えよう。しかし修正 MM 命題は最適な資本構成を決めるためのフレームワークにはなり得ない。最適資本構成を決定できるようになるのは，3 番目の理論仮説である倒産コストモデルである。これ以降，最適資本構成を決定できるか否かといった根本的な論点も含めて，多様な資本構成理論が提示されることになる。倒産コストモデル以降の理論仮説をざっと列挙すると，個人所得税や負債以外の節税要因 (減価償却費など) の導入，情報の不完全性下におけるシグナリング仮説やペッキングオーダー仮説，さらにはエージェンシーコストに関連する様々な仮説である。

上記の理論仮説は，非常に多数の論文で取り上げられたが，多くの研究者の間で盛んに議論された割りには，各理論仮説についてのコンセンサスが学界で十分でき上がっていると言えるのであろうか。誤解のないようもう少し丁寧に述べる必要もあろうが，確かに，各理論仮説の大まかな考え

* 本稿の執筆では富田信太郎氏との議論が大変有益であった。記して謝意を表したい。

方については，研究者間である程度共有の見解が形成されているように思う。例えば，MBA コースで広く読まれている入門テキストの内容はどれもほぼ共通している点や，専門研究で実証分析を行った際，その結果の解釈を様々な理論仮説に依拠するが，その際の理論仮説の説明などは研究者間でほぼ共通している。そういう意味では確かにコンセンサスができているのであるが，しかし，それはあくまでも「大雑把な説明」という範囲内でのコンセンサスに過ぎないと筆者は考えている。

理論仮説という以上，背後には理論モデルがあるはずで，その理論モデルを表現するための数式を用いた定式化といったレベルで考えるなら，コンセンサスが形成されているのかどうか少なからず怪しい。例えばエージェンシーコスト仮説は，提唱されたのは 1976 年で，その後 30 年ほどの間，様々な実証分析の解釈などで広く言及されて来たが，エージェンシーコストに関する数式を用いた定式化はその間ほとんど存在しなかったと言ってよい。エージェンシーコストに関する (数式を用いた) 理論モデル構築は，1990 年代後半における連続時間モデルの流行まで待たなければならない。21 世紀になってようやく理論モデルがいくつか構築されるようになったが，それでも未だエージェンシーコストモデルの定式化についてのコンセンサス形成には至ってないと言えよう。

一見すると多種多様な資本構成理論ではあるが，数式を用いた定式化といったレベルにおいては，モデルとしての操作の容易さという点で，今に至っても，修正 MM 命題と倒産コストモデルが資本構成理論の中心的な役割を担っていると考えてもよいのではないか。本稿で取り上げるのは倒産コストモデルの方であるが，最近流行した連続時間モデルのフレームワークではなく，昔のオリジナルのフレームワークとも言える，1 期間モデルに依拠した倒産コストモデルを詳しく検討する。これは 1970 年代中頃から多数の論文で理論モデルが構築され，[*1] いわば枯れた理論モデルなのであるが，なぜこれを今再検討する気になったかというと，きっかけは Leland(2007) である。Leland(2007) は M&A の効果を分析するのが目的であるが，そのための道具として倒産コストモデルに着目した。彼は 2007 年の論文で，1 期間モデルの倒産コストモデルをあらためて定式化して詳細に提示した。この理論モデルはさらに近年の研究で，債務保証を分析した Luciano-Nicodano(2014) において再利用されることになる。ただ大変不幸なことに，Leland(2007) が提示した理論モデルには欠陥がある。その定式化は誤りと言ってもよい。

次の第 2 節では，Leland(2007) の理論モデルがどこでどのように間違っているのか，モデルの概要を比較的詳しく述べる。この誤りを修正して，第 3 節と第 4 節では 2 種類の倒産コストモデルを提示する。1 期間モデルの倒産コストモデルでは，債権者に約束した期末支払額を履行できないときが倒産である。この期末支払額は負債への元本返済額と金利支払額の合計とするのが通常の設定であり，本稿ではこれをモデル A と称して第 3 節で取り上げる。対して，もう一つの倒産コストモデルをモデル B と称し，これを第 4 節で展開する。モデル B では，債権者への期末支払額のうち金利を支払えないときだけ倒産であると定義する。すなわち，期末支払額の元利合計の支払が不可能なときは，まず金利部分を支払い，余った残りすべてを元本返済にあてるなら，倒産は回避されるというものである。第 5 節ではこれらモデルの特徴をシミュレーションで調べる。第 6 節は

[*1] 代表的なものだけでも，Baxter(1967), Kraus-Litzenberger(1973), Baron(1975), Scott(1976), Chen-Kim(1979), Haugen-Senbet(1978)，Kim(1978)，Chen(1978)，Turnbull(1979)，Talmor-Haugen-Barnea(1985) などが必読の文献である。また日本語では金子 (1987) がある。

結びである。

モデル B はモデル A に比べて，倒産の条件を緩めるのであるから，当然のこと企業の負債利用を促進させる。従って最適資本構成は，モデル B においてモデル A よりも格段に負債比率が高くなる。モデル A は学界で一般的な形の倒産コストモデルである。倒産コストモデルに関する学界共有の見解 (大雑把な説明) は，企業キャッシュフローの期待値上昇は負債比率を上昇させるという点と，その標準偏差上昇は負債比率を低下させるという点であろう。ところが，モデルの特徴をシミュレーションで調べると，最も普通の形であるはずのモデル A では上記の見解どおりの特徴を明確には示さない。上記の見解は，モデル B の方がモデル A よりもはるかに綺麗に当てはまる。この点が本稿の特徴である。

2 Leland(2007) モデル

ここでは Leland(2007) モデルの概要を説明する。企業の稼ぐ 1 期間の収益 EBIT を $\tilde{X}$，法人税率を τ で表す。負債のない企業 U について，株主のキャッシュフロー (以下，CF と表す) を $\tilde{Y}_U$ として，これを次のように定式化する。

$$\tilde{Y}_U = \begin{cases} (1-\tau)\tilde{X} & (\tilde{X} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{X} \text{ のとき}) \end{cases}$$

この式の 1 行目は，$\tilde{X}$ が非負であれば，法人税額 $\tau\tilde{X}$ を支払った残りが株主への CF になることを表す。式の 2 行目には次のような意味がある。株主は有限責任であり，課税対象所得が負のとき，つまり $\tilde{X}$ が負のとき税額はゼロであるとする。

一方で，負債を発行している企業 L は，期末に負債への返済額 L を支払わなければならない。この L は期末に支払う元利合計額であると考える。期首の負債価値を B とすると，これらの差額 $L - B$ が金利支払に相当する金額で，これは法人税額を計算する際に損金算入の対象となるから，課税対象所得は $\tilde{X} - (L - B)$ のように記すことができる。課税対象所得が正である限り，税額は $\tau[\tilde{X} - (L - B)]$ である。従って株主の CF は $\tilde{X} - L - \tau[\tilde{X} - (L - B)]$ であるが，株主は有限責任であるから，これが負の値になるとき株主の CF はゼロになる。そこで

$$\phi = L + \frac{\tau B}{1-\tau} \tag{1}$$

のように ϕ を定義すると，$\tilde{X} \geq \phi$ であるなら，$\tilde{X} - L - \tau[\tilde{X} - (L - B)] \geq 0$ である。以上のことから，企業 L の株主の CF を $\tilde{Y}_{LS}$ として表すと，

$$\tilde{Y}_{LS} = \begin{cases} \tilde{X} - L - \tau[\tilde{X} - (L - B)] & (\tilde{X} \geq \phi \text{ のとき}) \\ 0 & (\phi > \tilde{X} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2}$$

のようにまとめることができる。

さて株主が有限責任である限り，$\tilde{X}$ が ϕ を下回るなら，債権者への支払額 L と税額 $\tau[\tilde{X} - (L - B)]$ を両方同時に $\tilde{X}$ から支払うことはできない。そこで法人税と負債のどちらが優先されるかが問題

となるが，ここでは法人税が優先されるものとする。すなわち，法人税としては $\tau[\tilde{X} - (L - B)]$ という税額をフルに支払うのに対し，債権者には L よりも小さい金額しか支払えない。容易に確認できるが，$\tilde{X} < \phi$ であれば $\tilde{X} - \tau[\tilde{X} - (L - B)] < L$ である。債権者に対して期末支払額 L の約束を履行しないのであるから，これは倒産であり，このとき倒産コストが発生するものとする。企業の支配権は株主から債権者に移転し，債権者は企業収益 $\tilde{X}$ を入手し，法人税を支払い，倒産コストを負担する。また Leland モデルでは，倒産コストは $\tilde{X}$ に比例するものとして，$k\tilde{X}$ として定式化される。ただし $0 < k < 1$ である。

上記の ϕ は L よりも必ず大きいので，$\phi > L - B$ が成立している。$\tilde{X}$ が ϕ を下回ってさらに小さくなるなら，法人税額がゼロとなるような $\tilde{X}$ の値があり，これは $\tilde{X} = L - B$ のときである。$\tilde{X}$ が $L - B$ を下回ると，課税対象所得は負になるから税額はゼロであるとする。以上のことから，債権者への CF を $\tilde{Y}_{LB}$ として表すと，これは次のようにまとめることができる。

$$\tilde{Y}_{LB} = \begin{cases} L & (\tilde{X} \geq \phi \text{ のとき}) \\ \tilde{X} - \tau[\tilde{X} - (L - B)] - k\tilde{X} & (\phi > \tilde{X} \geq L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{X} - k\tilde{X} & (L - B > \tilde{X} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{X} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3}$$

この 4 行目は債権者が有限責任であることを表している。

以上が Leland モデルにおける CF の定式化であるが，実は決定的な誤りを犯している。それは株式の元本部分 (期首の出資分) を期末 CF の定式化に組み入れてないことである。Leland モデルはあくまでも (本稿で言う)1 期間モデルであるから，期末にはその倒産の有無にかかわらず企業は解散することが仮定されているはずであり，投資家への期末 CF には，企業の解散に際し売却する資産の売却金額もカウントされなければならない。

仮に上記 CF の定式化が，多期間モデルの想定の下，1 期間満期の負債を期末に返済する場合のものと考えるなら，上記の CF の定式化自体は妥当かもしれないが，価値評価のところで問題が生じる。Leland(2007) では，危険中立者を仮定して，株式価値 S_L を次のように定式化している。

$$S_L = \frac{\mathrm{E}(\tilde{Y}_{LS})}{1 + R_F}$$

なお R_F は無危険利子率である。この $\tilde{Y}_{LS}$ には株主への果実部分しか入ってないので，この定式化は，よく知られた DDM を例にするならその誤りが明らかであろう。現在の株価を P_0，期末の株価を P_1，期末配当金を d_1 とすると，正しい株価の式は，

$$P_0 = \frac{\mathrm{E}(\tilde{d}_1) + \mathrm{E}(\tilde{P}_1)}{1 + R_F}$$

であることは言うまでもなかろう。上記の株式価値 S_L は，株価が $P_0 = \mathrm{E}(\tilde{d}_1)/(1 + R_F)$ であるとするのと同じ類の誤りである。もし S_L を正しく定式化したいなら，

$$S_L = \frac{\mathrm{E}(\tilde{Y}_{LS}) + \mathrm{E}(\tilde{S}'_L)}{1 + R_F}$$

としなければならない。この分子に現れる $\mathrm{E}(\tilde{S}'_L)$ は期末の株式価値である。

本稿のような離散時間において，一般的な多期間モデルを定式化することは，決して不可能ではないけれども非常に煩雑であり，企業金融論で取り上げられることはあまりない。そこで以下では 1 期間モデルを想定して，その正しい定式化を提示する。

