

ポートフォリオの事後的パフォーマンス

辻幸民

2023 年 12 月 26 日『三田商学研究』(第 66 巻 4 号)2 版

概要

本稿ではポートフォリオの事後的パフォーマンスをシミュレーションにより調べる。シミュレーションとして無作為抽出により多数の銘柄組合せを作成し、その銘柄組合せから 3 種類のポートフォリオを構築する。銘柄データから利回り平均と分散共分散を推定し、この推定値を基に接点ポートフォリオと最小分散ポートフォリオを作成する。さらに等ウェイトポートフォリオも考察に加える。また事後的パフォーマンスであるから、構築時点以降の保有形態に応じて 2 種類の計算方法を考慮する。1 つは構築時点以降何もせずに継続保有する形、もう 1 つは定期的にリバランスする保有形態である。3 種類のポートフォリオを 2 種類の保有形態で評価して、計 6 種類の事後的パフォーマンスを問題にする。

キーワード：接点ポートフォリオ、最小分散ポートフォリオ、等ウェイトポートフォリオ、実現収益率、継続保有、リバランス

1 問題意識

本稿ではポートフォリオの事後的パフォーマンスをシミュレーションを通じて調べてみたい。ここでいう事後的パフォーマンスとは、ポートフォリオ構築時点以降にそれが稼ぎ出す利回りをその平均と標準偏差の観点から評価する。またシミュレーションとは、無作為抽出によって多数の銘柄組合せを作成することをいう。銘柄組合せ 1 つ 1 つについて複数のポートフォリオを構築できるから、その事後的パフォーマンスを計測すれば、多数のポートフォリオの事後的パフォーマンスのデータを得ることができる。それぞれに多数の数値を見ることで、何か特徴はないものかどうかを検討する。

なぜポートフォリオの事後的パフォーマンスを問題にするのか。ポートフォリオ理論といえば、Markowitz(1952)等に代表される 2 パラメタアプローチ(平均・分散接近)が今日のファイナンス理論の最も代表的なツールであるかのように見える。株式等の資産あるいはそれを組合せたポートフォリオを、利回りの平均と標準偏差でもって評価するのが 2 パラメタアプローチであるが、平均や標準偏差等の統計パラメタは未知であり、未知パラメタは標本統計量でもって推定される値が用いられる。ポートフォリオ理論によりポートフォリオを構築するには、株式の個別銘柄の利回り平均や標準偏差および銘柄相互の共分散を推定する必要がある、これら推定値に基づいてポートフォリオを構成する際の投資比率が算出される。2 パラメタアプローチにおける最適ポートフォリオは有効フロンティア上に存在する接点ポートフォリオで、これが危険資産だけを対象にする場合の最

も好ましい組合せと考えられている。個別銘柄の推定値を使って構築される接点ポートフォリオは、ポートフォリオ理論の観点からは最適であろうが、構築されたポートフォリオは構築時点以降に実際の利益や損失を実現させる。構築時点以降の利益・損失を利回りで表現したとき、接点ポートフォリオの利回りの事後的パフォーマンスは他のポートフォリオを優越しているのであろうか。これがポートフォリオの事後のパフォーマンスを調べようとする問題意識である。

接点ポートフォリオは理論としては事前的に最適であろうが、事前で最適なものが事後的にも最善である保証はまったくない。標本統計量の推定値が予想どおり実現する保証がまったくないのと同様である。接点ポートフォリオの事後のパフォーマンスが最善でなかったとしても何の不思議はない。それならば、事後のパフォーマンスの優れたポートフォリオは何か。そもそも優位性のあるポートフォリオは存在するのか。これはシミュレーションを通じて多数のポートフォリオを実験的に作成して評価するしかないであろう。

事後のパフォーマンスを数値として捉える尺度は、ポートフォリオ構築時点以降の実際の売買から獲得される利回りである。それではその利回りをどのように計算すればよいか。構築時点以降の実際の売買とは、一度購入した後に何もせずに継続保有するという形 (buy and hold) から、保有株式銘柄を定期的にリバランスする形までいくつかの形態が考えられる。その保有形態に応じて事後のパフォーマンスを測る利回りの計算方法は異なるものとなろう。この点についてキチンと説明した議論を筆者は寡聞にして聞いたことがないので、本稿ではまず利回りの計算方法に関する考察から始めよう。これが次の第2節である。

利回りの概念整理を踏まえて、第3節ではポートフォリオの事後のパフォーマンスを検討する。ポートフォリオを何か1つ構築した後に、何もせずにそのまま継続保有を想定する場合と毎月のリバランスを想定する場合とで、各々どうやってポートフォリオの利回りを計算すべきなのかを明らかにする。そして、この利回りの値は複数時点で計算されるので、その平均と標準偏差がそのポートフォリオの事後のパフォーマンスとなる。

第4節ではポートフォリオの事後のパフォーマンスを実際に計算してみる。その手段がシミュレーションであり、その実行方法を説明した後に、様々なポートフォリオの事後のパフォーマンスを計測する。構築されるポートフォリオは、接点ポートフォリオと最小分散ポートフォリオ、そして等ウェイトポートフォリオの3種類である。これらポートフォリオについて、構築時点以降に継続保有する場合とリバランスする場合とで計算される利回り平均と標準偏差を算出する。すなわち、3種類のポートフォリオと2種類の保有形態でもって、計6種類の事後のパフォーマンスを対象にするが、これら6種類の事後のパフォーマンスについて、相互の優劣はどうなっているか検討する。100万を超えるポートフォリオの銘柄組合せを作って集計すると、実はこれら6種類の中で特段秀でたものは存在しない。どれもそのときどきで勝ったり負けたりである。

第5節は結びである。事後のパフォーマンスの優れたポートフォリオは存在しないという本稿の計測結果が、1つの重要な帰結であろうと筆者は考えている。ポートフォリオ理論では最適とされるポートフォリオが、事後的にはまったく最善ではないし、最小分散ポートフォリオとして、理論では最小リスクであるはずのものが、事後のパフォーマンスで見るとリスク最小とはいえない。対して、等ウェイトポートフォリオはその理論的根拠が薄弱であるにもかかわらず、接点ポートフォ

リオや最小分散ポートフォリオにまったく引けを取らず、これらと同等、あるいはそれ以上のパフォーマンスを見せる。等ウェイトポートフォリオの投資比率は、 n 銘柄でポートフォリオを構築するなら $1/n$ であり、個別銘柄の平均や標準偏差等をわざわざ推定する手間暇も必要ないし、負荷の高い数値計算を実行する必要もない。いわば当て推量でポートフォリオを構築するのと事実上それほど大差ないのであるが、それでもポートフォリオ理論と変わらぬパフォーマンスを見せるのである。様々なポートフォリオの中で、特段秀でたパフォーマンスを記録するものがない以上、ポートフォリオ構築の際に重要になるのは、その構築コストの大小ということになるのではないか。これが本稿の分析から引き出される結論である。

2 利回りについての若干の考察

金融資産のパフォーマンスを測る最も基本的な尺度が利回りであるが、この「利回り」という概念について、筆者の立場というか考え方をまとめておきたい。筆者のいう利回りとは、収益率と同義の言葉である。すなわち、取得コスト 1 円が 1 年当りに稼ぎ出す収益のことを本稿では利回りと称している。

簡単な例をあげて説明を始めよう。今株式 1 株を 700 円で購入し、1 年半後に 900 円で売却したとしよう。この株式は年 2 回の配当があり、半年毎に配当金が支払われるものとする。保有期間の 1 年半の間に 3 回の配当支払があるから、その 1 回目と 2 回目の配当金が 1 株 15 円、3 回目の配当金が 1 株 20 円とする。このとき、1 年半保有することによる利回りは、

$$\frac{\frac{2}{3}(15 + 15 + 20) + \frac{900-700}{1.5}}{700} = 0.2381$$

として計算される。上式の分子第 1 項は配当金の計算である。1.5 年 3 回の配当金の合計に $\frac{2}{3}$ を乗じることで、1 年当り (2 回分) の配当金に換算している。また上式の分子第 2 項は、キャピタルゲイン (ロス) の計算である。文字どおりのキャピタルゲインは 200 円 ($= 900 - 700$) であるが、これを 1.5 で除すことでやはり 1 年当りの値に換算している。このように 1 年当りの収益を分子にし、分母は取得コスト 700 円とすることで 1 円当りの収益、つまり利回りが求められる。

株式の購入価格と売却価格とから上記のように計算される利回りのことを、以下の議論では混乱を避けるため売買利回りと称し、 $Y(1.5)$ という記号で表す。数字の 1.5 は 1 年半という保有期間である。一般的な保有期間を L とすると、 L は 1 年を 1 とする (小数を含み得る) 正の数とする。保有期間 L の売買利回り $Y(L)$ をあらためて次のように定義しよう。

$$Y(L) = \frac{\frac{1}{L}(L \text{ 期間中の配当金合計額} + P_L - P_0)}{P_0}$$

この式では購入時点を 0 時点、売却時点を L 時点として考えている。 P_0 は購入時点の株価で、 P_L は売却時点の株価である。分子では配当金合計額とキャピタルゲインの和を L で除すことで 1 年当りの収益の金額に換算している。

ところで、この売買利回りの計算式は「利子が利子を生む」点を考慮してないので、この値は単利の利回りである。逆に「利子が利子を生む」ことを複利というのが、金融の世界、特に貸借や債券

の取引では複利の利回りもよく用いられる。ところが株式については、利回りは単利が標準形になっていて、複利が計算されることはあまりないように思う。株式の売買利回りについて複利を計算するには次のようにすれば算出はできる。ただしそのためには、購入時点や売却時点に加え、配当金の受取時点もより細かく規定する必要がある。

1年という時間を1で(保有期間1年半を $L = 1.5$ で)表現するのは同じだが、ここの複利の計算では、0時点については(購入時点ではなく)直前の配当支払日直後の時点として設定されるのが(前の単利の計算式とは)異なる。そして、0時点以降半年毎の3回の配当金を $d_{0.5}$ と d_1 , $d_{1.5}$ のように表す。ここの例として、株式を購入するのが2017年11月14日であり、最初の配当金が2018年3月31日であるなら、^{*1} その間の経過日数は137日となって、これを1年365日を1という大きさに換算すると、137日は0.375年という値になる。つまり株式購入後の0.375年後に1回目の配当金を受取る。次の2回目の配当金はその半年後であるから、0.375に0.5を加えることで、購入日から数えて0.875年後が2回目の配当金の支払日(2018年9月30日)である。同様に3回目の配当金(2019年3月31日)は購入日から1.375年後である。株式の購入日2017年11月14日から保有期間が1.5年となるような株式の売却日は2019年5月16日である。なおこれら年月日は実際には休日で取引できない可能性があるが、休日かどうかは説明の単純化のため無視して、すべて取引可能であるとしよう。

株式保有を開始した2017年11月14日は、前回の配当金支払日の直後(0時点)から数えれば0.125年であるから、そのときの株価を $P_{0.125}$ で表記する。1.5年後の売却日2019年5月16日は、0時点から数えれば1.625年後であるから、売却時点の株価を $P_{1.625}$ とする。0.125年の時点から1.625年の時点までの1.5年間保有の株式売買利回りを複利で計算したいなら、複利利回りを ρ とすると、

$$P_{0.125} = \frac{d_{0.5}}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times 0.375}} + \frac{d_1}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times 0.875}} + \frac{d_{1.5}}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times 1.375}} + \frac{P_{1.625}}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times 1.5}}$$

を満たす ρ を計算する必要がある。前の数値例を使うなら上式は次のように書き換えられる。

$$700 = \frac{15}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times 0.375}} + \frac{15}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times 0.875}} + \frac{20}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times 1.375}} + \frac{900}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times 1.5}}$$

この式を満たす ρ の値は0.2194で、これが複利の売買利回りである。^{*2}

^{*1} もう少し厳密にいうと、3月31日には配当を受取る権利が確定するだけで、本当に配当金が支払われるのはさらに2か月ほど先になる。3月31日には配当金の金額すら確定してないことも少なくない。さらにいえば、3月31日に権利確定する配当金を受取るためには、その3営業日前に株式を市場で購入(約定)する必要がある。本稿では説明を単純にするためにこれらに関する説明をすべて端折っていて、あたかも3月31日に配当金が支払われ、株主はそれを受取るものとみなしている。現実に存在する、約定日と決済日との差異、あるいは実際の配当金の授受までの時差は、本質的には些細な問題で無視して構わないであろう。

^{*2} 年2回の利子を支払う債券の半年複利の利回りは、形式的には次のような式を満たす ρ の値である。額面を M 、表面利率 c とすると1年に cM 円の利子が支払われ、残存 T 年の債券価格を P_0 とすると、

$$P_0 = \frac{\frac{cM}{2}}{1 + \frac{\rho}{2}} + \frac{\frac{cM}{2}}{(1 + \frac{\rho}{2})^2} + \cdots + \frac{\frac{cM}{2}}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times T}} + \frac{M}{(1 + \frac{\rho}{2})^{2 \times T}}$$

というのがよく見る形の式であろう。半年毎の1回のキャッシュフローは $\frac{cM}{2}$ であり、 T が自然数であるなら、残存

利回りを単利で計算するか複利で計算するか。この数値例では単利 23.8% と複利 21.9% であるから、小数第 2 位で差異が発生しその大きさは決して看過できるものではない。誤差とみなして無視するには少々大きい差異であるが、にもかかわらず、株式の利回りには単利と複利の違いをあまり意識しないのはなぜか。筆者の意見では、株式の利回りにはその差異以上に別の問題が潜んでいるので、利回りの計算方法として複利と単利を峻別してもあまり実用的意味がないからと考えている。それでは「別の問題」とは何か。一言でいうなら、それはデータの「換算」に関する手法の問題ということになる。

株式の利回りを売買利回りのような株式売買に伴う収益率として計算したいなら、その売買日の購入株価と売却株価、そして期間中の配当金が必須なデータである。ただ当然のことながら、保有期間がいつであるかに応じて、売買利回りはいかような値にもなり得る。ところで、株式の利回りには株式の銘柄特性を表す尺度として、その平均や標準偏差・分散の値が重要な役割を果たす機会も多い。ポートフォリオを構築する際とか WACC(平均資本コスト) を推定する際、株式利回りの統計量が問題になる。株式利回りの平均や分散といった統計量は、データから標本推定値を計算することでその値が推定される。ある 1 つの銘柄の株式利回りを多数の異なる時点について集めれば、その集合はその銘柄の株式利回りのサンプルを構成するデータとなる。すなわち、株式の銘柄特性を推定するためのデータとしての株式利回りには、任意の日々の株価そのものより、月次利回りデータの方が有用である場合が多い。本稿では複数月にわたって集められた月次利回りの値の集合を月次利回りデータと称する。それでは、月次利回りデータを用いて、元々の売買利回りを算出することはできるのか。これらの「換算」について次に検討したい。

株式の月次利回りを形式的に定義しておこう。 i 番目の銘柄に関する t 時点の株価を $p_{i,t}$ で表す。第 i 銘柄の i というのは、次節のポートフォリオの議論で複数銘柄の株式を扱うのに必要となる記号であるが、この節では 1 銘柄の株式の話であるから、この i を無視して欲しい。また月次データにおける t 時点での t は、前の株価 P_L の L と異なり、値にはゼロと自然数が想定され、その値は具体的な年月を指し示す。 $t = 0$ は例えば「2017 年 11 月」を、 $t = 1$ は「2017 年 12 月」を、 $t = 2$ は「2018 年 1 月」… を指し示すという具合である。 t の値が 2018 年 5 月を指すなら、 t 時点の株価 $p_{i,t}$ とは 2018 年 5 月の月末終値のことである(株価の記号も P ではなく p を使う)。その 1 か月前の $t - 1$ 時点の月末終値を $p_{i,t-1}$ 、 t 時点で受取る(月末に権利確定する)配当金を $d_{i,t}$ とすると、

T 年で支払われる利子の回数は $2 \times T$ である。この P_0 は残存期間がちょうど T 年となる時点での価格、もっといえば、直前の利子が支払われた直後の時点における受渡価格の金額である。しかし 0 時点以外の時点の価格、つまり利子支払日直後以外の、任意の $t (\neq 0)$ 時点における債券の受渡価格はどのように定式化すべきか。この受渡価格を P_t と表し、直前の利子支払日以降、1 年を 1 とした(小数も含み得る)正の数 t という長さの時間が経過したとする。 P_t は P_0 に比べて t 年分将来にズレた将来価値と考える。今、半年分 ($t = 0.5$) の将来価値が $(1 + \frac{r}{2}) = (1 + \frac{r}{2})^{2 \times 0.5}$ であるから、任意の t という時間の差異は $(1 + \frac{r}{2})^{2t}$ であって、 $P_t = (1 + \frac{r}{2})^{2t} P_0$ が成立する。これによって、

$$P_t = \frac{\frac{cM}{2}}{(1 + \frac{r}{2})^{2(0.5-t)}} + \frac{\frac{cM}{2}}{(1 + \frac{r}{2})^{2(1-t)}} + \cdots + \frac{\frac{cM}{2}}{(1 + \frac{r}{2})^{2(T-t)}} + \frac{M}{(1 + \frac{r}{2})^{2(T-t)}}$$

に変形できる。もう 1 点の差異は、債券の場合、最後の利子支払と満期返済とが同時点であるのが普通だが、株式の場合は、最後の配当金支払の時点が売却時点と異なっているのが普通であろう。以上のことから、本文にあるような複利の計算式が導出できる。

	A	C	E	K	L	M	O	P
1	年月	名称	終値	配当金	月次利回り	売買利回り	累積利回り	
221	2016/03	トヨタ自動車	5952	110	0.0279803			
222	2016/04	トヨタ自動車	5654	0	-0.0500672			
223	2016/05	トヨタ自動車	5783	0	0.0228157	-0.3034635	-0.3056290	
224	2016/06	トヨタ自動車	5052	0	-0.1264050			
225	2016/07	トヨタ自動車	5894	0	0.1666667			
226	2016/08	トヨタ自動車	6238	0	0.0583644			
227	2016/09	トヨタ自動車	5779	100	-0.0575505			
228	2016/10	トヨタ自動車	6079	0	0.0519121			
229	2016/11	トヨタ自動車	6649	0	0.0937654			
230	2016/12	トヨタ自動車	6878	0	0.0344413			
231	2017/01	トヨタ自動車	6584	0	-0.0427450			
232	2017/02	トヨタ自動車	6365	0	-0.0332625			
233	2017/03	トヨタ自動車	6042	110	-0.0334643			
234	2017/04	トヨタ自動車	6035	0	-0.0011586			
235	2017/05	トヨタ自動車	5932	0	-0.0170671	0.0620785	0.0625132	
236	2017/06	トヨタ自動車	5893	0	-0.0065745			
237	2017/07	トヨタ自動車	6234	0	0.0578653			
238	2017/08	トヨタ自動車	6183	0	-0.0081809			
239	2017/09	トヨタ自動車	6710	100	0.1014071			
240	2017/10	トヨタ自動車	6990	0	0.0417288			
241	2017/11	トヨタ自動車	7044	0	0.0077253			
242	2017/12	トヨタ自動車	7213	0	0.0239920			
243	2018/01	トヨタ自動車	7480	0	0.0370165			
244	2018/02	トヨタ自動車	7235	0	-0.0327540			
245	2018/03	トヨタ自動車	6825	120	-0.0400829			
246	2018/04	トヨタ自動車	7181	0	0.0521612			
247	2018/05	トヨタ自動車	6921	0	-0.0362067	0.2038098	0.2049302	

図1 エクセルシートその1

次のように定義される利回りが t 時点の月次利回り $r_{i,t}$ である。

$$r_{i,t} = \frac{d_{i,t} + p_{i,t} - p_{i,t-1}}{p_{i,t-1}} \quad (1)$$

これは、前月末に購入し1か月間保有して当月末に売却する場合の売買利回りである。 T 月間にわたって $r_{i,t}$ の値を T 個集めれば (T は正の整数)、それはサンプルサイズ T の月次利回りデータである。月次利回りデータを例示したのが図1である。 $t = 1, \dots, T$ に該当する年月が2016年3月から2018年5月である ($T = 27$)。 $p_{i,t}$ がシートE列の「終値」、 $d_{i,t}$ がシートK列の「配当金」、 $r_{i,t}$ がシートL列の「月次利回り」に相当する。なお「配当金」であるが、わが国では毎月配当金を支払うような株式銘柄は皆無であり、サンプルを構成する月次利回りの中で多くの $d_{i,t}$ はゼロとなる。3月決算の企業であれば、ほとんどの企業について t が3月か9月の時点のときだけ $d_{i,t}$ に何か数値が入り、他の月はゼロである。

今、株式売買を月末の終値だけで売買するものと擬制したとして、購入価格を0時点、売却時点を T 時点とする。0時点を意味する年月の月末に購入し、 T 時点の年月の月末に売却するのである。保有期間は T か月プラス1日であるが、このプラス1日は無視して、この株式売買の保有期

間は T か月とする。 T 月間の売買利回りをあらためて定義すると

$$Y_i(\frac{T}{12}) = \frac{\frac{12}{T}(D_i(T) + p_{i,T} - p_{i,0})}{p_{i,0}} \quad (2)$$

と書ける。ここの $D_i(T)$ は T 月間の配当金合計で、 $D_i(T) = \sum_{t=1}^T d_{i,t}$ である。 $Y_i(\frac{T}{12})$ の $\frac{T}{12}$ は前の $Y(L)$ の L に相当し、 T 月間を 1 年 1 という大きさに換算している。そして式分子にはその逆数を乗じて 1 年当り収益を求めている。なお以下でも利回りを表す記号にカッコ付きで (L) と記す場合、その利回りは 1 年 1 で表した期間 L に関する、1 年単位の (1 年当り収益の) 利回りであることを表現している。

ここで問題は、この売買利回り $Y_i(\frac{T}{12})$ を、該当期間のサンプルサイズ T の月次利回りデータ $r_{i,1}, \dots, r_{i,T}$ から算出することはできるのか。数式の形から明らかであろうが、厳密には無理なのである。仮にもし期間中の配当金がすべてゼロであるなら、

$$(1 + r_{i,1}) \cdots (1 + r_{i,T}) = \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} \cdots \frac{p_{i,T}}{p_{i,T-1}} = \frac{p_{i,T}}{p_{i,0}} = 1 + \frac{T}{12} Y_i(\frac{T}{12})$$

という関係が成立しているから、売買利回り $Y_i(\frac{T}{12})$ は月次利回りデータ $r_{i,1}, \dots, r_{i,T}$ から厳密に計算できる。しかし、期間中に配当金が 1 つでも入り混むなら、このような式展開は不可能になって、売買利回りと月次利回りデータとの関係は不明確となる。このとき両者の差異はどれくらいか。いい換えると、次式のように月次利回りデータから算出される $H_i(\frac{T}{12})$ の値

$$H_i(\frac{T}{12}) = [(1 + r_{i,1}) \cdots (1 + r_{i,T}) - 1] \frac{12}{T} \quad (3)$$

は本当の売買利回り $Y_i(\frac{T}{12})$ とどれくらいの差異があるのか。この差異が小さければ、月次利回りデータから得られる $H_i(\frac{T}{12})$ は売買利回り $Y_i(\frac{T}{12})$ の近似値とみなすことができよう。なお以下では、 $H_i(\frac{T}{12})$ のことを累積利回りと呼ぶ。月次利回りデータを $(1 + r_{i,1}) \cdots (1 + r_{i,T})$ という形の積で累積を取っているからである。

図 1 では、 $Y_i(\frac{T}{12})$ と $H_i(\frac{T}{12})$ という 2 つの利回りを実際に計算している。図 1 の「売買利回り」が $Y_i(\frac{T}{12})$ で、「累積利回り」が $H_i(\frac{T}{12})$ である。図 1 にあるのは、2016 年 5 月の行の数値であるなら、 $t = 1$ 時点を 2015 年 6 月、 $t = T$ 時点を 2016 年 5 月とする保有期間 1 年 ($T = 12$) を想定し、 $Y_i(\frac{T}{12})$ は、2015 年 5 月末の株価と 2016 年 5 月末の株価およびその間の配当金から計算される利回りである。また $H_i(\frac{T}{12})$ は 2015 年 6 月から 2016 年 5 月の 1 年間の月次利回りデータから計算される。図 1 の 2017 年 5 月の行であるなら、 $t = 1$ 時点を 2016 年 6 月、 $t = T$ 時点を 2017 年 5 月として、同様の計算をして得られた $Y_i(\frac{T}{12})$ と $H_i(\frac{T}{12})$ の値である。