3　倒産コストモデル：モデル A

以下では 1 期間モデルの倒産コストモデルを定式化する。どのような場合に倒産が発生するかの想定の違いにより，2 種類の倒産コストモデルが議論される。この節ではまず最初のモデルとして，本稿で「モデル A」と称する倒産コストモデルを取り上げる。

倒産発生の想定については少し後で説明するが，その前に，より一般的な設定の説明から始めよう。まず 1 期間モデルについてである。1 期間モデルを想定する場合，期首に企業が設立されて資金調達を行い，その資金で資産を購入して営業を開始する。期末になると企業は解散し，期首に購入した資産はすべて売却される。この売却代金と期中に稼いだ収益との合計額が，投資家 (株主と債権者) と税金に分配される期末 CF となる。注意すべきは，1 期間モデルでは倒産発生の有無に関係なく，期末に企業は必ず解散消滅するという点である。このような 1 期間モデルは非現実的な設定かもしれないが，1 期間を非常に長い期間，例えば 20 年というような長期間とみなすなら，それほど不自然な想定でもなかろう。

これに加えて，通常の倒産コストモデルでは期首時点での資金調達として次のような仮定がなされる。まず企業設立として株式が発行されるが，その調達代金すべてが資産購入に向けられる。次に負債が発行される。この負債発行で得た資金は全額が株主に配当金として支払われる。この仮定を設定する目的は以下のとおりである。負債があるときの企業価値を V_L で表す。仮に資本構成の違いで企業価値 V_L が異なるなら，設立時点で株式と負債のミックスで資金調達すると，そのミックスの割合により企業価値 V_L が異なることになるから，企業の入手する資金額も異なる値となる。であれば，企業が期首時点で保有する資産も異なるものになろう。すなわち，資本構成いかんで企業の保有する資産価値が異なることになる。これは資本構成以外の別の要因 (例えば，エージェンシーコスト) を議論に内包することになる。従って企業の購入する資産は資本構成の違いにかかわらず一定を維持させたい。そのために，負債発行で得た資金はすべて株主に配当されて社外から流出するものとする。負債の存在しない企業の企業価値を V_U と記すなら，上記の資金調達の仮定の下では，企業の保有する資産価値は資本構成に関係なく V_U となる。この仮定によって資本構成の変化の純粋な効果に焦点をあてることができる。またこの資金調達行動によって，期首時点の企業価値 V_L は株主の富を表していることにもなる。

期末になるとこの企業は解散するが，その際に分配対象となる CF を $\tilde{Z}$ とする。これは企業の保有する資産の期末価値に 1 期間中に稼いだ企業収益 EBIT を加えた値である。法人税率は τ である。法人税はあくまでも期中の活動で実現した果実部分に課税されるべきものであるから，このモデルの期首時点と比べ，期末時点で実現した果実とは $\tilde{Z} - V_U$ のことである。これは期中に稼いだ EBIT と保有した資産の値上り益から構成される。もし企業の負債が存在しないなら (以下これを

企業 U と称する)，期末の税額は $\tau(\tilde{Z} - V_U)$ である。企業 U の株主には，期末に $\tilde{Z}$ からこの税額を控除した金額，$\tilde{Z} - \tau(\tilde{Z} - V_U) = (1 - \tau)\tilde{Z} + \tau V_U$ が配当されることになる。なお企業 U では $\tilde{Z} < V_U$ のとき，課税対象所得は負になってしまう。このとき法人税額はゼロであると仮定し，株主への CF は $\tilde{Z}$ である。さらに株主は有限責任であるから，$\tilde{Z}$ が負のとき株主への CF はゼロである。以上のことから，企業 U の株主への CF を $\tilde{Q}_U$ で表すと，$\tilde{Q}_U$ は次のとおりにまとめられる。

$$\tilde{Q}_U = \begin{cases} (1-\tau)\tilde{Z} + \tau V_U & (\tilde{Z} \geq V_U \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} & (V_U > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4}$$

この $\tilde{Q}_U$ という期末 CF を一定の価値評価方法に従って評価すると，$V_U = V\left[\tilde{Q}_U\right]$ というような価値を求めることができる。ここで注意すべきは，V_U を解析的に解くことはできないという点である。上式右辺の $V\left[\tilde{Q}_U\right]$ の $\tilde{Q}_U$ の中に V_U が入り込んでいるからである。解析解を得られないとしても，数値解を求めることはできる。右辺と左辺を等しくするような V_U の値を探索する。以下ではこの数値解が問題となる。

次に企業に負債が存在する場合を検討する。これを企業 L と称しよう。期末に企業 L は元本返済と金利支払の合計額 L を債権者に支払う約束をしているものとする。この約束の下，企業 L の負債価値は B であるとする。この節で説明する「モデル A」では，企業 L が期末にこの L を債権者に支払えないときを倒産発生とみなす。ところでモデル A においては，V_U と B との大小関係に依存して，企業 L の株主と債権者への CF として 2 種類の定式化を考えなければならない。まず始めの小節で $V_U \geq B$ の場合を検討する。これがモデル A における 1 番目のケースとして，以下では (A1) という記号を付ける。また逆に $B > V_U$ という場合も検討する必要があり，これをモデル A の 2 番目のケースとして，以下では (A2) という記号を付けて区別する。後者の (A2) では，元々保有する資産の大きさ以上の金額を負債で資金調達するということであるから，確かに奇妙な設定なのであるが，決して不可能なわけではなく理論的に排除することができないのであらためて検討する。

3.1 倒産コストモデル A：その 1 ($V_U \geq B$ の場合)

企業 L の期末 CF は，企業 U と同様，$\tilde{Z}$ である。企業 L は期末，債権者に元利合計で L という金額の支払を約束している。モデル A ではこの L を債権者に支払えないときが倒産であり，このとき倒産コストが発生する。なお倒産コストの大きさは $\tilde{Z}$ に一定比率 k を乗じた大きさ (ただし $0 < k < 1$)，つまり $k\tilde{Z}$ であるとする。[*2] ところで期首時点の負債価値は B であるから，こ

[*2] 本稿では倒産コストの大きさを期末 CF に依存する形で定式化する。ここの $\tilde{Z}$ は，長い年数を 1 期間として一括した企業収益と期末資産価値との和であるから，実感としてその大きさを把握することは難しい。そこで倒産コストの大きさを kV_U のように定式化してもよい。実証分析において，倒産コストの大きさは概ね企業価値の何割という言及がよくなされるので，倒産コストを kV_U として定式化する方が現実への適応が容易かもしれない。倒産コストを kV_U とする場合の議論は拙著 (2016) 第 4 章を参照願いたい。CF の定式化は本稿のものよりもほんの少しだけ複雑化する。ただ倒産コストをどちらの形で定式化したとしても，その数量的な効果にほとんど大差なく，全く同じ内容の議論が展開可能である。

の B が負債の元本部分となり，$L-B$ という金額が金利支払額に相当する。金利支払額は法人税額の計算で損金算入されるから，$L-B$ は課税対象所得から控除される。その結果，法人税額は $\tau[\tilde{Z}-V_U-(L-B)]$ である。法人税額の式を見ると，$\tilde{Z}$ が V_U+L-B 未満ならば課税対象所得は負になってしまう。そのときの法人税額はゼロであると仮定する。

以上のような想定の下，株式や負債の CF を定式化するには，$\tilde{Z}$ の値に応じて場合分けをする必要があり，そのためには，倒産か否かの分岐点 L，および法人税額が正かゼロかの分岐点 V_U+L-B との大小関係に注目する必要がある。まず $V_U \geq B$ の場合である。このとき $V_U+L-B \geq L$ が成立する。これは倒産発生のときに法人税額が必ずゼロになっていることを意味する。株主の期末 CF を具体的に見てみよう。これを $\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}$ と記す。下付き添字 $_{LS}$ は企業 L の株主の CF であることを，また上付き添字 $^{(A1)}$ は，モデル A の 1 番目のケースであることを表している。

$$\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}=\begin{cases}\tilde{Z}-L-\tau[\tilde{Z}-V_U-(L-B)] & (\tilde{Z}\geq V_U+L-B \text{ のとき})\\ \tilde{Z}-L & (V_U+L-B>\tilde{Z}\geq L \text{ のとき})\\ 0 & (L>\tilde{Z} \text{ のとき})\end{cases} \tag{5}$$

この 1 行目は，$\tilde{Z}$ から法人税額 $\tau[\tilde{Z}-V_U-(L-B)]$ を支払い，債権者に L を支払い，残りが株主の CF になることを表している。[*3] 2 行目の式は，課税対象所得が負になってしまうので法人税額がゼロとなり，$\tilde{Z}$ から債権者に L を支払った残りが株主の CF になる。3 行目は，L を全額支払えないので倒産発生であるが，株主の有限責任から CF はゼロである。上記の場合分けした式を見ればわかるとおり，$V_U \geq B$ である限り，小さな $\tilde{Z}$ が実現して倒産が発生するときには，既に法人税額はゼロの領域になっている。言い換えると，倒産するよりも前の段階で既に法人税額がゼロになっているということである。

次に債権者の期末 CF を見てみよう。これを $\tilde{Q}_{LB}^{(A1)}$ で表す。下付き添字 $_{LB}$ は債権者の CF であることを，上付き添字 $^{(A1)}$ はモデル A の 1 番目のケースであることを表す。

$$\tilde{Q}_{LB}^{(A1)}=\begin{cases}L & (\tilde{Z}\geq L \text{ のとき})\\ \tilde{Z}-k\tilde{Z} & (L>\tilde{Z}\geq 0 \text{ のとき})\\ 0 & (0>\tilde{Z} \text{ のとき})\end{cases} \tag{6}$$

この 1 行目の式は，債権者に L が支払われるケースである。2 行目の式は企業が倒産となる場合である。企業の支配権は株主から債権者に移転して，企業の期末 CF の $\tilde{Z}$ は債権者のものになる。債権者は $\tilde{Z}$ から倒産コスト $k\tilde{Z}$ を負担した残りを受取る。3 行目は，債権者の有限責任により CF はゼロである。

以上が株主と債権者の CF である。一定の価値評価ルールに従うと，株主の期末 CF から株式価値 S_L が，債権者の期末 CF から負債価値 B が導出できる。$S_L=V\left[\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}\right]$ と $B=V\left[\tilde{Q}_{LB}^{(A1)}\right]$ である。S_L と B の和が企業価値 V_L であり，企業 L が投資家全体 (株主と債権者) に支払う CF を $\tilde{Q}_{L}^{(A1)}$ とする。言うまでもなく，$\tilde{Q}_{L}^{(A1)}=\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}+\tilde{Q}_{LB}^{(A1)}$ である。すると当然，$V_L=V\left[\tilde{Q}_{L}^{(A1)}\right]$ でなければな