T 時点をより多数の時点、1999 年 5 月から 2018 年 5 月まで毎年 5 月の 20 時点について、そして保有期間の方も「1 年間 ($T = 12$)」だけでなく、「2 年間 ($T = 24$)」「3 年間 ($T = 36$)」「5 年間 ($T = 60$)」の 4 ケースを計算したのが表 1 である。表の「年月」は保有期間の最終時点を意味していて、例えば「年月」が「1999/05」の「1 年間 ($T = 12$)」であれば、1998 年 6 月から 1999 年 5 月までの保有期間を意味している。ここのデータベースの初期時点は 1998 年 1 月であるから、「1999/05」では保有期間が 2 年以上だと計算不可能なので空欄になっている。また「年月」が

年月	1 年間 ($T = 12$)		2 年間 ($T = 24$)		3 年間 ($T = 36$)		5 年間 ($T = 60$)	
	$Y_i(1)$	$H_i(1)$	$Y_i(2)$	$H_i(2)$	$Y_i(3)$	$H_i(3)$	$Y_i(5)$	$H_i(5)$
1999/05	-0.05160	-0.05164						
2000/05	0.52136	0.52252	0.21968	0.22195				
2001/05	-0.13599	-0.13612	0.15774	0.15764	0.08183	0.08245		
2002/05	-0.18619	-0.18610	-0.14796	-0.14844	0.02446	0.02350		
2003/05	-0.14572	-0.14559	-0.15190	-0.15230	-0.13231	-0.13308	-0.02531	-0.02652
2004/05	0.41434	0.41620	0.10192	0.10500	-0.00722	-0.00506	0.05746	0.05906
2005/05	-0.01875	-0.01955	0.19406	0.19425	0.06057	0.06212	-0.03399	-0.03317
2006/05	0.55959	0.55984	0.26063	0.26467	0.38112	0.38862	0.09495	0.10123
2007/05	0.25126	0.25212	0.47280	0.47655	0.29792	0.30497	0.25168	0.26341
2008/05	-0.24521	-0.24612	-0.02530	-0.02803	0.16062	0.15747	0.20769	0.20889
2009/05	-0.27188	-0.27190	-0.22260	-0.22555	-0.09893	-0.10424	0.01625	0.01022
2010/05	-0.12730	-0.12851	-0.18110	-0.18273	-0.17055	-0.17388	-0.00440	-0.01314
2011/05	0.05183	0.05285	-0.04134	-0.04123	-0.11018	-0.11064	-0.06998	-0.07388
2012/05	-0.09118	-0.09166	-0.02134	-0.02183	-0.05468	-0.05552	-0.10616	-0.10850
2013/05	1.00658	1.02113	0.40441	0.41794	0.29675	0.31096	0.03631	0.04530
2014/05	-0.01398	-0.01487	0.48947	0.49554	0.26137	0.26952	0.12341	0.13189
2015/05	0.52821	0.53335	0.24617	0.25527	0.65998	0.68434	0.35848	0.38395
2016/05	-0.30346	-0.30563	0.03749	0.03236	0.01930	0.01629	0.18224	0.18512
2017/05	0.06208	0.06251	-0.13087	-0.13111	0.04577	0.04376	0.24783	0.25049
2018/05	0.20381	0.20493	0.13557	0.14013	-0.04041	-0.03701	0.06376	0.06857

表 1 売買利回り $Y_i(\frac{T}{12})$ と累積利回り $H_i(\frac{T}{12})$ (例：トヨタ自動車)

「2000/05」の「1 年間 ($T = 12$)」は、1999 年 6 月から 2000 年 5 月までの保有期間を意味し、「2 年間 ($T = 24$)」の保有期間は 1998 年 6 月から 2000 年 5 月までである。

表 1 を見て分かることは、保有期間が 1 年間あるいは 2 年間ぐらいなら、ほとんどの場合で小数点第 3 位で差異が発生するから、累積利回りの $H_i(\frac{T}{12})$ は売買利回りの $Y_i(\frac{T}{12})$ を概ね近似しているとみなせそうである。しかし保有期間が 3 年間となると、小数第 2 位で差異の発生するケースが 18 個中 6 個に増え、さらに保有期間が 5 年間になると半数のケース (16 の 8) で差異が発生し、近似というには少々怪しくなってくる。とはいえ、この表 1 の結果の範囲内では、両者にそれほど大きな乖離が見られないから、月次利回りデータから計算される累積利回りでもって売買利回りの近似値とみなすことにそれほど無理はなかろう。ただし保有期間 3 年超のケースなら、少々差異が発生し得ることは留意する必要があるだろう。そして、こういう事情があるからこそ、株式利回りの計算に際し、単利と複利を峻別することの意義は希薄であるように思う。

株式利回りに関するいろいろな「換算」には、より深刻な問題も存在する。利回りのそもそもの定義は、取得コスト 1 円が稼ぎ出す 1 年当り収益のことであったから、利回りの概念上の単位時間は 1 年単位のはずである。ところが、月次利回りの値は 1 か月間株式を保有する際の売買利回りであるから、当然のこと 1 か月単位の数字となる。これを 1 年単位に換算するにはどうすればよいか。月次利回りデータを用いる理由は、株式の銘柄特性としての利回り平均や標準偏差・分散といった統計量を推定するのに便利だからであるが、月次利回りデータからその標本統計量を計算しても当然その値は 1 か月単位の数字なのであって、1 年単位を原則とする他の資産 (例えば債券) の

利回りと単純比較はできない。

月次利回りの平均と分散の標本統計量を確認しておこう。サンプルサイズ T の月次利回りデータから計算される、標本平均 $\bar{r}_i$ と標本分散 v_i^2 は

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t} \quad v_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \bar{r}_i)^2$$

であるが、これらは1か月単位の数字である。これを1年単位とする利回りと比較できるよう換算するための方法は、次のように、1か月単位の数字に12を乗じる変換が半ば慣例化している。

$$\bar{R}_i\left(\frac{T}{12}\right) = 12 \times \bar{r}_i \quad V_i^2\left(\frac{T}{12}\right) = 12 \times v_i^2 \quad (4)$$

1年単位に換算された利回りの標本平均を $\bar{R}_i\left(\frac{T}{12}\right)$ 、標本分散を $V_i^2\left(\frac{T}{12}\right)$ という具合に記そう。

12を乗じるという上記の変換方法の根拠は、恐らくは「月利0.5%は年利6%(=0.5×12)と同義」という実務常識にあるように思う。ここの「月利」とは1か月単位の利子率、「年利」とは1年単位の利子率のことをいい、単利が前提の話である。^{*3} 1年未満の期間に関する利子額の計算には、日割り計算にて1年間の利子額から該当期間の利子額を按分するというのが一般的な実務慣行であり、これを利回りについて当てはめたのが「月利0.5%は年利6%と同じ」という話であろう。この変換方法のもう少し理論的な根拠としては、多少の無理もあるが、次のような議論が考えられる。

月次利回り $r_{i,t}$ を、連続した月々12個について集めたものが1年間の利回りを構成するから、 $R_i = \sum_{t=1}^{12} r_{i,t}$ で定義される R_i は1年単位の利回りであると考えられる。また月次利回り $r_{i,t}$ の確率分布は、平均が $E[r_{i,t}] = \mu_i$ 、分散が $\sigma_i^2 = E[(r_{i,t} - \mu_i)^2]$ であるとする。すなわち、各月の月次利回りは同一の確率分布で、月が異なっても平均や分散は共通の値 μ_i と σ_i^2 である (μ_i と σ_i は t に依存しない)。さらに月次利回りの確率分布は独立とする。同一かつ独立な確率分布のことを i.i.d.(identical and independent distribution) と称するが、月次利回りが i.i.d. に従うなら、次のような式展開が可能である。

$$E[R_i] = E\left[\sum_{t=1}^{12} r_{i,t}\right] = \sum_{t=1}^{12} E[r_{i,t}] = 12 \times \mu_i$$

$$E[(R_i - E[R_i])^2] = E\left[\left(\sum_{t=1}^{12} (r_{i,t} - \mu_i)\right)^2\right] = \sum_{t=1}^{12} E[(r_{i,t} - \mu_i)^2] = 12 \times \sigma_i^2$$

最初の式が平均で、次の式が分散の式展開である。確率分布が i.i.d. であるなら、項の和が項数の積に、また項の和の2乗が2乗の項の和に、さらに2乗の項数の積に書き直せる。いうまでもないだろうが、平均 $E[R_i]$ の標本統計量が $\bar{R}_i\left(\frac{T}{12}\right)$ 、平均 μ_i の標本統計量が $\bar{r}_i$ 、分散 $E[(R_i - E[R_i])^2]$ の標本統計量が $V_i^2\left(\frac{T}{12}\right)$ 、分散 σ_i^2 の標本統計量が v_i^2 であるから、これらを代替すれば(4)式の変換方法に帰着する。

^{*3} ここで登場する「利子率」は、本稿のこれまで議論した「利回り」と事実上同じ意味であったり、あるいは状況によって異なる意味になったりもする。これについては別の機会に議論を整理している。本稿の場合の利子率は利回りと同義に考えて差し支えない。

$\ln(1+x)$	x	$x - \frac{x^2}{2}$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$
-0.510826	-0.4	-0.48000	-0.501333	-0.507733
-0.356675	-0.3	-0.34500	-0.354000	-0.356025
-0.223144	-0.2	-0.22000	-0.222667	-0.223067
-0.162519	-0.15	-0.16125	-0.162375	-0.162502
-0.133531	-0.125	-0.13281	-0.133464	-0.133525
-0.105361	-0.1	-0.10500	-0.105333	-0.105358
-0.077962	-0.075	-0.07781	-0.077953	-0.077961
-0.051293	-0.05	-0.05125	-0.051292	-0.051293
-0.010050	-0.01	-0.01005	-0.010050	-0.010050
0.009950	0.01	0.00995	0.009950	0.009950
0.048790	0.05	0.04875	0.048792	0.048790
0.072321	0.075	0.07219	0.072328	0.072320
0.095310	0.1	0.09500	0.095333	0.095308
0.117783	0.125	0.11719	0.117839	0.117778
0.139762	0.15	0.13875	0.139875	0.139748
0.182322	0.2	0.18000	0.182667	0.182267
0.262364	0.3	0.25500	0.264000	0.261975
0.336472	0.4	0.32000	0.341333	0.334933
0.405465	0.5	0.37500	0.416667	0.401042

表 2 対数の近似

この議論に対する疑問点は、まず月次利回り $r_{i,t}$ の確率分布が i.i.d. かどうか怪しい。i.i.d. の仮定は、標本統計量の推定のためやむを得ぬという事情もあるが、月次利回りは自己相関している可能性が高く、統計的独立は成立しないかもしれない。またより根本的な問題は $\sum_{t=1}^{12} r_{i,t}$ という式表記にある。これは、利回りに関する近似式とみなすには精度がよくない。

前の (3) 式を変形すると次の関係が成立している。

$$\ln \left(1 + \frac{T}{12} H_i \left(\frac{T}{12} \right) \right) = \sum_{t=1}^T \ln(1 + r_{i,t})$$

もし x が 0 に近い小さな値で、 $\ln(1+x) \approx x$ とすることができるなら、上式は $T = 12$ のとき、 $H_i(1) = \sum_{t=1}^{12} r_{i,t}$ となる。そこで $\ln(1+x) \approx x$ がどれぐらいの精度で成立しているかを調べたのが表 2 である。表 2 では、マクローリン展開の 4 次項までを使って対数関数を近似させてみる。絶対値で見て x が 0.1 未満であれば、 $\ln(1+x) \approx x$ という近似は許容できるかもしれないが、 x が 0.1 前後を超える大きさになると、精度が落ちて、2 次項を加えた補正が必要になってくる。 x が 0.3 を超えると 2 次項の補正でも不十分で、3 次項あるいは 4 次項も加えた補正を行う必要があろう。株式利回りでは絶対値 0.3 を超えることも頻発するので、 $\ln(1+x) \approx x$ という関係式を常用するのは控えるべきである。それ故、 $\sum_{t=1}^{12} r_{i,t}$ から利回りの換算をするのもあまり推奨できる手法ではない。以上のことから、(4) 式の換算方法の根拠は、もう一つ曖昧といわざるを得ない。

月次利回りデータから 1 年単位の利回りを計算するのに、(3) 式とは別の手法も考え得る。月次利回りデータを用いて、まず $(1 + r_{i,1}, 1 + r_{i,2}, \dots, 1 + r_{i,T})$ の幾何平均を計算しよう。

$$1 + \bar{g}_i = \sqrt[T]{(1 + r_{i,1})(1 + r_{i,2}) \cdots (1 + r_{i,T})}$$

年月	3 年間 ($T = 36$)				5 年間 ($T = 60$)				10 年間 ($T = 120$)			
	$Y_i(3)$	$H_i(3)$	$G_i(3)$	$\bar{R}_i(3)$	$Y_i(5)$	$H_i(5)$	$G_i(5)$	$\bar{R}_i(5)$	$Y_i(10)$	$H_i(10)$	$G_i(10)$	$\bar{R}_i(10)$
2008/05	0.161	0.157	0.138	0.151	0.208	0.209	0.154	0.162	0.074	0.077	0.059	0.092
2009/05	-0.099	-0.104	-0.118	-0.089	0.016	0.010	0.010	0.040	0.039	0.036	0.031	0.070
2010/05	-0.171	-0.174	-0.218	-0.201	-0.004	-0.013	-0.014	0.022	-0.019	-0.022	-0.025	0.004
2011/05	-0.110	-0.111	-0.126	-0.086	-0.070	-0.074	-0.088	-0.056	-0.002	-0.005	-0.005	0.025
2012/05	-0.055	-0.056	-0.059	-0.023	-0.106	-0.109	-0.145	-0.115	0.012	0.006	0.006	0.037
2013/05	0.297	0.311	0.246	0.259	0.036	0.045	0.042	0.087	0.138	0.151	0.096	0.125
2014/05	0.261	0.270	0.218	0.229	0.123	0.132	0.107	0.135	0.067	0.074	0.057	0.088
2015/05	0.660	0.684	0.451	0.395	0.358	0.384	0.239	0.243	0.150	0.173	0.106	0.133
2016/05	0.019	0.016	0.016	0.036	0.182	0.185	0.140	0.161	0.017	0.021	0.020	0.052
2017/05	0.046	0.044	0.042	0.070	0.248	0.250	0.176	0.190	-0.001	0.003	0.003	0.038
2018/05	-0.040	-0.037	-0.038	-0.013	0.064	0.069	0.061	0.080	0.054	0.065	0.051	0.084

表 3 いろいろな利回り (例：トヨタ自動車)

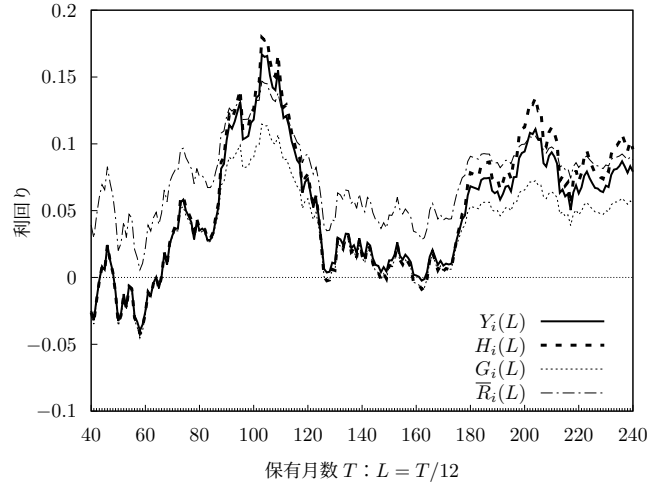


図 2 購入時点を固定した場合の利回り比較 (例：トヨタ自動車)

というように $\bar{g}_i$ を定義する。ただ、この $\bar{g}_i$ はあくまでも月次利回りデータの平均であるから、やはり 1 か月単位の値であり、これを 1 年単位の利回りとするのに、次のような形で $G_i(\frac{T}{12})$ を定義する。

$$G_i(\frac{T}{12}) = (1 + \bar{g}_i)^{12} - 1 = [(1 + r_{i,1}) \cdots (1 + r_{i,T})]^{\frac{12}{T}} - 1 \quad (5)$$

この $G_i(\frac{T}{12})$ も、月次利回りデータから算出される 1 年単位の利回りである。 $(1 + r_{i,1}) \cdots (1 + r_{i,T})$ という月次利回りデータの累積を用いている点は (3) 式の $H_i(\frac{T}{12})$ と同じであるが、(3) 式では $\frac{12}{T}$ を掛けて 1 年単位の利回りとしているのに対し、(5) 式では、 $\frac{12}{T}$ をべき乗しているところから、1 か月単位の幾何平均を 1 年単位に換算したものと解釈できよう。この手法も実務でよく利用されるように思う。

以上、株式利回りについて若干こみ入った話をしてきた。整理すると、株式の利回りには 4 種類の計算方法がある。売買価格と配当金から文字どおりの形で利回りを計算する $Y_i(\frac{T}{12})$ が 1 つ。あ

るいは1か月保有の月次利回り $r_{i,t}$ を複数月にわたって集めた月次利回りデータから、適当な計算を経ることで1年単位の利回りとする $H_i(\frac{T}{12})$ と $G_i(\frac{T}{12})$ の2つ。そして4番目は月次利回りの標本統計量に12を乗じて1年単位の利回りに変換する $\bar{R}_i(\frac{T}{12})$ である。元データの数値が同じでも、これら4種類の計算に依る利回りは決して同じ値とはならない。そこで重要なことは、これら4種類の利回りにはどれぐらいの大きさの差異があるのかという点である。具体的な例を示したのが表3と図2である。

表3は、前の表1の計算を拡張し、比較的長い保有期間の3年間 ($T = 36$) と5年間 ($T = 60$)、10年間 ($T = 120$) の3つについて、4種類の利回りを抽出し比較したものである。 $Y_i(\frac{T}{12})$ と $H_i(\frac{T}{12})$ は一部(3年間と5年間)について値が表1と表3とで重複している。また図2は、 $t = 1$ 時点(1998年6月)に固定させて、 $T = 40$ の時点(2001年9月)から $T = 240$ の時点(2018年5月)までの各月を T とする場合の4種類の利回りをプロットさせた。いい換えると、サンプルの開始時点(1998年6月)を固定させ、保有期間を1か月ずつ長くしていくときの利回りの動向をグラフにしたものである。

表3と図2の2つの計算結果を要約すると、以下のようにまとめられる。

- 保有期間が長くなるほど、4種類の利回りの差異が大きくなっていく傾向は明らかである。しかしそれでも、4種類の利回りは概ね連動していて、ランダムに勝手な動きを示すことはほとんど皆無である。
- 4種類の利回りの中で最も密接に連動しているのは $Y_i(\frac{T}{12})$ と $H_i(\frac{T}{12})$ であるが、保有期間が15年超の長期になると、両者の値が3~4割ほど異なることも珍しくはなく、乖離度合いは他の利回りと同程度になってしまう。
- 最も乖離が大きいのは $\bar{R}_i(\frac{T}{12})$ であるが、乖離度合いは保有期間の長さとはあまり関係ないようにも見える。ということは、保有期間が長いときほど、他の利回りと比べて乖離が相対的に小さいと考えることもできるかもしれない。
- $G_i(\frac{T}{12})$ は、 $H_i(\frac{T}{12})$ よりも $Y_i(\frac{T}{12})$ に対する連動性は劣る。 $G_i(\frac{T}{12})$ の連動性は時期によって優劣がある。 $Y_i(\frac{T}{12})$ や $H_i(\frac{T}{12})$ とほぼ完全に連動している時期もあるが、乖離が大きくなる時期も存在することが見てとれる。

本稿では株式利回りについて4種類の計算方法を提示したが、これら4つともすべて一定の妥当性を持った手法と考えられる。これらは、場合によっては相互に乖離し得ることにも留意しつつ、その利便性に配慮して分析目的に応じて使い分ければよいのではないか。これが筆者の株式利回りに関する見解である。

3 ポートフォリオの事後的パフォーマンス

ここからの議論は複数資産を扱うポートフォリオの利回りについて検討する。 n 種類の株式銘柄に加えて安全資産も考慮する。 n 個の危険資産と安全資産とで合せて $n + 1$ 個の資産からなるポー

トフォリオを構築する。^{*4} ポートフォリオの構築時点を τ 時点とし、その富が W_τ である。時間が経過して $\tau+1$ 時点、 $\tau+2$ 時点、 $\dots$ となったとき、富は $W_{\tau+1}$, $W_{\tau+2}$, $\dots$ へと変化する。そこからポートフォリオの利回りが $r_{p,\tau+1}$, $r_{p,\tau+2}$, $\dots$ として算出されるが、ポートフォリオの事後的パフォーマンスとは、これら利回りのことに他ならない。それではこの具体的な計算方法はどのようなものかをここで検討する。計算方法には大きく分けて2種類あり、 τ 時点の資産の購入数量をそのまま継続して保有する場合と、時点毎にリバランスして資産の保有数量を変化させる場合である。本稿では前者を「継続保有」と称し、後者を「リバランス」と称する。以下、節を変えて議論を進める。

3.1 継続保有の場合

安全資産と n 個の危険資産があり、便宜上、これら $n+1$ 個の資産から構築するポートフォリオの0番目の資産が安全資産 ($i=0$) で、危険資産は $i=1, \dots, n$ としよう。ポートフォリオを構築する τ 時点で、 W_τ という金額の富が存在し、この富を $n+1$ 個の資産に配分する。 i 番目の資産の購入数量を $m_{i,\tau}$ 、その1単位の価格を $p_{i,\tau}$ で表すと ($i=0, \dots, n$)、富 W_τ は $n+1$ 個の購入資産の和として、^{*5}

$$W_\tau = \sum_{i=0}^n m_{i,\tau} p_{i,\tau}$$

のように表現できる。この購入数量 $m_{i,\tau}$ は、ポートフォリオの投資比率を表すベクトル $\mathbf{w}$ と富 W_τ から値が決まる。 $\mathbf{w}' = (w_0, \dots, w_n)$ である。なお $\mathbf{w}$ は、何らかの方法によって τ 時点で値が分かっているものとしよう。 τ 時点で所与の $\mathbf{w}$ というポートフォリオについて、継続保有する場合の事後的パフォーマンスの計算方法は次のとおりである。

所与の w_i と W_τ の値から、 $m_{i,\tau}$ は次の式を満たすような値として算出される。

$$m_{i,\tau} p_{i,\tau} = w_i W_\tau \quad \text{ただし, } i = 0, \dots, n$$

構築後に何もせずに τ 時点から t 月間、継続保有 (buy and hold) する場合、 t 月間が経過した $\tau+t$ 時点における富 $W_{\tau+t}$ は、 $\tau+1$ 時点から $\tau+t$ 時点の t 月間に受取った配当金合計を $D_i(t)$ で表し、 $\tau+t$ 時点の価格が $p_{i,\tau+t}$ に変化するなら、

$$W_{\tau+t} = \sum_{i=0}^n m_{i,\tau} [D_i(t) + p_{i,\tau+t}]$$

^{*4} 以下では富制約の式を利用する関係で、安全資産も明示して $n+1$ 個の資産からポートフォリオを構築することを考えているが、本稿の議論では安全資産に何の役割もなく、安全資産の保有はゼロとみなして構わない。

^{*5} 本稿では危険資産には株式を、安全資産には国債を想定しているが、記号は共通して、 t 時点のキャッシュフローを $d_{i,t}$ で、価格を $p_{i,t}$ として表現している。 i が0かどうかで安全資産か危険資産かを区別して欲しい。この $m_{i,t}$ は i が0以外の危険資産ならば株式数であるが、 $i=0$ の安全資産ならば、 $m_{0,t}$ 単独の適切な表現を思いつかない。ゆえに本文中では $m_{i,t}$ を「購入数量」あるいは「保有数量」と称している。安全資産の場合は $m_{0,t} d_{0,t}$ でもって受取る利子額を、 $m_{0,t} p_{0,t}$ で購入する (あるいは保有する) 価値額を表している。