[*3] $\tilde{Z}=V_U+L-B$ のとき，$\tilde{Z}-L-\tau[\tilde{Z}-V_U-(L-B)]=V_U-B\geq 0$ である。すなわち，$\tilde{Z}$ の値が 1 行目のケースの場合，その最小の $\tilde{Z}$ の値においてもまだ非負の取り分が株主に発生しているということである。

らない。企業価値の値そのものは，株式価値に負債価値を加えて求めればよいが，企業 L の企業価値 V_L は，元々の企業 U の企業価値 V_U に節税効果の価値を加え，倒産コストの価値を減じることでも表現できる。そこでこの表記を導出するために，$\tilde{Q}_L^{(A1)}$ の定式化を前の $\tilde{Q}_U$ を使って表すことを考えよう。

$\tilde{Q}_L^{(A1)}$ は (5) 式と (6) 式を合計して求められる。これが

$$\tilde{Q}_L^{(A1)} = \begin{cases} (1-\tau)\tilde{Z} + \tau V_U + \tau(L-B) & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - k\tilde{Z} & (L > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{7}$$

である。この (7) 式を，(4) 式の $\tilde{Q}_U$ を用いると次のようになる。ただし以下の定式化は，$V_U \geq L$ であることを前提にしている。

$$\tilde{Q}_L^{(A1)} = \begin{cases} \tilde{Q}_U + \tau(L-B) & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z} - V_U) & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq V_U \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (V_U > \tilde{Z} \geq L \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U - k\tilde{Z} & (L > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{8}$$

この式の意味は明らかであろう。企業 L が法人税額を支払っている限り ($\tilde{Z} \geq V_U + L - B$ のとき)，企業 L は，企業 U にはない節税額 $\tau(L-B)$ を享受している。従って (8) 式の 1 行目は $\tilde{Q}_L^{(A1)} = \tilde{Q}_U + \tau(L-B)$ である。次に $V_U + L - B > \tilde{Z} \geq V_U$ のとき，企業 L は法人税額を支払わないので，投資家への CF は $\tilde{Z}$ そのものであるが，そのとき企業 U は $\tau(\tilde{Z} - V_U)$ の法人税額を納めている。$\tilde{Z} = (1-\tau)\tilde{Z} + \tau V_U + \tau(\tilde{Z} - V_U)$ と書き換えることができるので，(8) 式の 2 行目は $\tilde{Q}_L^{(A1)} = \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z} - V_U)$ となる。企業 L は企業 U に比べて $\tau(\tilde{Z} - V_U)$ の法人税を節約していることになるから，これも節税効果である。(8) 式の 3 行目，$V_U > \tilde{Z} \geq L$ のとき，企業 U も法人税額がゼロとなり，$\tilde{Q}_L^{(A1)} = \tilde{Q}_U$ となる。4 行目の $L > \tilde{Z} \geq 0$ であるなら，企業 L は倒産となって倒産コストが発生するので，$\tilde{Q}_L^{(A1)} = \tilde{Q}_U - k\tilde{Z}$ である。5 行目の $0 > \tilde{Z}$ のときは，両企業とも有限責任により CF はゼロで，$\tilde{Q}_L^{(A1)} = \tilde{Q}_U$ である。

今，表記の便宜上，次のような関数を定義する。ただし任意の定数を S と T で表し，$S < T$ であるとする。

$$\tilde{b}_{[S,T)} = \begin{cases} 1 & (\tilde{Z} \in [S,T) \text{ のとき}) \\ 0 & (\tilde{Z} \notin [S,T) \text{ のとき}) \end{cases} \tag{9}$$

この $\tilde{b}_{[S,T)}$ を用いるなら，(8) 式は次のようにもっと簡単な形にすることができる。

$$\tilde{Q}_L^{(A1)} = \tilde{Q}_U + \tau(L-B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\infty)} + \tau(\tilde{Z} - V_U)\tilde{b}_{[V_U, V_U+L-B)} - k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L)} \tag{10}$$

この式の右辺第 2 項と第 3 項は節税効果により発生する CF であり，右辺第 4 項は倒産コストによ

る CF である。これらを各々，$\widetilde{TS}$ と $\widetilde{BC}$ で表し，

$$\begin{aligned}\widetilde{TS}^{(A1)} &= \tau(L-B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\infty)} + \tau(\tilde{Z}-V_U)\tilde{b}_{[V_U,V_U+L-B)} \\ \widetilde{BC}^{(A1)} &= k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L)}\end{aligned}$$

とする。これらについても一定の価値評価ルールに従って各々の価値を求めることができて，節税効果の価値を $V\left[\widetilde{TS}^{(A1)}\right]$，倒産コストの価値を $V\left[\widetilde{BC}^{(A1)}\right]$ と記すと，企業価値 V_L は次のように書ける。

$$V_L = V_U + V\left[\widetilde{TS}^{(A1)}\right] - V\left[\widetilde{BC}^{(A1)}\right]$$

$\tilde{Q}_L^{(A1)}$ を $\tilde{Q}_U$ で表した (8) 式は，あくまでも $V_U \geq L$ を前提にした定式化であるが，逆に $L > V_U$ であったなら，(8) 式の場合分けは多少の変更を要する。しかしそうであったとしても，$\tilde{b}_{[S,T)}$ を用いた $\tilde{Q}_L^{(A1)}$ の定式化に変更はない。すなわち，V_U と L との大小関係にかかわらず，(10) 式は成立している。[*4]

3.2　倒産コストモデル A：その 2 ($B > V_U$ の場合)

この小節ではモデル A の 2 番目のケースとして，$B > V_U$ の場合を検討しよう。$B > V_U$ ということは $L > V_U + L - B$ である。モデル A では債権者に約束している L を期末に支払えないときが倒産であるが，企業 L の期末 CF が $\tilde{Z} = L$ のとき，法人税額 $\tau[\tilde{Z} - V_U - (L-B)]$ は正である。これは，企業が倒産となるときでもまだ法人税の支払があることを意味している。倒産に伴って企業の支配権は株主から債権者に移転しているから，法人税を負担するのは債権者である。通常，税金債務は一般債務より優先順位が高いと考えられているので，法人税額をフルに支払うとすると，$\tilde{Z}$ が L よりも大きい段階で株主への CF はゼロになるであろう。すなわち，$\tilde{Z}$ から L と $\tau[\tilde{Z} - V_U - (L-B)]$ を控除した値がちょうどゼロとなるような $\tilde{Z}$ の値を Φ として表すと，

$$\Phi = L + \frac{\tau(B - V_U)}{1-\tau}$$

であり，$\tilde{Z} \geq \Phi$ のとき $\tilde{Z} - L - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L-B)] \geq 0$ である。この Φ は $B > V_U$ であるから L よりも大きい。従って株主の CF である $\tilde{Q}_{LS}^{(A2)}$ は次のように書ける。上付き添字の $^{(A2)}$ はモデル A の 2 番目のケースであることを表している。

$$\tilde{Q}_{LS}^{(A2)} = \begin{cases} \tilde{Z} - L - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L-B)] & (\tilde{Z} \geq \Phi \text{ のとき}) \\ 0 & (\Phi > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{11}$$

[*4] $L > V_U$ の場合，$\tilde{Q}_L^{(A1)}$ の定式化は次のとおりである。

$$\tilde{Q}_L^{(A1)} = \begin{cases} \tilde{Q}_U + \tau(L-B) & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z} - V_U) & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z} - V_U) - k\tilde{Z} & (L > \tilde{Z} \geq V_U \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U - k\tilde{Z} & (V_U > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases}$$

この $\tilde{Q}_L^{(A1)}$ を $\tilde{b}_{[S,T)}$ を用いて表現すれば，やはり (10) 式の形となることは明らかであろう。

次に債権者の CF を定式化しよう。$\tilde{Z} \geq \Phi$ のとき債権者は L を受取る。問題は $\Phi > \tilde{Z}$ のときである。$\tilde{Z} > V_U + L - B$ である限り課税対象所得は正であるから，法人税額 $\tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)]$ をフルに支払うなら，$\Phi > \tilde{Z}$ であれば $\tilde{Z}$ から債権者に L を全額支払うことはできない。つまり倒産となって，$\tilde{Z}$ は債権者の下に移転し，倒産コスト $k\tilde{Z}$ が発生する。従って $\Phi > \tilde{Z} \geq V_U + L - B$ であるなら，債権者の CF は $\tilde{Z} - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)] - k\tilde{Z}$ である。[*5] 次に $\tilde{Z}$ が $V_U + L - B$ よりも小さいなら法人税額はゼロであり，$\tilde{Z}$ から倒産コスト $k\tilde{Z}$ を控除した残りが債権者の CF になる。以上のことに加えて，債権者の有限責任を考慮すると債権者の CF は次のようにまとめられる。

$$\tilde{Q}_{LB}^{(A2)} = \begin{cases} L & (\tilde{Z} \geq \Phi \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)] - k\tilde{Z} & (\Phi > \tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - k\tilde{Z} & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{12}$$

上記 (11) 式の $\tilde{Q}_{LS}^{(A2)}$ と (12) 式の $\tilde{Q}_{LB}^{(A2)}$ を合計して，企業 L が投資家全体に支払う CF を求めよう。これを $\tilde{Q}_{L}^{(A2)}$ のように記す。

$$\tilde{Q}_{L}^{(A2)} = \begin{cases} (1-\tau)\tilde{Z} + \tau V_U + \tau(L - B) & (\tilde{Z} \geq \Phi \text{ のとき}) \\ (1-\tau)\tilde{Z} + \tau V_U + \tau(L - B) - k\tilde{Z} & (\Phi > \tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - k\tilde{Z} & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{13}$$

前と同様にして，この $\tilde{Q}_{L}^{(A2)}$ を $\tilde{Q}_U$ で表現して，節税効果の価値と倒産コストの価値を導出したい。$\tilde{Q}_{L}^{(A2)}$ は次のように書き換えられる。

$$\tilde{Q}_{L}^{(A2)} = \begin{cases} \tilde{Q}_U + \tau(L - B) & (\tilde{Z} \geq \Phi \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(L - B) - k\tilde{Z} & (\Phi > \tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z} - V_U) - k\tilde{Z} & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq V_U \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U - k\tilde{Z} & (V_U > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{14}$$

1 行目と 2 行目の式は，倒産の有無にかかわらず，企業 L は法人税額をフルに支払っているので，節税額 $\tau(L - B)$ を享受する。ただし 1 行目のケースでは倒産は発生しないが，2 行目のケースでは L の債務不履行で倒産発生となり，倒産コストが出現する。3 行目の式も 2 行目と同様であるが，この範囲内の $\tilde{Z}$ の値では，企業 L の法人税額はゼロであるが，企業 U は法人税を支払っている。すなわち，企業 L にとっては企業 U の税額分 $\tau(\tilde{Z} - V_U)$ を節約していることになるから，節税効果は $\tau(\tilde{Z} - V_U)$ としてカウントされる。4 行目の式の $\tilde{Z}$ の値において，企業 L も企業 U も法人税額はゼロとなる。