というように表現できる。継続保有であるから、保有数量は購入時の $m_{i,\tau}$ のままであり、受取る配当金と価格の値上り益(値下り損)とから富 $W_{\tau+t}$ は当初の W_τ から変化する。 W_τ と $W_{\tau+t}$ から計算される t 月間の変化率を、ポートフォリオの 1 年単位の利回りとして $Y_p(\frac{t}{12})$ で表す。

$$Y_p(\frac{t}{12}) = \frac{12}{t} \frac{W_{\tau+t} - W_\tau}{W_\tau}$$

この W_τ と $W_{\tau+t}$, $m_{i,\tau}$ に上式を使って次のように整理する。

$$\begin{aligned} Y_p(\frac{t}{12}) &= \frac{12}{t} \sum_{i=0}^n \frac{m_{i,\tau}}{W_\tau} [D_i(t) + p_{i,\tau+t} - p_{i,\tau}] = \sum_{i=0}^n \frac{m_{i,\tau} p_{i,\tau}}{W_\tau} \frac{12}{t} \frac{D_i(t) + p_{i,\tau+t} - p_{i,\tau}}{p_{i,\tau}} \\ &= \sum_{i=0}^n w_i Y_i(\frac{t}{12}) \end{aligned}$$

これは各資産の売買利回り $Y_i(\frac{t}{12})$ を用いたポートフォリオの利回りであるが、 $Y_i(\frac{t}{12})$ は、月次利回りデータから計算される累積利回り $H_i(\frac{t}{12})$ でもって代用され得る。そこでポートフォリオの利回りも売買利回りではなく累積利回りを使って計算することができよう。これを $H_p(\frac{t}{12})$ として次のように定義する。

$$H_p(\frac{t}{12}) = \sum_{i=0}^n w_i H_i(\frac{t}{12})$$

次に、このように算出される t 月間の継続保有の利回りを T 個求めよう。 $t = 1, \dots, T$ として、サンプルサイズ T の標本統計量の平均と分散を次のように計算する。

$$\bar{H}_p(\frac{T}{12}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T H_p(\frac{t}{12}) \quad \Upsilon_p^2(\frac{T}{12}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(H_p(\frac{t}{12}) - \bar{H}_p(\frac{T}{12}) \right)^2$$

この $\bar{H}_p(\frac{T}{12})$ が継続保有のポートフォリオ利回りの平均で、 $\Upsilon_p^2(\frac{T}{12})$ がその分散である。これらを継続保有する場合のポートフォリオの事後的パフォーマンスの尺度とする。

3.2 リバランスの場合

τ 時点の富 W_τ は、時間の経過で $W_{\tau+1}$, $W_{\tau+2}$, $\dots$ へと変化していく。リバランスというのは、時点毎に資産の保有数量が変化していくことになる。前の時点に比べて価格の上がった資産や価格の下った資産があろうが、価格の変化や受取配当金等により、ポートフォリオに占める各資産金額の投資比率は時点の経過で変化していく。このポートフォリオの投資比率を当初の比率に維持すべく、時点毎に保有数量を変化させるのが、ここでいうポートフォリオのリバランスである。今の投資比率が当初の比率を上回れば保有数量を減らす、あるいは投資比率が当初比率を下回れば保有数量を増やす。このリバランスに伴い発生する売買は予算制約を満たす必要がある。この点についてまず確認するところから始めよう。

τ 時点でのポートフォリオの投資比率 $\mathbf{w}$ は与件である。この $\mathbf{w}$ に従って W_τ という金額は $n+1$ 個の資産に配分され、

$$W_\tau = \sum_{i=0}^n m_{i,\tau} p_{i,\tau}$$

のように書ける。ここの保有数量 $m_{i,\tau}$ は、

$$m_{i,\tau} p_{i,\tau} = w_i W_\tau \quad (6)$$

という式から値が算出される。いうまでもないが、 $\sum_{i=0}^n w_i = 1$ が成立していることは、上式から得る w_i を代入すれば明らかであろう。

さて 1 時点の時間が経過して $\tau + 1$ 時点になると、1 時点分の配当金 $d_{i,\tau+1}$ を得て、さらに価格が $p_{i,\tau+1}$ に変化するため、富 $W_{\tau+1}$ は

$$W_{\tau+1} = \sum_{i=0}^n m_{i,\tau} [d_{i,\tau+1} + p_{i,\tau+1}]$$

という値に変化する。これは (1) 式を使って次のように書き換えられる。

$$W_{\tau+1} = \sum_{i=0}^n m_{i,\tau} p_{i,\tau} \frac{d_{i,\tau+1} + p_{i,\tau+1}}{p_{i,\tau}} = W_\tau \sum_{i=0}^n w_i (1 + r_{i,\tau+1}) \quad (7)$$

次に $\tau + 1$ 時点でのリバランスにより保有数量が $m_{i,\tau}$ から $m_{i,\tau+1}$ に変化するため、このリバランス後の富 $W_{\tau+1}$ は

$$W_{\tau+1} = \sum_{i=0}^n m_{i,\tau+1} p_{i,\tau+1} \quad (8)$$

として書くこともできる。リバランスを実行するための予算制約として、(7) 式のリバランス前の富 $W_{\tau+1}$ と (8) 式のリバランス後の富 $W_{\tau+1}$ とは同じでなければならない。ポートフォリオ投資比率の $\mathbf{w}$ は不変であるから、 $\tau + 1$ 時点の新しい保有数量 $m_{i,\tau+1}$ は、

$$m_{i,\tau+1} p_{i,\tau+1} = w_i W_{\tau+1} \quad (9)$$

から算出されるが、そうだとするとこれを使って (8) 式の右辺は、 $W_{\tau+1} \sum_{i=0}^n w_i$ に書き換えられ、 $\sum_{i=0}^n w_i = 1$ であるから、結局 (8) 式は $W_{\tau+1} = W_{\tau+1}$ という自明の式に帰着する。以上のことから、リバランスの予算制約を明示して、(7) 式と (8) 式が等しいという点から得られる式は、

$$W_{\tau+1} = W_\tau \sum_{i=0}^n w_i (1 + r_{i,\tau+1}) \quad (10)$$

となる。(10) 式の左辺が (8) 式を、右辺が (7) 式を意味しているが、(10) 式は (7) 式とまったく同じ形の式になる。

この (10) 式は、投資比率のリバランスという点を意識しなくても、月次利回り $r_{i,\tau+1}$ の定義から自明な関係式と考えることもできる。いうまでもないが、富 1 円から $\mathbf{w}$ の投資比率のポートフォリオを構築し、1 時点経過した後の富は $\sum_{i=0}^n w_i (1 + r_{i,\tau+1})$ で表現されるからである。これが何を意味するのか。投資比率 w_i と利回り $r_{i,\tau+1}$ とから表現されるポートフォリオの利回りは、実は $\mathbf{w}$ を維持すべくすべての時点でリバランスされることが暗黙の前提なのである。

τ 時点から $\tau + 1$ 時点に至るポートフォリオ利回りを $r_{p,\tau+1}$ という記号で表すと,

$$r_{p,\tau+1} = \frac{W_{\tau+1} - W_{\tau}}{W_{\tau}}$$

で定義される。これに (10) 式を使うと,

$$r_{p,\tau+1} = \sum_{i=0}^n w_i r_{i,\tau+1}$$

であるが, ポートフォリオを構築する τ 時点以降, $\tau + 1$ 時点から $\tau + T$ 時点までの T 個の各時点の利回りを, 一般的な形で次のように記しておく。

$$r_{p,\tau+t} = \frac{W_{\tau+t} - W_{\tau+t-1}}{W_{\tau+t-1}} = \sum_{i=0}^n w_i r_{i,\tau+t} \quad \text{ただし, } t = 1, \dots, T \quad (11)$$

多少冗長に感じるかもしれないが, 確認のため形式的な議論を繰り返しておく, (11) 式は

$$W_{\tau+t} = W_{\tau+t-1} \sum_{i=0}^n w_i (1 + r_{i,\tau+t})$$

ということであり, これを保有数量と価格の積で表現すると,

$$\sum_{i=0}^n m_{i,\tau+t} p_{i,\tau+t} = \sum_{i=1}^n m_{i,\tau+t-1} [d_{i,\tau+t} + p_{i,\tau+t}]$$

に書き直すことができ, この式は各時点のリバランスが予算制約を満たすことを意味する。この保有数量 $m_{i,\tau+t-1}$ と $m_{i,\tau+t}$ は, 一定のポートフォリオ投資比率 $\mathbf{w}$ から次式を満たすよう算出される。

$$w_i = \frac{m_{i,\tau+t-1} p_{i,\tau+t-1}}{W_{\tau+t-1}} = \frac{m_{i,\tau+t} p_{i,\tau+t}}{W_{\tau+t}} \quad \text{ただし, } i = 1, \dots, n$$

(11) 式で計算される $r_{p,\tau+1}$ から $r_{p,\tau+T}$ は, サンプルサイズ T の月次利回りデータとなっている。その標本統計量の平均と分散はポートフォリオの事後的パフォーマンスの尺度で, その平均と分散を $\bar{r}_p^{\diamond}$ と $v_p^{\diamond 2}$ で表そう。

$$\bar{r}_p^{\diamond} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{p,\tau+t} \quad v_p^{\diamond 2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{p,\tau+t} - \bar{r}_p^{\diamond})^2$$

として定式化される。投資比率 $\mathbf{w}$ で毎月ポートフォリオを構築し, それを 1 か月間保有する場合の利回りを T か月にわたって T 個計算し, 文字どおりこれら T 個の値の平均と分散を求めたのが $\bar{r}_p^{\diamond}$ と $v_p^{\diamond 2}$ に他ならない。

ところで, 各資産の月次利回りデータ $r_{i,\tau+t}$ は 1 か月単位の値であり, それから計算される上記のポートフォリオ利回りの平均や分散も当然のこと 1 か月単位の数字となる。そこで, 1 か月単位の利回り平均や分散を 1 年単位の利回り平均および分散の値とするには, 12 を乗じて換算する。 T 月間の月次利回りデータから計算される, 1 年単位の利回り平均と分散を $\bar{R}_p(\frac{T}{12})$ と $V_p^2(\frac{T}{12})$ と表して, 次のように定めておく。

$$\bar{R}_p(\frac{T}{12}) = 12\bar{r}_p^{\diamond} \quad V_p^2(\frac{T}{12}) = 12v_p^{\diamond 2}$$

3.3 リバランスの場合：別手法

各時点のリバランスとその予算制約が明確になるよう、少々冗長な感じでポートフォリオの月次利回りデータの平均 $\bar{r}_p^\diamond$ と分散 $v_p^{\diamond 2}$ を導出したが、この $\bar{r}_p^\diamond$ と $v_p^{\diamond 2}$ は、以下のように算出した方が若干簡単に計算できる。ポートフォリオ構築の τ 時点から T 月間について、各資産の利回り平均と分散共分散を算出し、これを使って投資比率 $\mathbf{w}$ のポートフォリオ利回りの平均と分散を計算するのである。

ポートフォリオ構築後の T 月間の月次利回りデータから、各資産の利回りの平均および分散共分散を次のように推定する。サンプルサイズ T から計算される i 番目の資産の利回りの平均は $\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,\tau+t}$ であり、これを $n+1$ 個の資産について集めればベクトル $\bar{\mathbf{r}}' = (\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$ である。次に分散共分散の標本値は、 i 番目の資産と j 番目の資産の共分散が $v_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,\tau+t} - \bar{r}_i)(r_{j,\tau+t} - \bar{r}_j)$ と書け、これを n 個の危険資産どうして並べて、 $n \times n$ の正方行列

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

が形成される。行列 $\mathbf{v}$ の対角要素 v_{ii} は i 番目の資産の分散 v_i^2 である。ところで、この $\mathbf{v}$ は n が T 以上なら特異行列となって逆行列を持たない。^{*6} そうであるなら、 $\mathbf{v}$ を使ってポートフォリオの投資比率を計算することはできないが、今、欲しいのは投資比率ではなく、ポートフォリオ利回りの平均と分散の標本統計量である。標本統計量の推定は n が T 以上であっても計算可能である。