[*5] $L > B$ は必ず成立しているから，常に $V_U + L - B > 0$ である。従って，$\tilde{Z} = V_U + L - B$ のとき，債権者の CF は正である。

前で定義した $\tilde{b}_{[S,T)}$ を用いて，(14) 式の $\tilde{Q}_L^{(A2)}$ から節税効果の CF と倒産コストの CF は，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{TS}^{(A1)} &= \tau(L-B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\infty)} + \tau(\tilde{Z}-V_U)\tilde{b}_{[V_U,V_U+L-B)} \\
\widetilde{BC}^{(A2)} &= k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,\Phi)}
\end{aligned}
$$

のようにできる。前の $V_U \geq B$ のケース (A1) と今の $B > V_U$ のケース (A2) を比較すると，節税効果の方は全く同じ定式化となる。上付き添字で $^{(A1)}$ とした理由である。倒産コストの方は，倒産発生の分岐点が異なることを反映した定式化になっている。ケース (A1) の $V_U \geq B$ である場合は $\tilde{Z}$ が L 未満のときに倒産であったが，ケース (A2) の $B > V_U$ である場合は $\tilde{Z}$ が Φ 未満になるときが倒産になっている。明らかに次式が成立している。

$$
\tilde{Q}_L^{(A2)} = \tilde{Q}_U + \widetilde{TS}^{(A1)} - \widetilde{BC}^{(A2)}
$$

以上の CF の定式化から，一定の価値評価ルールに従って各々の価値を求めることができる。株式価値 S_L は $S_L = V\left[\tilde{Q}_{LS}^{(A2)}\right]$，負債価値 B は $B = V\left[\tilde{Q}_{LB}^{(A2)}\right]$ である。企業価値は $V_L = S_L + B$ であるが，これは $V_L = V\left[\tilde{Q}_L^{(A2)}\right]$ でもある。また節税効果の価値を $V\left[\widetilde{TS}^{(A1)}\right]$，また倒産コストの価値を $V\left[\widetilde{BC}^{(A2)}\right]$ とする。以上のことから，

$$
S_L + B = V_L = V_U + V\left[\widetilde{TS}^{(A1)}\right] - V\left[\widetilde{BC}^{(A2)}\right]
$$

が成立するのは前と同様である。

ここで注意すべきは，今の $B > V_U$ というケース (A2) では B の解析解を求められないという点である。(12) 式の $\tilde{Q}_{LB}^{(A2)}$ の中に B が入り込んでいるからである。前のケース (A1)，$V_U \geq B$ の場合は，$\tilde{Q}_{LB}^{(A1)}$ の中に B が登場しないから，$B = V\left[\tilde{Q}_{LB}^{(A1)}\right]$ は解析解と言ってもよいが，ケース (A2) の $B > V_U$ という場合は数値的に $B = V\left[\tilde{Q}_{LB}^{(A2)}\right]$ が成立しているに過ぎない。これが成立するような B の値を探索することが必要である。ただこの数値解は比較的簡単に見つけられる。B の数値解を求めることができれば，あとは順に S_L，V_L，$V\left[\widetilde{TS}^{(A1)}\right]$，$V\left[\widetilde{BC}^{(A2)}\right]$ を計算していけばよい。

4　倒産コストモデル：モデル B

前節では期末に L を債権者に支払えない場合が倒産であった。L は負債の元本に金利を含んだ金額である。これが最も単純な倒産の定義であるが，実際には次のようなことがしばしば起る。もし企業が約束した金額を期末に支払えない場合，債権者と再交渉して支払の一部を猶予してもらう。例えば，元本部分の返済を遅らせてもらう，金利支払の減免を受けるというような措置である。この場合，支払えるだけのものを今，企業が支払うことで倒産は回避される。債権者にとっても，倒産となってしまうと倒産コストを負担しなければならないので，返済額の猶予・減免を認めることに一定の経済合理性がある。ただ，本稿で取り上げているのは 1 期間モデルであるから，負債の再交渉の問題をここで正面から検討するのも少々無茶であろう。[*6] そこで本稿では以下，L そのもので

[*6] 連続時間モデルのフレームワークで負債の再交渉の問題を取り上げたのが富田・池田・辻 (2015) である。

はなく，L の一部，具体的には金利支払額を支払えないときが倒産であるとみなす場合をモデル化したい。このとき元本返済は一部猶予されることになる。この節のモデルを前と区別するため，以下では「モデル B」と称することにする。

モデル B を展開する際，モデル A と同様，V_U が B より大きいか小さいかで，CF の定式化が異なるので区別する必要がある。以下では，$V_U \geq B$ のときをモデル B の 1 番目のケースとして (B1) のように示す。逆に $B > V_U$ のときはモデル B の 2 番目のケースで (B2) である。

4.1 倒産コストモデル B：その 1 ($V_U \geq B$ の場合)

$V_U \geq B$ のときは $V_U + L - B > L$ である。$\tilde{Z} \geq V_U + L - B$ であるなら，法人税額は非負で，企業は $\tilde{Z}$ から債権者に L を支払い，法人税に $\tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)]$ を支払い，その残りが株主の CF となる。$V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L$ であるなら，法人税額はゼロになって，L を支払った残りの $\tilde{Z} - L$ が株主の CF である。ここまでは (A1) と同じである。今，倒産か否かの分岐点は L ではなく，負債の金利部分 $L - B$ であるが，当然 $V_U + L - B > L - B$ であるから，倒産時には既に法人税額はゼロとなっている。$\tilde{Z}$ が L を下回ると，企業は $\tilde{Z}$ から L 全額を支払うことはできないので，まず金利 $L - B$ を支払い，残った $\tilde{Z} - (L - B)$ を元本返済にあてる。$L > \tilde{Z} \geq L - B$ であるなら，まだ倒産は発生してないが，株主の CF はゼロになる。従って (B1) の株主の CF は，

$$\tilde{Q}_{LS}^{(A1)} = \begin{cases} \tilde{Z} - L - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)] & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - L & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L \text{ のとき}) \\ 0 & (L > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases}$$

のとおりであるが，結果的には (A1) のケースと同じであるから，上付き添字は $^{(A1)}$ としてある。

モデル A との差異は債権者の CF に現れ，次のように定式化される。

$$\tilde{Q}_{LB}^{(B1)} = \begin{cases} L & (\tilde{Z} \geq L \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} & (L > \tilde{Z} \geq L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - k\tilde{Z} & (L - B > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{15}$$

$\tilde{Z}$ が L 以上であれば債権者は L を受取るが，$L > \tilde{Z} \geq L - B$ であるなら，債権者は金利 $L - B$ と元本返済額 $\tilde{Z} - (L - B)$ の合計 $\tilde{Z}$ を受取る。このときまだ定義としては倒産ではないが，結果的に $\tilde{Z}$ は債権者の下に移転している。$\tilde{Z}$ が $L - B$ 未満になると倒産であり，倒産コスト $k\tilde{Z}$ が発生する。$\tilde{Z}$ が負であるなら，債権者の有限責任からその CF はゼロである。

上記の株主の CF と債権者の CF を加えて，企業が投資家全体に支払う CF を求めよう。

$$\tilde{Q}_{L}^{(B1)} = \begin{cases} \tilde{Z} - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)] & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - k\tilde{Z} & (L - B > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{16}$$

2 行目の式は $V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L - B$ の場合であるが，このとき法人税額はゼロであるものの，まだ倒産ではない。企業の CF は，$\tilde{Z}$ が L 以上であれば株主の下に，$\tilde{Z}$ が L 未満であれば債権者の

下にある。3 行目の式では，$\tilde{Z}$ が $L-B$ 未満であるなら倒産となって倒産コストが発生している。この (16) 式の $\tilde{Q}_L^{(B1)}$ を $\tilde{Q}_U$ を使って表して，節税効果の価値と倒産コストの価値を定式化しよう。$\tilde{Q}_L^{(B1)}$ は次のように書き換えられる。

$$\tilde{Q}_L^{(B1)} = \begin{cases} \tilde{Q}_U + \tau(L-B) & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z} - V_U) & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq V_U \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (V_U > \tilde{Z} \geq L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U - k\tilde{Z} & (L - B > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{17}$$

$$= \tilde{Q}_U + \tau(L-B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\infty)} + \tau(\tilde{Z} - V_U)\tilde{b}_{[V_U,V_U+L-B)} - k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L-B)} \tag{18}$$

この (17) 式は $V_U \geq L-B$ であることを前提にしたものである。この逆，$L-B > V_U$ であったとしても，(18) 式は全く同一の形で導出される。[*7] 以上のことから節税効果と倒産コストの CF は，

$$\widetilde{TS}^{(A1)} = \tau(L-B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\infty)} + \tau(\tilde{Z} - V_U)\tilde{b}_{[V_U,V_U+L-B)}$$
$$\widetilde{BC}^{(B1)} = k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L-B)}$$

であるが，節税効果の CF は (A1) の場合と同じであるから，上付き添字 $^{(A1)}$ を記している。

CF を定式化したので価値を求めることができる。形式的に定義しておくと，株式価値は $S_L = V\left[\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}\right]$，負債価値は $B = V\left[\tilde{Q}_{LB}^{(B1)}\right]$ であり，$V_L = S_L + B$ から求められる企業価値は $V_L = V\left[\tilde{Q}_L^{(B1)}\right]$ でもある。

$$V_L = V_U + V\left[\widetilde{TS}^{(A1)}\right] - V\left[\widetilde{BC}^{(B1)}\right]$$

が成立し，ここの $V\left[\widetilde{TS}^{(A1)}\right]$ は節税効果の価値，$V\left[\widetilde{BC}^{(B1)}\right]$ は倒産コストの価値である。価値の計算で注意すべき点は，モデル B においては，その 1 番目のケース ($V_U \geq B$ の場合) でも負債価値 B の解析解が得られなくなってしまうことである。$B = V\left[\tilde{Q}_{LB}^{(B1)}\right]$ の $\tilde{Q}_{LB}^{(B1)}$ の中に B が入り込んでいる。従って数値解析に依存して負債価値 B の数値解を求める必要がある。この数値解も比較的容易に求めることができて，B の値を得ることができたなら，順次その他の価値を計算することができる。

[*7] $L-B > V_U$ であるなら，$\tilde{Q}_L^{(B1)}$ は次のようにしなければならない。

$$\tilde{Q}_L^{(B1)} = \begin{cases} \tilde{Q}_U + \tau(L-B) & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z} - V_U) & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z} - V_U) - k\tilde{Z} & (L - B > \tilde{Z} \geq V_U \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U - k\tilde{Z} & (V_U > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases}$$

この場合であっても (18) 式が成立している。

4.2　倒産コストモデル B：その 2 ($B > V_U$ の場合)

(A2) のケースと同じ $B > V_U$ の場合，企業が CF の $\tilde{Z}$ から債権者に L と，法人税額 $\tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)]$ を支払うと，法人税額がゼロになるよりも大きな $\tilde{Z}$ の値で株主の CF がゼロになる。株主の CF をゼロにする $\tilde{Z}$ の値が Φ であった。株主の CF は，

$$\tilde{Q}_{LS}^{(A2)} = \begin{cases} \tilde{Z} - L - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)] & (\tilde{Z} \geq \Phi \text{ のとき}) \\ 0 & (\Phi > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，これは (A2) と同じであるから，上付き添字は $^{(A2)}$ としてある。

債権者の CF は，倒産の定義の変更に伴って (A2) の場合から以下のような変更を要する。

$$\tilde{Q}_{LB}^{(B2)} = \begin{cases} L & (\tilde{Z} \geq \Phi \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)] & (\Phi > \tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - k\tilde{Z} & (L - B > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{19}$$

2 行目の式，$\Phi > \tilde{Z} \geq V_U + L - B$ において，企業は法人税をフルに支払うと債権者に L を支払えない。そこで $\tilde{Z}$ から，金利 $L - B$ と法人税額 $\tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)]$ の支払をした後の残りを元本返済にあてる。債権者が受取るのは

$$\{L - B\} + \left\{\tilde{Z} - (L - B) - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)]\right\} = \tilde{Z} - \tau[\tilde{Z} - V_U - (L - B)]$$

となって，容易に確認できるが，これは L よりも小さい。左辺の最初の括弧 $\{\cdot\}$ が金利支払額，左辺 2 番目の括弧 $\{\cdot\}$ が元本返済額である。この段階ではまだ倒産ではない。法人税を支払っているのはあくまでも企業 (あるいは株主) である。(19) 式の 3 行目，$V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L - B$ の場合，法人税額はゼロになる。企業は $\tilde{Z}$ から金利 $L - B$ を支払った残り $\tilde{Z} - (L - B)$ をすべて元本返済にあてる。金利と併せて債権者の受取る CF は $\tilde{Z}$ となる。この場合もまだ企業は倒産してないが，結果的には $\tilde{Z}$ は債権者の手元に移転したのと同じになる。(19) 式の 4 行目，$L - B > \tilde{Z} \geq 0$ において企業は倒産となって倒産コストが発生する。

次に株主の CF と債権者の CF を合計して，企業が投資家全体に支払う CF を導出する。

$$\tilde{Q}_{L}^{(B2)} = \begin{cases} (1 - \tau)\tilde{Z} + \tau V_U + \tau(L - B) & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Z} - k\tilde{Z} & (L - B > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるが，これは $\tilde{Q}_U$ を使って書き換えると，

$$\tilde{Q}_{L}^{(B2)} = \tilde{Q}_U + \tau(L - B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\infty)} + \tau(\tilde{Z} - V_U)\tilde{b}_{[V_U,V_U+L-B)} - k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L-B)}$$

という形になり，前の (B1) における (18) 式と同じ形になる。[*8]

5 シミュレーション

この節では，前節のモデルの数値解を求めてモデルの特徴を明らかにしたい。モデル上の外生的なパラメターは次の 7 つである。企業の CF である $\tilde{Z}$ の期待値 μ とその標準偏差 σ，そして法人税率 τ，倒産コストの比例係数 k，無危険利子率 R_F，資本市場のリスク価格 λ，マーケットポートフォリオ収益率と $\tilde{Z}$ の相関係数 $\mathrm{corr}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})$ である。これらの値を所与としてモデルに与えると，最適資本構成を決めることができる。すなわち，企業価値 V_L を最大化するような L の値を求めて，その L の値の下での株式価値 S_L と負債価値 B が最適資本構成である。以上の数字についてまとめたのが表 1 である。

注意すべきことは，ここでは 1 期間を 10 年としている点である。表 1 の μ や σ は 1 期間 10 年とする企業 CF の期待値と標準偏差である。10 年間分の EBIT の合計と期末資産価格との和が，期待値で 100，標準偏差で 50.6 という値を想定しているということである。表 1 にある R_F が 0.05 となっているが，これは 1 期間を 1 年としたときの表記である。1 期間 10 年とする場合の R_F の値は，$(1+1\text{ 期間 }1\text{ 年の値})^{10}-1$ から計算されなければならない。1 期間 1 年で $R_F = 0.05$ ならば，1 期間 10 年の場合の R_F の値は $0.629(=1.05^{10}-1)$ である。またマーケットポートフォリオ収益率 $\tilde{R}_M$ については，1 期間 1 年とした表記で期待値 $\mathrm{E}(\tilde{R}_M) = 0.13$ と標準偏差 $\sigma(\tilde{R}_M) = 0.25$ を想定している。1 期間 10 年とした場合，期待値の方は $\mathrm{E}(\tilde{R}_M) = 2.395 = 1.13^{10}-1$，標準偏差は $\sigma(\tilde{R}_M) = 0.791 = 0.25\times\sqrt{10}$ という値になる。これらから 1 期間 10 年の場合のリスク価格 λ を計算すると，表 1 にある $2.825(=(2.395-0.629)/(0.791^2))$ である。

前節の CF の定式化から価値を求める方法については，CAPM の確実性等価アプローチに依拠している。具体的な式の形は付録にすべて掲載してある。なおそこでは $\mathrm{cov}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})$ の値が必要になるが，これは

$$\mathrm{cov}(\tilde{R}_M, \tilde{Z}) = \mathrm{corr}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})\sigma\sigma(\tilde{R}_M)$$

から計算している。言うまでもなく，ここの σ や $\sigma(\tilde{R}_M)$ は 1 期間 10 年とした値を用いる。以上の外生的パラメターの下で最適資本構成を求めると，モデル A については負債比率 (D.R.) で 0.614，モデル B では 0.923 が最適な負債依存量である。ここの負債比率 (D.R.) とは B/V_L という比率である。現実企業の負債比率が大半の製造業で 0.5 未満であることからして，どちらのモデルにおい

[*8] $\tilde{Z}$ の場合分けで $\tilde{Q}_L^{(B2)}$ を書き換えると次のとおりである。どちらの場合も結果的には (18) 式が導出されることは明らかであろう。

$V_U \geq L-B$ の場合

$$\tilde{Q}_L^{(B2)} = \begin{cases} \tilde{Q}_U + \tau(L-B) & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z}-V_U) & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq V_U) \\ \tilde{Q}_U & (V_U > \tilde{Z} \geq L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U - k\tilde{Z} & (L - B > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases}$$

$L-B > V_U$ の場合

$$\tilde{Q}_L^{(B2)} = \begin{cases} \tilde{Q}_U + \tau(L-B) & (\tilde{Z} \geq V_U + L - B \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z}-V_U) & (V_U + L - B > \tilde{Z} \geq L - B) \\ \tilde{Q}_U + \tau(\tilde{Z}-V_U) - k\tilde{Z} & (L - B > \tilde{Z} \geq V_U \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U - k\tilde{Z} & (V_U > \tilde{Z} \geq 0 \text{ のとき}) \\ \tilde{Q}_U & (0 > \tilde{Z} \text{ のとき}) \end{cases}$$

表 1　モデル A とモデル B の計算例

＜外生パラメター＞

μ	σ	τ	k	R_F	λ	$\mathrm{corr}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})$
100.0	50.60	0.30	0.4	0.05	2.825	0.4

＜内生変数：最適資本構成＞

モデル	L	S_L	B	V_L	D.R.	V_U	$V[\widetilde{TS}]$	$V[\widetilde{BC}]$
A(1)	38.32	11.69	18.59	30.28	0.614	28.80	2.60	1.12
B(2)	69.95	2.49	29.67	32.16	0.923	28.80	4.62	1.27

表 2　最適資本構成：一次同次性の成立

モデル		μ	σ	L	S_L	B	V_L	D.R.	V_U	$V[\widetilde{TS}]$	$V[\widetilde{BC}]$
	(1)	80.0	40.5	30.65	9.35	14.87	24.23	0.614	23.04	2.08	0.89
A	(1)	100.0	50.6	38.32	11.69	18.59	30.28	0.614	28.80	2.60	1.12
	(1)	120.0	60.7	45.98	14.03	22.31	36.34	0.614	34.56	3.11	1.34
	(2)	80.0	40.7	55.96	1.99	23.73	25.72	0.923	23.04	3.70	1.01
B	(2)	100.0	50.6	69.95	2.49	29.67	32.16	0.923	28.80	4.62	1.27
	(2)	120.0	60.7	83.95	2.99	35.60	38.59	0.923	34.56	5.55	1.52

ても最適資本構成の負債比率は大きすぎる。これは古くから知られている倒産コストモデル共通の欠点である。表 1 で示されたモデル A の (1) というのは，最適資本構成においては 1 番目のケース ($V_U \geq B$ の場合) が該当し，前節の (A1) の定式化に従って計算されていることを意味する。モデル B の (2) というのは，2 番目のケース ($B > V_U$ の場合) が該当し，(B2) の定式化で計算されていることを示している。

本稿のモデル A は元利合計額が支払えないときが倒産で，モデル B は金利を支払えないときが倒産であるから，モデル B ではモデル A よりも倒産発生の条件が緩い。当然のことながら，モデル B はモデル A よりも負債利用を促進し，モデル B における最適資本構成の負債比率は極めて高いものとなっている。債権者に約束する期末支払 (元利合計) 額は，モデル A では 38.32，モデル B では 69.95 のとき企業価値最大となる。節税効果の価値で見ると，モデル B の 4.62 はモデル A の 2.60 に対し約 1.8 倍の大きさになっている。

ところでモデル A であれモデル B であれ，これらは一次同次性の性質を持っている。これを確認するために計算したのが表 2 である。表 2 の数値から容易に確認できるが，企業 CF の $\tilde{Z}$ の期待値 μ が 0.8 倍あるいは 1.2 倍になるとき，その標準偏差 σ も 0.8 倍あるいは 1.2 倍に比例して変化するものとして計算すると，内生変数の価値額はすべて 0.8 倍あるいは 1.2 倍の値になっている。比率である負債比率 (D.R.) は不変である。

5.1　法人税率と倒産コストの効果

以下ではシミュレーションでモデルの特徴を見ていくことにする。外生的パラメターのうち 1 つだけを変化させたとき，最適資本構成の負債比率がどのように変化するかを調べる。まず法人税率

τ と倒産コストの比例係数 k の効果である。τ と k の変化で最適な負債比率がどう変化するかを，モデル A については表 3，モデル B については表 4 にまとめてある。全体を概観すると，τ の上昇により負債比率は上昇し，k の上昇により負債比率は低下する。表 3 と表 4 ではこの動きについて例外は一切観察されない。ただし倒産コストが小さいとき，最適資本構成が内点解にならない場合がある。端点解 (最大可能な負債) が最適の場合，表では「N.A.」と表記している。モデル A では $k = 0.1$ において τ が 0.35 以上のとき，モデル B では，$k = 0.1$ のときは τ が 0.25 以上，$k = 0.3$ のときは $\tau = 0.45$ のときに端点解となる。