このようにポートフォリオ構築時点以降の各資産の月次利回りデータから、各資産利回りの平均と分散共分散を推定し、その推定値を既に計算済みの投資比率 $\mathbf{w}$ と組合せて、ポートフォリオの構築時点以降の利回り平均と分散を計算する。このように計算されるポートフォリオ利回りの平均を $\bar{r}_p^*$ 、分散を v_p^{*2} で表して、前の $\bar{r}_p^\diamond$ と $v_p^{\diamond 2}$ と区別しておく。 $\bar{r}_p^*$ と v_p^{*2} は次のとおりに計算される。

$$\bar{r}_p^* = \sum_{i=0}^n w_i \bar{r}_i \quad v_p^{*2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j v_{ij} \quad (12)$$

この $\bar{r}_p^*$ と v_p^{*2} は前の $\bar{r}_p^\diamond$ と $v_p^{\diamond 2}$ と同じ値になる。この点を数式展開して証明する。まず平均である。

$$\bar{r}_p^\diamond = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{p,\tau+t} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=0}^n w_i r_{i,\tau+t} = \sum_{i=0}^n w_i \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,\tau+t} \right) = \sum_{i=0}^n w_i \bar{r}_i = \bar{r}_p^*$$

次に分散である。 v_p^{*2} の v_{ij} を代入すると、

$$v_p^{*2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,\tau+t} - \bar{r}_i)(r_{j,\tau+t} - \bar{r}_j) \right)$$

^{*6} この証明は辻 (2021) を参照願いたい。

であるが、他方で $v_p^{\diamond 2}$ の中にある $\bar{r}_p^\diamond$ は、 $\bar{r}_p^\diamond = \sum_{i=0}^n w_i \bar{r}_i (= \bar{r}_p^*)$ であったから、これと $r_{p,\tau+t}$ とから $v_p^{\diamond 2}$ を書き換える。

$$\begin{aligned} v_p^{\diamond 2} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=0}^n w_i r_{i,\tau+t} - \sum_{i=0}^n w_i \bar{r}_i \right)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=0}^n w_i (r_{i,\tau+t} - \bar{r}_i) \right)^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_i w_j (r_{i,\tau+t} - \bar{r}_i) (r_{j,\tau+t} - \bar{r}_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,\tau+t} - \bar{r}_i) (r_{j,\tau+t} - \bar{r}_j) \right) = v_p^{*2} \end{aligned}$$

という具合に展開すれば、 $v_p^{\diamond 2}$ は v_p^{*2} に等しくなることが分かる。なおこの2行目から3行目では、安全資産 ($i, j = 0$) の利回りと危険資産 ($i, j = 1, \dots, n$) の利回りの共分散は必ずゼロであるから、その標本統計量もゼロと仮定して式展開している。

まとめると、ポートフォリオ構築後の事後的な月次利回りデータを使って、そのポートフォリオの事後的パフォーマンスを測定するには、期間中にリバランスをせず、資産を継続保有する場合の利回りでは、平均が $\bar{H}_p(\frac{T}{12})$ 、分散が $\Upsilon_p^2(\frac{T}{12})$ で計算される。また期間中の銘柄のリバランスを前提にする場合では利回り平均が $\bar{R}_p(\frac{T}{12})$ 、分散が $V_p^2(\frac{T}{12})$ で計算される。両者の計算方法は似ているが、確かに違う。両者とも元々は月次利回りデータから計算されるのであるが、累積利回りを経由するか否かという違いがある。経由する場合が継続保有を想定するとき、経由しない場合がリバランスを想定するときである。計算方法としては確かに紛らわしいが、ポートフォリオの事後的パフォーマンスを評価するには、これらを区別しておくことは大変に重要である。

4 シミュレーション

様々なポートフォリオの事後的パフォーマンスの特徴をシミュレーションを通じて明らかにしたい。株式銘柄の組合せをランダムに抽出し、非常に多数のポートフォリオを構成して、そのポートフォリオの構築時点以降の事後的パフォーマンスを計算する。無作為抽出された銘柄組合せに関するポートフォリオを実際に多数構築することを、ここではシミュレーションと称している。銘柄の利回り平均や分散そして銘柄間の共分散は、構築時点前の過去の月次利回りデータから推定する。これら標本統計量に基づいて、無作為抽出された銘柄組合せに関する以下のようなポートフォリオを構築する。ただし本稿では以下、安全資産の保有はゼロとし、危険資産の株式のみでポートフォリオを構築するものとする。

具体的な危険資産ポートフォリオとしては、接点ポートフォリオと最小分散ポートフォリオ、そして等ウェイトポートフォリオの3種類を対象にする。これら3種類のポートフォリオの投資比率を算出し、この投資比率を所与として τ 時点でポートフォリオを構築し、その後の $\tau+t$ 時点 (ただし、 $t = 1, \dots, T$) についてそのポートフォリオ利回りを計算し、さらにその平均と標準偏差から、ポートフォリオの事後的パフォーマンスを計測する。事後的パフォーマンスには、継続保有する場合とリバランスする場合の2つの計算方法があった。継続保有の場合の事後的パフォーマンス

とリバランスする場合の事後的パフォーマンスとの間に差異は認められるか。上で述べたように構築されるポートフォリオには3種類あり、さらに継続保有とリバランスとで2種類あって、ポートフォリオの事後的パフォーマンスには計6通りの計算方法が存在することになるが、これら6通りのケースに差異は認められるのであろうか。これはシミュレーションを通じて検討するしかないであろう。

4.1 シミュレーションの実施方法

ここではポートフォリオのシミュレーションについて、その実施方法を具体的に説明する。シミュレーションで利用されるポートフォリオは次のように構成される。基本的には辻 (2021) と同様の手法であるが、読者の便宜のため以下まとめておく。

ポートフォリオを構成する銘柄の決定には、恣意性を極力排除するため銘柄をランダムに抽出する。例えば1つのポートフォリオを5銘柄から構成するなら、その5銘柄を乱数を使って無作為に抽出する。銘柄各々の利回り平均とその分散共分散を推定する必要があるから、仮に今、2006年5月末の時点にいてとして標本統計量を推定したいとする。推定のためのデータは5年間の月次利回りデータとしよう。過去5年間で遡ってサンプルを作るなら、2006年5月末時点の月次利回りデータは、具体的には2001年6月から2006年5月までのデータである。フルに(期中のデータ欠損もないとして)サンプルサイズ $60 (= 5 \times 12)$ の利回りデータを揃えるには、データベース上のデータ収録開始日が2001年5月以前の銘柄でなければならない。本稿では、ポートフォリオを構築した後の事後的なパフォーマンスを計測したいので2006年5月末以降のデータも併せて収集する。そこで2006年5月末時点でのポートフォリオ構築に際し、無作為に抽出される銘柄は、5年前の2001年6月から1年後の2007年5月までのデータが完全に存在する銘柄群の中から選択されるものとする。^{*7}

そのように抽出された5銘柄をどのような投資比率で組合せるかにより、様々なポートフォリオを作ることになるが、本稿では以下3種類のポートフォリオを作成する。1番目は、危険資産だけから構成される場合の最適ポートフォリオである。利回りの平均と標準偏差の平面上で5銘柄から成る有効フロンティアの曲線1本を導出し、無危険利子率の値からその曲線への接点を求める。この接点が危険資産の最適ポートフォリオであり、本稿ではこれを接点ポートフォリオと称する。なお無危険利子率には長期国債の利回りを当てる。^{*8} 2番目は最小分散 (global minimum variance) ポートフォリオである。危険資産から計算される有効フロンティアの、最も左側の点が最小分散ポートフォリオである。そして3番目は等ウェイトのポートフォリオである。^{*9} 銘柄数が n である

^{*7} 本稿の依拠する株式銘柄の収益率データは、FDS(金融データソリューションズ)の提供するNPM関連データサービス「日本上場企業月次リターン」である。これは各月の月末の株価(終値)から計算される月々の利回りデータである(配当がある場合は配当金を含んだ値)。無作為抽出の対象となる銘柄群は、この「日本上場企業月次リターン」に収録されている東証1部・2部上場の全銘柄である。

^{*8} 無危険利子率のデータは、財務省公表の「国債金利情報」を利用している。そこに収録されている各月末の7年物から10年物までの4つの利回りから計算される平均値を、各月末の無危険利子率とみなしている。

^{*9} 最小分散ポートフォリオについてはMerton(1972)を参照願いたい。本当なら大域的 global 最小分散ポートフォリオとすべきかもしれないが、誤解のおそれもないので、単に最小分散ポートフォリオと称している。また等ウェイト

構築時点	サンプル期間				終了時点
	5 年	10 年	15 年	20 年	
	データ開始時点				
2006 年 5 月	2001 年 6 月	1996 年 6 月	1991 年 6 月	1986 年 6 月	2007 年 5 月
2007 年 5 月	2002 年 6 月	1997 年 6 月	1992 年 6 月	1987 年 6 月	2008 年 5 月
2008 年 5 月	2003 年 6 月	1998 年 6 月	1993 年 6 月	1988 年 6 月	2009 年 5 月
2009 年 5 月	2004 年 6 月	1999 年 6 月	1994 年 6 月	1989 年 6 月	2010 年 5 月
2010 年 5 月	2005 年 6 月	2000 年 6 月	1995 年 6 月	1990 年 6 月	2011 年 5 月
2011 年 5 月	2006 年 6 月	2001 年 6 月	1996 年 6 月	1991 年 6 月	2012 年 5 月
2012 年 5 月	2007 年 6 月	2002 年 6 月	1997 年 6 月	1992 年 6 月	2013 年 5 月
2013 年 5 月	2008 年 6 月	2003 年 6 月	1998 年 6 月	1993 年 6 月	2014 年 5 月
2014 年 5 月	2009 年 6 月	2004 年 6 月	1999 年 6 月	1994 年 6 月	2015 年 5 月
2015 年 5 月	2010 年 6 月	2005 年 6 月	2000 年 6 月	1995 年 6 月	2016 年 5 月
2016 年 5 月	2011 年 6 月	2006 年 6 月	2001 年 6 月	1996 年 6 月	2017 年 5 月
サンプルサイズ	60	120	180	240	
銘柄数	5 から 55	5 から 115	5 から 175	5 から 235	
銘柄数の個数	11	23	35	47	→合計 116

表 4 サンプルのまとめ

なら、1 銘柄につき等しく $1/n$ の投資比率でポートフォリオを作る。以上のように、1 つの銘柄組合せから 3 種類のポートフォリオを計算する。なお本稿の接点ポートフォリオと最小分散ポートフォリオでは、銘柄の投資比率に非負制約を課し、カラ売りを排除して導出される有効フロンティアを前提にポートフォリオの投資比率を計算している。

次にまったく同様に、別の 5 銘柄を無作為抽出し、あらためて上記 3 種類のポートフォリオを導出する。以上のことを 900 回繰り返す。つまり、2006 年 5 月末時点でのポートフォリオ構築を想定し、無作為抽出した別々の 5 銘柄で構成される銘柄の組合せを 900 個作成し、各組合せについてそれぞれ 3 種類のポートフォリオを作成するのである。これら 3 種類のポートフォリオの 1 つ 1 つについて、その事後的パフォーマンスが各々 900 個ずつ計算できる。

さて以上の説明は、2006 年 5 月末時点におけるポートフォリオ構築を前提にした話であるが、今度は構築時点を 1 年間ずらしたとしよう。2007 年 5 月末時点でポートフォリオを構築するのである。前と同様な条件を維持するなら、対象となる銘柄群は、5 年前の 2002 年 5 月以前にデータ収録が開始され、1 年後の 2008 年 5 月までデータが揃っている銘柄の集合である。この銘柄群から 5 つを無作為抽出して、上記 3 種類のポートフォリオ各々について、それぞれの事後的パフォーマンスを計算する。そしてこの手続きをまた 900 回繰り返す。

以上の一連のプロセスを、毎年 5 月末にポートフォリオを構成するものと仮定して、順に 2006 年 5 月末、2007 年 5 月末、…、2016 年 5 月末まで 11 回繰り返す。各時点で 900 個の銘柄組合せを抽出し、全部で 9900 個の銘柄組合せを作成する。ここまでの 1 つの計算プロセスである。以下ではさらに計算条件をいくつか変更して同じ計算をする。変更する計算条件とは、まずポートフォリオを構築する際の銘柄数である。5 銘柄、10 銘柄、15 銘柄、…、という具合に 5 銘柄刻みで変