モデル A においては，法人税率が小さいとき，現実企業の負債比率として尤もらしい値 0.5 未満を実現できる。$\tau = 0.15$ のとき，$k = 0.3$ でも負債比率は 0.446 である。$\tau = 0.25$ のときでも，$k = 0.5$ で負債比率 0.478 である。これに対して，モデル B では負債比率 0.5 未満の最適資本構成を実現することは不可能である。最小の負債比率でも 0.651 である。

現実企業の倒産コストが実際どれぐらいの大きさかを見当するのは難しいが，過去の多くの研究から，概ね $k = 0.3$ ほどであろうとのコンセンサスが今日できているように思う。他方，法人税率の値であるが，過去の研究では 45 %という値が普通に使われていたように思うが，ここ十数年来の法人税減税の動きにより，35 %あるいは 30 %という値を使うのが最近の研究に多いように思う。ちなみに今日のわが国の (表面的な) 法人税率は概ね 30 %である。しかしそうであったとしても，倒産コストモデルが弾きだす最適資本構成の負債比率は 0.6 ほどである。そこで，これはある意味「禁じ手」なのであるが，個人所得税の効果を考慮して，税率をもっと小さな値として見積もるのが今日の研究の流行になっている。よくその根拠として使われるのは次のような考え方である。

Miller(1977) の個人所得税を考慮したモデルによると，

$$1 - T = \frac{(1 - \tau_S)(1 - \tau)}{1 - \tau_B}$$

で定義される T をもって，法人税率 τ を機械的に置き換える。ここの τ_S は株式からの所得に課せられる (個人所得税の) 税率，τ_B は負債からの所得に課せられる税率である。例えば，$\tau_S = 0.1$, $\tau_B = 0.2$ であるなら，$\tau = 0.3$ から $T = 0.213$ という値を得る。この 0.213 という値でもって，法人税率 τ のところを機械的に置き換えて計算すればよいとする考え方である。この考え方に依って，最近は税率を 20% あるいは 15% に設定し，現実的な負債比率が倒産コストモデルで実現し得るとする研究が散見される。

なぜこれが「禁じ手」なのかというと，確かに Miller(1977) の想定した定常状態の世界であるなら，$V_L = V_U + \tau B$ という修正 MM 命題は，個人所得税を考慮することで $V_L = V_U + TB$ のように導出できる。このことをもって，τ を機械的に T に置き換えればよいという主張がなされるのであるが，この置き換えが正当なのはあくまでも定常状態の世界だけである。本稿の想定は，定常状態ではなく 1 期間モデルであるから，1 期間モデルの世界ではこのような単純な置き換えだけで済むような式を導出することはできない。すなわち，このような置き換えは誤った定式化ということになってしまうから「禁じ手」なのである。

表 3　負債比率 D.R.：τ と k の効果 (モデル A)

	τ			
	0.15	0.25	0.35	0.45
$k = 0.1$	0.777(1)	0.939(2)	N.A.	N.A.
$k = 0.3$	0.446(1)	0.626(1)	0.773(1)	0.866(2)
$k = 0.5$	0.326(1)	0.478(1)	0.615(1)	0.742(1)
$k = 0.7$	0.261(1)	0.393(1)	0.517(1)	0.639(1)

表 4　負債比率 D.R.：τ と k の効果 (モデル B)

	τ			
	0.15	0.25	0.35	0.45
$k = 0.1$	0.983(2)	N.A.	N.A.	N.A.
$k = 0.3$	0.833(1)	0.929(2)	0.980(2)	N.A.
$k = 0.5$	0.729(1)	0.849(1)	0.922(2)	0.971(2)
$k = 0.7$	0.651(1)	0.784(1)	0.869(1)	0.932(2)

5.2　μ と σ の効果

前で述べたように，もし μ と σ が比例的に変化するなら，このモデルは一次同次性を持っているので最適な負債比率は変化しない。ここで検討したいのは，μ と σ がそれぞれ単独で変化するときの負債比率への効果である。この点に関して，本稿のモデル A とモデル B は対照的な特徴を見せる。

倒産コストモデルにおいて，μ の上昇は負債比率を上昇させるとするのが一般的な見解であろう。*9 μ の変化が最適な負債比率にどのような影響を及ぼすかを調べたのが，モデル A では図 1，モデル B では図 2 である。各図では 3 本の曲線が描かれているが，これは τ の 3 つの値について，μ から負債比率への効果を調べたものである。なお掲載は省略するが，τ ではなく k について，同様の図を書いたとしても，全く同じような図が描ける。

モデル A の図 1 では，μ の値が大きいとき (100 以上のとき)，μ の上昇は負債比率を上昇させて

*9 これについては今まで，資本構成の実証分析に関するほとんどすべての研究で幾度も取り上げられた論点であるから，本稿では正面切った議論を省略した。が，その経緯を簡単に紹介すると次のとおりである。倒産コストモデルで明確に示せることは，本稿の記号を使うと，μ と L の間に正の関係があること，これだけである。ところが，実証分析をする際，金額ベースの変数は扱いにくいので (規模の差異が変数に反映されてしまう)，比率ベースの変数が広く利用されることになる。μ は企業の収益性を意味するから，収益性を表す変数として収益率が用いられ，L は企業の負債依存度を意味するから，変数としては負債比率が用いられる。本稿の記号によると，収益率は $(\mu - V_U)/V_L$，負債比率は B/V_L に相当する変数であると考えてよかろう。ところが元々の倒産コストモデルにおいては，これら比率で定義された変数の間に，正・負どちらの関係があるのか明確にはわからないというのが本当のところである。にもかかわらず実証分析においては，理論モデルで示された μ と L との正の関係をもって，企業の収益性は負債依存度と正に相関するというのが倒産コストモデルの理論的含意とされる。実際の実証分析の結果では，ほぼ例外なく「収益率」と「負債比率」に強い負の相関が観察されるので，この観察事実は，倒産コストモデルでは説明できない「パズル」であると指摘されることもしばしばである。ごく近年では，連続時間モデルのフレームワークで複数時点の最適化を考慮した理論モデルから，非常に複雑かつ大掛かりな議論を展開して，この「パズル」を解決してみようというのがちょっとした流行になっている。

図 1　負債比率 D.R.：μ の効果 (モデル A)

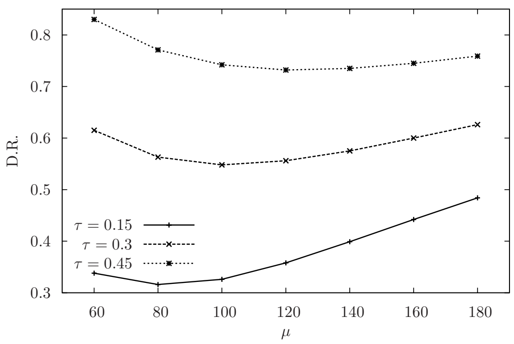


図 2　負債比率 D.R.：μ の効果 (モデル B)

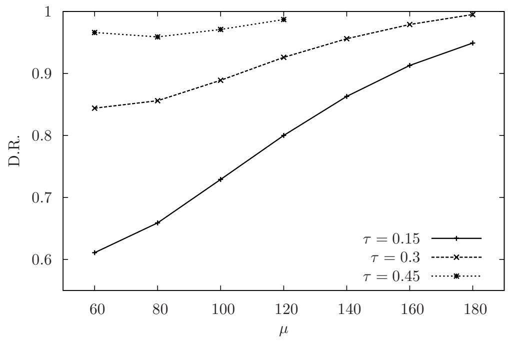


図 3　負債比率 D.R.：σ の効果 (モデル A)

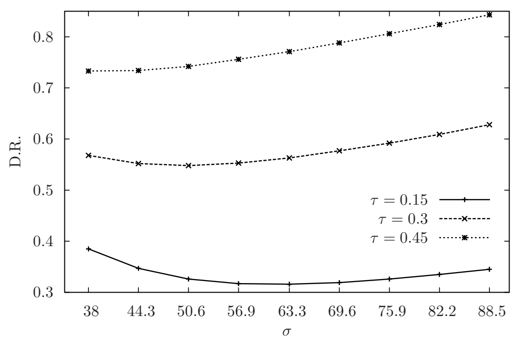
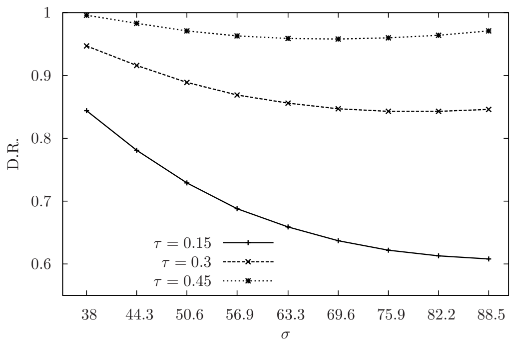


図 4　負債比率 D.R.：σ の効果 (モデル B)



いるが，μ の値が小さいとき (60 や 80 のとき)，μ の上昇は負債比率を低下させる。全体的に見れば，むしろ U 字型の曲線になっているので，μ 上昇により負債比率の増減は不明確である。対して，モデル B の図 2 では，そのときの μ の値にかかわらず，μ の上昇はほとんどすべて負債比率を上昇させる。つまり単調増加型の曲線である。

次に σ だけを変化させる場合の効果はどうであろうか。モデル A について σ の効果を調べたのが図 3 で，モデル B については図 4 である。一般的には，企業 CF の標準偏差の増加は最適な負債比率を低下させると考えられている。ところがモデル A では τ が 0.15 あるいは 0.3 のとき，U 字型の曲線になっている。ということは，σ の値が大きいとき，σ の上昇は負債比率を上昇させる。$\tau = 0.45$ のときは，σ の値にかかわらず，単調増加関数的に一貫して σ 上昇は負債比率を上昇させる。対して，モデル B ではほとんどすべてのケースで，σ の上昇は負債比率を低下させる。τ が 0.45 のときに，σ 上昇が負債比率を上昇させるケースが若干存在するが，その上昇具合はほんの僅かである。

5.3　その他のパラメターの効果

ここではその他の外生的パラメターの効果を調べる。資本市場のリスク価格 λ と相関係数 $\mathrm{corr}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})$，無危険利子率 R_F である。これらが最適な負債比率にどのような影響を与えるかを表

表 5　負債比率 D.R.：λ と $\mathrm{corr}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})$，$R_F$ の効果

λ	D.R. モデル A	D.R. モデル B
-1.006	0.559	0.905
0.397	0.537	0.861
1.450	0.543	0.854
2.825	0.614	0.923
4.606	0.913	N.A.

$\mathrm{corr}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})$	D.R. モデル A	D.R. モデル B
-0.2	0.566	0.919
0.0	0.542	0.872
0.2	0.542	0.854
0.4	0.614	0.923
0.6	0.846	N.A.