ポートフォリオについては Fama(1976) が若干の分析を与えている。

更していく。銘柄数の上限は、標本統計量を推定するのに用いたデータのサンプルサイズに依存する。上の例では5年分の月次利回りデータ(サンプルサイズ60)を用いていたので、その数学的な最大値は59銘柄である。^{*10} 半端であるから上限を55銘柄としている。

標本統計量を計算するサンプルサイズも「変更する計算条件」である。5年分の月次利回りデータではなく、今度は10年分の月次利回りデータ(サンプルサイズ120)を用いるとしよう。利用するデータの期間が長くなるので、当然、無作為抽出の対象となる銘柄群も異なってくる。例えば5銘柄なら、前で利用した5銘柄ではなく、新しい銘柄群からあらためて5つを選択し直すことが必要である。ポートフォリオ構築が2006年5月末時点なら、10年前の1996年6月から1年後の2007年5月までデータが揃っている、そういう銘柄のグループが選択対象の銘柄群である。前と同様、各時点で900個の銘柄組合せを抽出し、ポートフォリオ構築時点が毎年5月末で、2006年5月から2016年5月までの11時点とみなして計算を実行する。そして、5銘柄、10銘柄、15銘柄、…、という具合に銘柄数を増やしていく。今度はサンプルサイズ120で推定しているから、計算可能な最大の銘柄数は119である。端数であるから、最大115銘柄を無作為抽出してポートフォリオを作る。

標本統計量を推定するのに、同様にして、15年分および20年分の月次利回りデータを利用する場合も試みる。各々のサンプルサイズは180と240であり、銘柄数の上限をそれぞれ175個と235個とする。データのサンプル期間が5年と10年、15年、20年の場合、ポートフォリオを構築する各時点で、いつのデータがサンプルの先頭になり、いつのデータがサンプルの終わりになるのか、若干錯綜するので表4にまとめた。例えば、標本統計量の推定に15年分のデータを使う場合、2008年5月にポートフォリオを構築するなら、1993年6月から2009年5月までの月次利回りデータが必要である。

上記のことを1つのポートフォリオ構築時点について見ると、銘柄数の違いとサンプル期間の違いで、900個の銘柄組合せを都合116回作っていることになる。この116の内訳が表4の最下行「銘柄数の個数」である。例えば、サンプル期間を5年とした場合は、ポートフォリオ構築に利用できる最大銘柄数を55銘柄として、銘柄数が5銘柄の場合から、10銘柄の場合、…、55銘柄の場合まで、5銘柄刻みで合計11回、900個の銘柄組合せを作る。このことを表4の「銘柄数」の行で「5から55」と記している。またサンプル期間を10年とした場合は、最大銘柄数は115銘柄で、同様に銘柄数が5銘柄の場合、10銘柄の場合、…、115銘柄の場合を考慮する。サンプル期間10年のときは銘柄数「5から115」の23回、900個の銘柄組合せを作る。サンプル期間15年の場合は最大銘柄数が175銘柄であるとし、表にあるように、900個の銘柄組合せを作るのは銘柄数が「5から175」の35回である。サンプル期間20年では最大銘柄数が235銘柄で、銘柄数が「5から235」の47回である。このように1つの構築時点で見ると、銘柄数の違いとサンプル期間の違いによって116(=11+23+35+47)回の異なる試行が存在し、この試行1つ1つすべてに、各々900個の銘柄組合せを構築するのである。さらに構築時点は全部で11個あったから、1,276回(=116×11)

^{*10} 数学的な限界とは、標本統計量の分散共分散行列の非特異性を維持するための条件である。この証明は辻(2021)を参照のこと。

の試行を行っていることになる。銘柄組合せは総合計で 1,148,400 個 ($= 1,276 \times 900$) 存在する。
本稿の以下の議論では、以上のようにして作成したポートフォリオについて考察する。

4.2 シミュレーション結果

上記のように、100 万個を超える銘柄組合せについて、3 種類のポートフォリオを構築し、その構築時点後の事後的パフォーマンスを、継続保有する場合とリバランスする場合とで計算する。多数のポートフォリオをシミュレーションして多数の計算結果を得るが、これらを比較するのにどのようにして集計すればよいか。この比較の方法を考察するのもそれなりに難題なのであるが、^{*11} ここではシンプルに次のように考える。

1 つの構築時点に限定するなら、銘柄数の違いとサンプル期間の違いで計 116 回の試行を行っている。この試行 1 回につき 900 組の銘柄組合せが存在し、1 つのポートフォリオを構築した後の事後的パフォーマンスとして、構築後 1 年間の利回りが算出され、試行 1 回で 900 個に関する 1 年間の利回りが生成されることになる。1 年間の利回りは 12 回の月次利回りでもあるから、これら 12 回の値を月次利回りデータとして ($T = 12$)、継続保有する場合の利回り平均 $\bar{H}_p(1)$ と利回り標準偏差 $\Upsilon_p(1)$ 、リバランスする場合の利回り平均 $\bar{R}_p(1)$ と利回り標準偏差 $V_p(1)$ が求められる。試行 1 回で 1 種類のポートフォリオについて、これら 2 種類の平均と標準偏差が 900 組計算される。

用語が紛らわしくなってしまうが仕方なからう。900 個の利回り平均の全体的な位置として 900 個の値の平均を取り、900 個の利回り平均の散らばり具合として 900 個の値の標準偏差を取る。つまり「平均の平均」と「平均の標準偏差」を算出する。もう 1 つは、900 個の利回り標準偏差の全体的な位置として 900 個の「標準偏差の平均」も求める。これら「平均の平均」「平均の標準偏差」「標準偏差の平均」を構築時点 11 回の時点毎にプロットしたのが、図 3 と図 4、図 5 である。これら 3 つの図の左側は、「銘柄数 30、サンプル期間 10 年」という 1 回の試行で計算された 900 個の利回り平均と利回り標準偏差についての「平均の平均」「平均の標準偏差」「標準偏差の平均」である。各図はポートフォリオ 3 種類と事後的パフォーマンス 2 種類について、計 6 本の線がプロットされている。

これら左側の図は、116 回の試行のうちの 1 試行に過ぎないから、全体像を俯瞰するには不十分なものも明らかである。ポートフォリオ構築時点 1 つについて 116 個の「平均の平均」と「平均の標準偏差」「標準偏差の平均」が存在し、ポートフォリオの構築時点は全部で 11 時点あるから、より一層の集計化を進める必要があろう。そこで、1 つの構築時点毎に 116 回の試行全体についての「平均の平均」「平均の標準偏差」「標準偏差の平均」をあらためて算出する。すなわち、104,400 組 ($= 116 \times 900$) すべてに関する利回り平均と利回り標準偏差の平均あるいは標準偏差を計算する。そうすれば、構築時点 11 回の「平均の平均」「平均の標準偏差」「標準偏差の平均」となるので、時点毎にプロットして全体像を 1 つの図に織り込むことができる。これが図 3～図 5 の右側の図であ

^{*11} このシミュレーション結果のような、万をゆうに超える大規模データについて、統計学の普通の検定ツールではほとんど意味をなさないのではないだろうか。このような疑念から、統計学で普通になされる「差の検定」について、以降の議論では一切の言及を省略している。

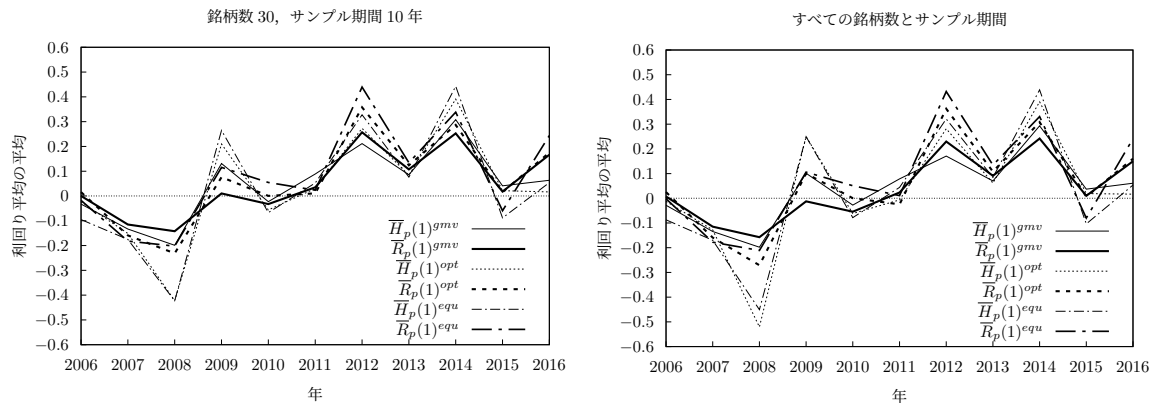


図3 ポートフォリオ利回り平均の平均

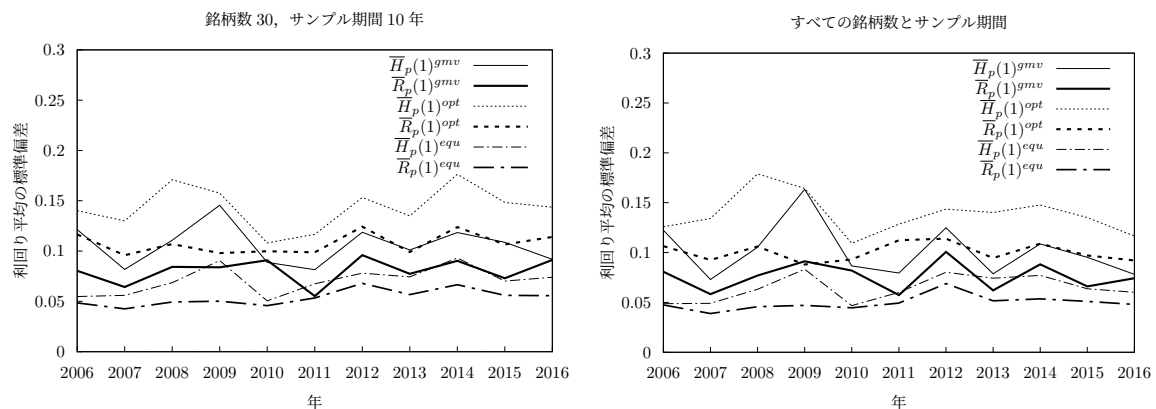


図4 ポートフォリオ利回り平均の標準偏差

る。「すべての銘柄数とサンプル期間」とのタイトルが付されている。

ここで取り上げるポートフォリオは3種類あり、接点ポートフォリオを記号 *opt* で、最小分散ポートフォリオを記号 *gmv* で、等ウェイトポートフォリオを記号 *equ* でもって区別しよう。試行1回で900組の銘柄組合せ1つ1つについて、3種類のポートフォリオと2種類の事後的パフォーマンスとで6種類の利回り平均と標準偏差が存在する。集計する基本としては試行1回900組について、その平均や標準偏差を求めることであろう。

図3から図5の6枚の図で、3種類のポートフォリオは添字を付けて区別され、図で使われている線種は、接点ポートフォリオ *opt* が点線、最小分散ポートフォリオ *gmv* が実線、等ウェイトポートフォリオ *equ* が1点鎖線である。また継続保有の場合は細線を、リバランスの場合は太線を使っている。図3は「平均の平均」のプロットで、左図は900個の、右図は104,400個の $\bar{H}_p(1)$ と $\bar{R}_p(1)$ に関する平均である。図4は「平均の標準偏差」で、左図は900個の、右図は104,400個の $\bar{H}_p(1)$ と $\bar{R}_p(1)$ の散らばり具合を見ている。図5は「標準偏差の平均」である。同様に左図は900