R_F	(λ)	D.R. モデル A	D.R. モデル B
0.03	(3.281)	0.591	N.A.
0.04	(3.063)	0.606	0.963
0.05	(2.825)	0.614	0.923
0.06	(2.566)	0.618	0.887
0.07	(2.284)	0.619	0.856

5 にまとめてある。実は，λ と $\mathrm{corr}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})$ については，あまり明確な特徴は得られない。モデル A でもモデル B でも共通に，元々の値が小さいときは負債比率を減少させ，値が大きくなるとやがて反転して負債比率を上昇させるようになるからである。従って λ と $\mathrm{corr}(\tilde{R}_M, \tilde{Z})$ の負債比率に与える効果は不明であるとせざるを得ない。

最後に R_F についてであるが，R_F が上昇すると，モデル A では一貫して負債比率は上昇するが，モデル B では一貫して負債比率は低下している。なぜこのような差異が生じるのか不明であるが，ただ注意すべきは，R_F 単独の効果を抽出するのは不可能という点である。R_F の値が変化すれば，資本市場のリスク価格 λ の値も変化する。λ はマーケットポートフォリオ収益率の期待値と標準偏差からも影響を受ける。R_F の効果には，これらと一緒になって λ に影響する効果と，割引率として価値に影響する効果とが二重に重なって，負債比率に影響を及ぼすことになる。R_F の効果はこのように大変複雑であるから，明快な解析はほとんど不可能であろう。

6　結びに代えて

本稿では 1 期間モデルのフレームワークで 2 種類の倒産コストモデルを提示した。1 期間モデルの倒産コストモデルでは，債権者に約束した期末支払額を履行できないときが倒産である。この期末支払額は負債への元利合計額とするのが通常の設定であり，本稿ではこれをモデル A と称した。モデル A は学界で一般的な形の倒産コストモデルではあるが，その特徴をシミュレーションで調べると，必ずしも学界で一般的に共有されている見解どおりの特徴を示さない。企業 CF の期待値上昇は負債比率を上昇させるとか，企業 CF の標準偏差上昇は負債比率を低下させるというのが，今日の一般的な見解であろうが，最も普通の形であるはずのモデル A では上記の見解どおりの特徴を明確には示さない。

これに対して，本稿ではもう一つの倒産コストモデルを提示し，これをモデル B と称した。モデル B では，債権者への期末支払額のうち，金利を支払えないときだけ倒産であると定義する。すなわち，期末支払額の元利合計の支払が不可能なときは，まず金利部分を支払い，残りすべてを元本返済にあてるなら，倒産は回避されるというものである。これは倒産の条件を緩めるわけであるから，当然，企業の負債利用を促進させる。従って最適資本構成は，モデル B においてモデル A よりも格段に負債比率が高くなる。しかしモデルの特徴をシミュレーションで調べると，上記した一般的な見解は，モデル B の方がモデル A よりもはるかに綺麗に当てはまる。

本稿で 1 期間モデルの倒産コストモデルを再検討した本当の目的は，このモデルを使って何か他のことを分析したいからである。既刊の研究の再検討，M&A の効果や債務保証の分析を，本稿のモデルで再検討するという方向が考えられよう。別の方向性としては，投資の必要収益率の計算方法を提示することも意義あることであろう。投資の必要収益率の計算方法としては，WACC(加重平均資本コスト) が広く入門テキストで紹介されている。しかしこの方法が理論的に妥当なのは修正 MM 命題の成立する世界だけである。倒産コストモデルの世界において，どのように投資の必要収益率を計算すべきであるかは，問題として認識すらなされていないのが現状である。この分析については別の機会にあたらめて行いたい。[*10]

付録 A　価値評価について

本稿は 1 期間モデルであり，CF の価値評価は CAPM に依存している。ある証券の利回り (収益率) を $\tilde{y}$ とすると，CAPM とは

$$\mathrm{E}(\tilde{y}) = R_F + \lambda \operatorname{cov}(\tilde{R}_M, \tilde{y})$$

であることは言うまでもなかろう。ここの R_F は無危険利子率，$\tilde{R}_M$ はマーケットポートフォリオ収益率，λ はリスク価格であって，

$$\lambda = \frac{\mathrm{E}\left(\tilde{R}_M\right) - R_F}{\sigma\left(\tilde{R}_M\right)^2}$$

である。1 期間モデルの期末 CF を $\tilde{Q}$ とすると，1 期間モデルであるから，$\tilde{Q}$ の中には果実のみならず元本部分も含まれている。従ってこの CF の期首時点の価値を V とするなら，この CF の利回りは $\tilde{y} = (\tilde{Q} - V)/V$ のように表現される。この利回りを上記 CAPM の式に代入し，V について解くと，

$$V = \frac{\mathrm{E}\left(\tilde{Q}\right) - \lambda \operatorname{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}\right)}{1 + R_F} \tag{20}$$

という式を得ることができる。これは CAPM の確実性等価式とも称される。

この価値評価方法に従うなら，CF である $\tilde{Q}$ の期待値 $\mathrm{E}\left(\tilde{Q}\right)$ とその共分散 $\operatorname{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}\right)$ を評価することで，CF に対する価値評価 V を求めることができる。本文では，一定の価値評価方法として，$V = V\left[\tilde{Q}\right]$ のように表現していたが，この $V\left[\tilde{Q}\right]$ とは (20) 式のことである。それでは次に，CF の期待値と共分散をどのように評価するか。本文で示したように，本稿の様々な CF の定式化は，企業の期末 CF である $\tilde{Z}$ に依存して，複雑な場合分けを伴うものである。今，$\tilde{Z}$ が $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ という正規分布に従うものとしよう。すると，本稿のような複雑な CF の期待値や共分散は，一定の公式に従って機械的に導出することができる。$\tilde{Z}$ の確率密度関数を $f(\cdot)$，その累積分布関数を $F(\cdot)$ とい

[*10] これについては例えば，拙著 (2016) 第 8 章を参照願いたい。

う記号で表しておく。

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$F(M) = \int_{-\infty}^{M} f(\xi) d\xi$$

例として，企業 U の企業価値 V_U を求めるのに必要な期待値 $\mathrm{E}(\tilde{Q}_U)$ とその共分散 $\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}_U\right)$ を導出してみよう。$\tilde{Q}_U$ の定式化は (4) 式である。これを 1 行で記すために，(9) 式で定義された $\tilde{b}_{[S,T)}$(ただし S と T は任意の定数で $S < T$) を用いると，

$$\tilde{Q}_U = (1-\tau)\tilde{Z}\tilde{b}_{[V_U,\infty)} + \tilde{Z}\tilde{b}_{[0,V_U)} + \tau V_U \tilde{b}_{[V_U,\infty)} \tag{21}$$

というように表現できる。これからわかるように，今，2 種類の確率変数があって，一つは $\tilde{Z}\tilde{b}_{[S,T)}$ という積の形の確率変数，もう一つは $\tilde{b}_{[S,T)}$ という単独の確率変数である。これらの期待値と共分散を，元の $\tilde{Z}$ の期待値 μ や標準偏差 σ，共分散 $\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)$ を使って表現することができる。これは partial moment の公式として知られていて，ここにまとめておこう。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\tilde{Z}\tilde{b}_{[S,T)}\right) &= \mu\left[F(T) - F(S)\right] - \sigma^2\left[f(T) - f(S)\right] \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\tilde{b}_{[S,T)}\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)\left[F(T) - F(S) + Sf(S) - Tf(T)\right] \\
\mathrm{E}\left(\tilde{b}_{[S,T)}\right) &= \left[F(T) - F(S)\right] \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{b}_{[S,T)}\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)\left[f(S) - f(T)\right]
\end{aligned}$$

なお $F(\infty) = 1$，$F(-\infty) = 0$，$f(\infty) = f(-\infty) = 0$，$\lim_{T\to\infty} Tf(T) = 0$ である。これらの導出については，積分を展開することで比較的容易に求めることができるが，拙著 (2016) を参照願いたい。

上記 partial moment の公式を用いれば，企業価値 V_U の定式化に必要な CF 期待値と共分散は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\tilde{Q}_U\right) &= \mu\left[1 - \tau + \tau F(V_U) - F(0)\right] - \sigma^2\left[\tau f(V_U) - f(0)\right] + \tau V_U\left[1 - F(V_U)\right] \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}_U\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)\{1 - \tau + \tau F(V_U) - F(0)\}
\end{aligned}$$

これら期待値と共分散を (20) 式に代入すれば，V_U の定式化を得ることができる。本文でも述べたが，これは V_U の解ではない。期待値や共分散の中に V_U が入り込んでいるからである。実際には (20) 式に依る定式化を成立させるような V_U の値を，数値解法の手続きから探索することが必要である。

以下同様にすれば，本稿で取り上げたすべての CF の期待値と共分散を導出することができる。2 つのモデルがあり，それぞれについて $V_U \geq B$ の場合 (1 番目のケース) と $B > V_U$ の場合 (2 番目のケース) の定式化があって，合計 4 つのケースが存在する。これら 4 つのケースについて，株主の CF と債権者の CF，そして節税効果の CF と倒産コストの CF がある。そのうちいくつかは同じ形になり多少複雑である。そこであらためて整理すると次のような表にまとめられる。

	モデル A		モデル B	
CF	(A1)	(A2)	(B1)	(B2)
株主	$\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}$	$\tilde{Q}_{LS}^{(A2)}$	$\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}$	$\tilde{Q}_{LS}^{(A2)}$
債権者	$\tilde{Q}_{LB}^{(A1)}$	$\tilde{Q}_{LB}^{(A2)}$	$\tilde{Q}_{LB}^{(B1)}$	$\tilde{Q}_{LB}^{(B2)}$
節税効果	$\widetilde{TS}^{(A1)}$	$\widetilde{TS}^{(A1)}$	$\widetilde{TS}^{(A1)}$	$\widetilde{TS}^{(A1)}$
倒産コスト	$\widetilde{BC}^{(A1)}$	$\widetilde{BC}^{(A2)}$	$\widetilde{BC}^{(B1)}$	$\widetilde{BC}^{(B1)}$

以下，期待値と共分散の導出結果を提示するために順次見ていく。

A.1　モデル A：(A1) の場合

株主の CF は

$$\tilde{Q}_{LS}^{(A1)} = (1-\tau)\tilde{Z}\tilde{b}_{[V_U+L-B,\infty)} + \tilde{Z}\tilde{b}_{[L,V_U+L-B)} + \tau(V_U+L-B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\infty)} - L\tilde{b}_{[L,\infty)}$$

であるから，期待値と共分散は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}\right) &= \mu\left[1-\tau+\tau F(V_U+L-B)-F(L)\right] - \sigma^2\left[\tau f(V_U+L-B)-f(L)\right] \\
&\quad + \tau(V_U+L-B)\left[1-F(V_U+L-B)\right] - L\left[1-F(L)\right] \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}_{LS}^{(A1)}\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)\{1-\tau+\tau F(V_U+L-B)-F(L)\}
\end{aligned}$$

のとおりである。次に債権者の CF は

$$\tilde{Q}_{LB}^{(A1)} = L\tilde{b}_{[L,\infty)} + (1-k)\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L)}$$

となるので，この期待値と共分散は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\tilde{Q}_{LB}^{(A1)}\right) &= L\left[1-F(L)\right] + (1-k)\left\{\mu\left[F(L)-F(0)\right] - \sigma^2\left[f(L)-f(0)\right]\right\} \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}_{LB}^{(A1)}\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)\{(1-k)\left[F(L)-F(0)\right] + kLf(L)\}
\end{aligned}$$

節税効果の CF は $\widetilde{TS}^{(A1)}$，倒産コストの CF は $\widetilde{BC}^{(A1)}$ であるが，これは本文で式を表記しておいた。これらの期待値と共分散は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\widetilde{TS}^{(A1)}\right) &= \tau(L-B)\left[1-F(V_U+L-B)\right] - \tau V_U\left[F(V_U+L-B)-F(V_U)\right] \\
&\quad + \tau\left\{\mu\left[F(V_U+L-B)-F(V_U)\right] - \sigma^2\left[f(V_U+L-B)-f(V_U)\right]\right\} \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \widetilde{TS}^{(A1)}\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)\tau\left[F(V_U+L-B)-F(V_U)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\widetilde{BC}^{(A1)}\right) &= k\left\{\mu\left[F(L)-F(0)\right] - \sigma^2\left[f(L)-f(0)\right]\right\} \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \widetilde{BC}^{(A1)}\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)k\left[F(L)-F(0)-Lf(L)\right]
\end{aligned}$$

A.2　モデル A：(A2) の場合

株主の CF は

$$\tilde{Q}_{LS}^{(A2)} = (1-\tau)\tilde{Z}\tilde{b}_{[\Phi,\infty)} - L\tilde{b}_{[\Phi,\infty)} + \tau(V_U + L - B)\tilde{b}_{[\Phi,\infty)}$$

であるから，この期待値と共分散は

$$\mathrm{E}\left(\tilde{Q}_{LS}^{(A2)}\right) = (1-\tau)\left\{(\mu-\Phi)\left[1-F(\Phi)\right] + \sigma^2 f(\Phi)\right\}$$
$$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}_{LS}^{(A2)}\right) = \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)(1-\tau)\left[1-F(\Phi)\right]$$

のように求められる。債権者の CF は

$$\tilde{Q}_{LB}^{(A2)} = L\tilde{b}_{[\Phi,\infty)} + (1-\tau)\tilde{Z}\tilde{b}_{[V_U+L-B,\Phi)} + \tau(V_U + L - B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\Phi)} + \tilde{Z}\tilde{b}_{[0,V_U+L-B)} - k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,\Phi)}$$

のとおりで，この期待値と共分散は次のとおりである。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\tilde{Q}_{LB}^{(A2)}\right) &= L\left[1-F(\Phi)\right] + \tau(V_U+L-B)\left[F(\Phi) - F(V_U+L-B)\right]\\ &\quad +\mu\left[(1-\tau)F(\Phi) + \tau F(V_U+L-B) - F(0)\right] - \sigma^2\left[(1-\tau)f(\Phi) + \tau f(V_U+L-B) - f(0)\right]\\ &\quad + k\left\{\mu\left[F(\Phi)-F(0)\right] - \sigma^2\left[f(\Phi)-f(0)\right]\right\}\end{aligned}$$
$$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}_{LB}^{(A2)}\right) = \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)\left\{(1-\tau)F(\Phi) + \tau F(V_U+L-B) - F(0) - k\left[F(\Phi) - F(0) - \Phi f(\Phi)\right]\right\}$$

ケース (A2) における節税効果の CF は (A1) のそれと同じで，$\widetilde{TS}^{(A1)}$ であるから表記は省略する。倒産コストの CF は

$$\widetilde{BC}^{(A2)} = k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,\Phi)}$$

であって，この期待値と共分散は次のとおりである。

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{BC}^{(A2)}\right) = k\left\{\mu\left[F(\Phi)-F(0)\right] - \sigma^2\left[f(\Phi)-f(0)\right]\right\}$$
$$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \widetilde{BC}^{(A2)}\right) = \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)k\left[F(\Phi) - F(0) - \Phi f(\Phi)\right]$$

A.3　モデル B：(B1) の場合

(B1) のケースにおける株主の CF は (A1) のそれと同じで，$\tilde{Q}_{LS}^{(A1)}$ の結果を用いればよい。他方，ケース (B1) の債権者の CF は

$$\tilde{Q}_{LB}^{(B1)} = L\tilde{b}_{[L,\infty)} + \tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L)} - k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L-B)}$$

であり，この期待値と共分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\tilde{Q}_{LB}^{(B1)}\right) &= L\left[1-F(L)\right] + \mu\left[F(L)-F(0)\right] - \sigma^2\left[f(L)-f(0)\right]\\ &\quad - k\left\{\mu\left[F(L-B)-F(0)\right] - \sigma^2\left[f(L-B)-f(0)\right]\right\}\end{aligned}$$
$$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Q}_{LB}^{(B1)}\right) = \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M, \tilde{Z}\right)\left\{F(L) - F(0) - k\left[F(L-B) - F(0) - (L-B)f(L-B)\right]\right\}$$

のとおりである。節税効果の CF はケース (A1) と同じ $\widetilde{TS}^{(A1)}$ で，倒産コストの CF は

$$\widetilde{BC}^{(B1)} = k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L-B)}$$

で，この期待値と共分散は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\widetilde{BC}^{(B1)}\right) &= k\left\{\mu\left[F(L-B)-F(0)\right]-\sigma^2\left[f(L-B)-f(0)\right]\right\} \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M,\widetilde{BC}^{(B1)}\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M,\tilde{Z}\right)k\left[F(L-B)-F(0)-(L-B)f(L-B)\right]
\end{aligned}$$

A.4　モデル B：(B2) の場合

ケース (B2) における株主の CF は (A2) のものと同じであるから，$\tilde{Q}_{LS}^{(A2)}$ の結果を用いる。ケース (B2) の債権者の CF は

$$\tilde{Q}_{LB}^{(B2)} = L\tilde{b}_{[\Phi,\infty)} + (1-\tau)\tilde{Z}\tilde{b}_{[V_U+L-B,\Phi)} + \tau(V_U+L-B)\tilde{b}_{[V_U+L-B,\Phi)} + \tilde{Z}\tilde{b}_{[0,V_U+L-B)} - k\tilde{Z}\tilde{b}_{[0,L-B)}$$

と表記でき，この期待値と共分散は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\tilde{Q}_{LB}^{(B2)}\right) &= L\left[1-F(\Phi)\right] + \tau(V_U+L-B)\left[F(\Phi)-F(V_U+L-B)\right] \\
&\quad +\mu\left[(1-\tau)F(\Phi)+\tau F(V_U+L-B)-F(0)\right]-\sigma^2\left[(1-\tau)f(\Phi)+\tau f(V_U+L-B)-f(0)\right] \\
&\quad + k\left\{\mu\left[F(L-B)-F(0)\right]-\sigma^2\left[f(L-B)-f(0)\right]\right\} \\
\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M,\tilde{Q}_{LB}^{(B2)}\right) &= \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_M,\tilde{Z}\right)\{(1-\tau)F(\Phi)+\tau F(V_U+L-B)-F(0) \\
&\quad - k\left[F(L-B)-F(0)-(L-B)f(L-B)\right]\}
\end{aligned}$$

である。節税効果の CF はケース (A1) と同じもので $\widetilde{TS}^{(A1)}$ である。倒産コストの CF はケース (B1) と同じもので $\widetilde{BC}^{(B1)}$ を用いる。

参考文献

[1] Baron, David P., 1975. “Firm Valuation, Corporate Taxes, and Default Risk,” *Journal of Finance*, Vol.30, No.5 (December, 1975) pp.1251-1264.

[2] Baxter, Nevins D., 1967. “Leverage, Risk of Ruin and the Cost of Capital,” *Journal of Finance*, Vol.22, No.3 (September, 1967), pp.395-403.

[3] Chen, Andrew H., 1978. “Recent Developments in the Cost of Debt Capital,” *Journal of Finance*, Vol.33, No.3 (June, 1978), pp.863-877.

[4] Chen, Andrew H., and E. Han Kim, 1979. “Theories of Corporate Debt Policy: A Synthesis,” *Journal of Finance*, Vol.34, No.2 (May, 1979), pp.371-384.

[5] Haugen, Robert A., and Lemma W. Senbet, 1978. “The Insignificance of Bankruptcy Costs to the Theory of Optimal Capital Structure,” *Journal of Finance*, Vol.33, No.2 (May, 1978), pp.383-393.

[6] 金子隆. 1987. 「企業の借入需要関数のミクロ的基礎」『三田学会雑誌』第 80 巻 5 号 (1987 年 12 月). 689-706 頁.

[7] Kim, E. Han, 1978. "A Mean-Variance Theory of Optimal Capital Structure and Corporate Debt Capacity," *Journal of Finance*, Vol.33, No.1 (March, 1978), pp.45-63.

[8] Kraus, Alan, and Robert H. Litzenberger, 1973. "A State-Preference Model of Optimal Financial Leverage," *Journal of Finance*, Vol.28, No.4 (September, 1973), pp.911-922.

[9] Leland, Hayne E., 2007. "Financial Synergies and the Optimal Scope of the Firm: Implications for Mergers, Spinoffs,and Structured Finance," *Journal of Finance*, Vol.62, No.2 (April, 2007), pp.765-807.

[10] Luciano, Elisa, and Giovanna Nicodano, 2014. "Guarantees, Leverage, and Taxes," *Review of Financial Studies*, Vol.27, No.9 (September, 2014), pp.2736-2772.

[11] Miller, Merton H., 1977. "Debt and Taxes," *Journal of Finance*, Vol.32, No.2 (May, 1977), pp.261-275.

[12] Modigliani, Franco, and Merton H. Miller, 1958. "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment," *American Economic Review*, Vol.48, No.3 (June, 1958), pp.261-297.

[13] Modigliani, Franco, and Merton H. Miller, 1963. "Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction," *American Economic Review*, Vol.53, No.3 (June, 1963), pp.433-443.

[14] Scott, James H., 1976. "A Theory of Optimal Capital Structure," *Bell Journal of Economics*, Vol.7, No.1 (Spring, 1976), pp.33-54.

[15] Talmor, Eli, Robert Haugen, and Amir Barnea, 1985. "The Value of the Tax Subsidy on Risky Debt," *Journal of Business*, Vol.58, No.2 (April, 1985), pp.191-202.

[16] 富田信太郎・池田直史・辻幸民. 2015. 「負債構成と資本構成：銀行負債の再交渉に着目して」『金融経済研究』第 37 号 (2015 年 3 月). 19-40 頁.

[17] 辻幸民. 2016. 『企業金融の経済理論 [改訂版]』(創成社).

[18] Turnbull, Stuart M., 1979. "Debt Capacity," *Journal of Finance*, Vol.34, No.4 (September, 1979), pp.931-940.