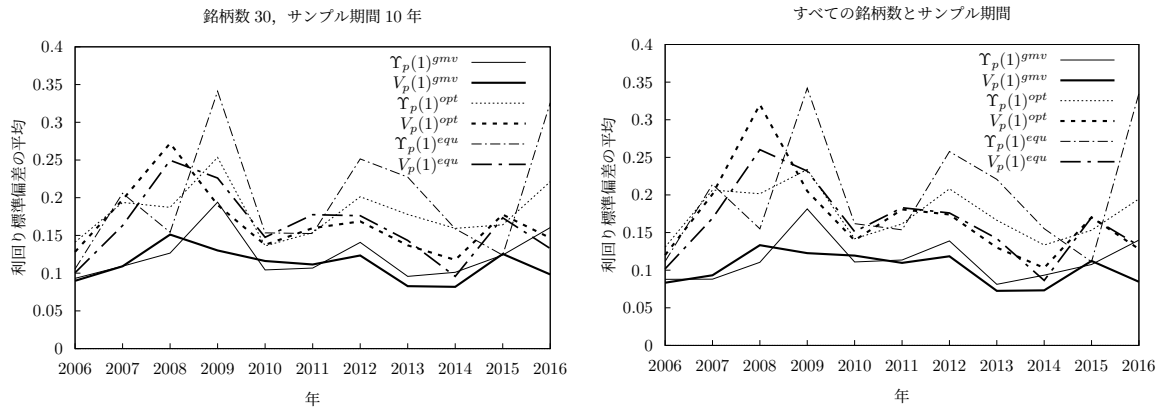


図5 ポートフォリオ利回り標準偏差の平均

個の、右図は 104,400 個の利回り標準偏差 $\Upsilon_p(1)$ と $V_p(1)$ について平均を取っている。

それでは、これらの図から分かる興味深い点を指摘しよう。まずは、図3～図5の3種類の図それぞれで、左図と右図がほとんど同じような形になっている点である。左図は右図の116分の1に過ぎないデータを用いて算出されている。両者は微妙に異なる動きを示していて、決して同じというわけではないが、驚くほどに両者は似ている。これは、銘柄数の違いやサンプル期間の違いによって、大きな差異が生じないことを示唆しているのであろう。

次にいえることは、3種類のポートフォリオの中から何を選ぼうとも、事後的パフォーマンスにそれほど大きな差異は発生しない。図3のポートフォリオの利回り平均の平均を見ると、その6本の線は、相互の乖離具合はそのときどきで様々であるが、完全にバラバラなランダムウォークというよりは、相互にある程度連動したような動向に見える。最適はずの接点ポートフォリオが他より優れたパフォーマンスを見せているわけではなく、最適性の根拠に乏しい等ウェイトポートフォリオと大差ない。また継続保有かリバランスかの比較でも、3種類すべてのポートフォリオでみなそれほど顕著な差はなく、それこそ勝ったり負けたりである。

図4はポートフォリオの利回り平均の標準偏差であるが、利回り平均の散らばり具合は等ウェイトポートフォリオが一番小さく、次に最小分散ポートフォリオで、最大の散らばりは接点ポートフォリオである。3種類のポートフォリオの中では、等ウェイトポートフォリオが最も事後的パフォーマンスが堅いのである。継続保有かリバランスかの比較では、3種類のポートフォリオすべてで、継続保有よりもリバランスの方が値が小さくなる傾向が顕著である。

図5にある、ポートフォリオ利回りの標準偏差の平均を見ると、最小分散ポートフォリオが明らかに他2つより小さくなっている。他2つの接点ポートフォリオと等ウェイトポートフォリオは概ね同レベルであろう。また継続保有対リバランスの比較では、利回り標準偏差の大小に明確な特徴は見られない。このことでもって、最小分散ポートフォリオが最小リスクのパフォーマンスといえるかどうか、判断は微妙である。図4を見ると、最小分散ポートフォリオの平均の標準偏差が最小ではなく、等ウェイトポートフォリオよりも大きくなっている。つまり、利回り平均の散らばり

は最小分散ポートフォリオの方が大きく、それだけリスクが大きくなっているとも考えられよう。

4.3 もっと長い期間で見ると

ここまでの議論では、事後的パフォーマンスの対象期間をポートフォリオ構築後の1年間としていた。株式への投資には長期保有が推奨されることも多いので本来なら対象期間をもう少し長くした場合の利回りの方が実践的かもしれない。しかしそう単純には行かない事情もある。

接点ポートフォリオや最小分散ポートフォリオは、それを構築する際の投資比率の計算に、株式銘柄の利回り平均や分散共分散の推定が必要になる。これら推定値には、ポートフォリオ構築時点までの過去データを使って得た標本統計量を当てる。ポートフォリオ構築時点以降、事後的パフォーマンスを計測しようとして時間が経過していくと、これら推定値はどんどん古くなっていく。いい換えると、ポートフォリオを構築して以降、新しい情報が入ってくるので、標本統計量の推定値は更新され、それに伴って接点ポートフォリオや最小分散ポートフォリオの投資比率も変更される必要がある。ここで扱っているのは月次利回りデータであるから、本当なら投資比率を毎月再計算すべきかもしれない。しかし、毎月の更新を考慮するなら、そもそも銘柄組合せを固定させておく必然性もなく、毎月無作為抽出をやり直して銘柄組合せも作り直すべきであろう。

このように、毎月更新される情報に関してその最適性を追求していくなら、シミュレーションの実行方法は他にどのような手法でも考えられる。がしかし、当然のこと計算負荷は飛躍的に増大する。現状の手法でもってしても、連続的に1か月少々の計算時間が必要になるので、これ以上計算プロセスを複雑化させることはあまり現実的な対応とはいえない。そこで、ポートフォリオ構築時点での投資比率が、半年から1年ほど経過した時点でどれほどの意味ある数字か個人的には疑問の余地もあるが、計算負荷による限界という観点から、投資比率は1年間不変であるものとする。以上のような理由から、事後的パフォーマンスの対象期間を構築時点以降1年間に限定している。

構築時点の推定値に依存する接点ポートフォリオや最小分散ポートフォリオであるなら、以降1年間に限定されるのはやむを得ないが、等ウェイトポートフォリオはその推定値に依存してないから、何年先であってもその事後的パフォーマンスを計測できる。そこで構築後1年間のみならず3年間の事後的パフォーマンスも計算してみる。ただし、銘柄組合せを作成するときの無作為抽出は、構築後1年間のデータがフルに揃っている銘柄群から実行されるから、これまでに用いてきた銘柄組合せでは、構築後1年を経過して3年に至る前までにデータ欠損の発生する銘柄が若干数存在する。そのような銘柄を含んだ銘柄組合せは排除されている。その結果、1試行につき必ずしも常に900個の組合せが存在するわけではないが、排除される銘柄組合せは高々1~2個である。

ここでは等ウェイトポートフォリオに限定して、その構築後の期間が1年間の場合の事後的パフォーマンスと期間が3年間の場合の事後的パフォーマンスを比較しよう。期間1年か3年かの違い、および継続保有かリバランスかの違いで計4つのケースが存在する。これら4ケースを4本の線としてプロットしたのが、図6~図8である。前と同様、これら各々について左図は「銘柄数30、サンプル期間10年」という1試行の結果を、右図は「すべての銘柄数とサンプル期間」として試行116回を集計した結果である。期間3年の継続保有で得られる利回りは、 $T = 36$ である

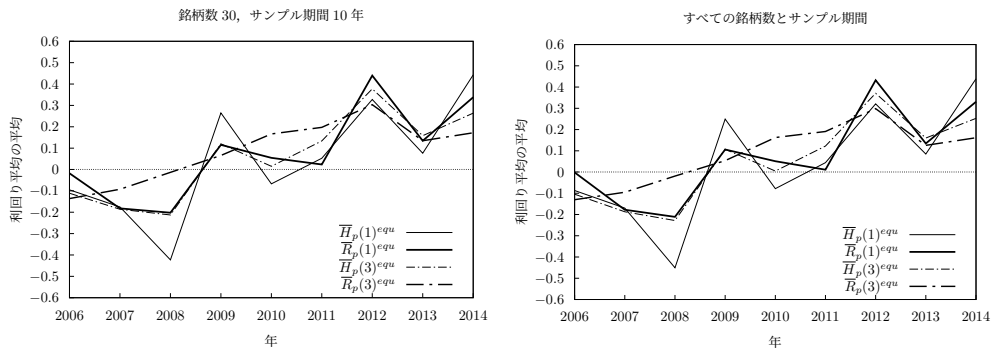


図 6 ポートフォリオ利回り平均の平均：等ウェイト 1 年と 3 年

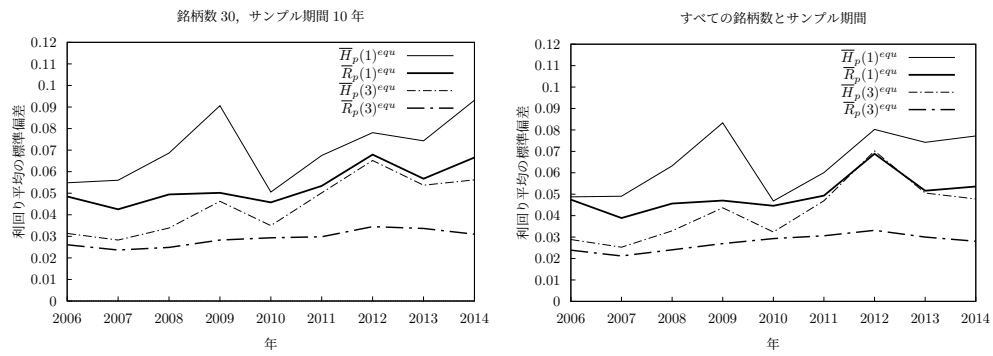


図 7 ポートフォリオ利回り平均の標準偏差：等ウェイト 1 年と 3 年

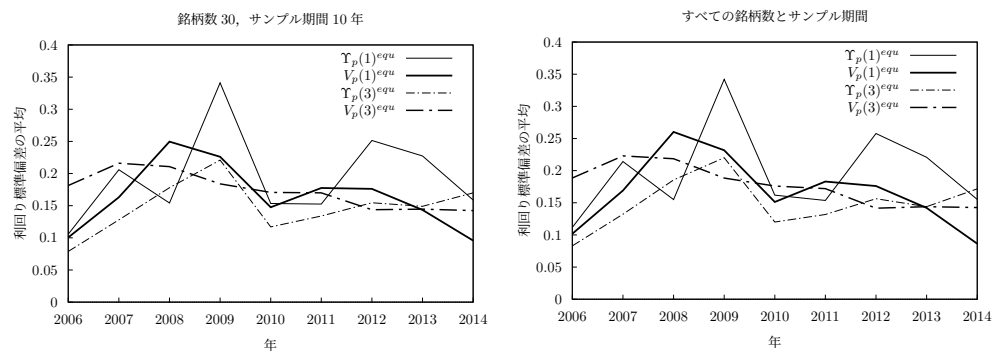


図 8 ポートフォリオ利回り標準偏差の平均：等ウェイト 1 年と 3 年

から、平均が $\bar{H}_p(3)^{equ}$ 、標準偏差が $\Upsilon_p(3)^{equ}$ であり、期間 3 年のリバランスで得られる利回り平均が $\bar{R}_p(3)^{equ}$ 、利回り標準偏差が $V_p(3)^{equ}$ である。また $\bar{H}_p(1)^{equ}$ と $\Upsilon_p(1)^{equ}$ は、期間 1 年の継続保有の利回り平均と標準偏差、 $\bar{R}_p(1)^{equ}$ と $V_p(1)^{equ}$ は、期間 1 年のリバランスで得られる利回り平均と標準偏差である。図 6 は「平均の平均」のプロットなので、 $\bar{H}_p(1)^{equ}$ と $\bar{R}_p(1)^{equ}$ 、 $\bar{H}_p(3)^{equ}$ 、 $\bar{R}_p(3)^{equ}$ について左図は 900 個の値の平均、右図は 104,400 個の値の平均を示した図である。図 7 は「平均の標準偏差」で、 $\bar{H}_p(1)^{equ}$ と $\bar{R}_p(1)^{equ}$ 、 $\bar{H}_p(3)^{equ}$ 、 $\bar{R}_p(3)^{equ}$ の散らばり具合を見ている。図 8 は「標準偏差の平均」を示していて、 $\Upsilon_p(1)^{equ}$ と $V_p(1)^{equ}$ 、 $\Upsilon_p(3)^{equ}$ 、 $V_p(3)^{equ}$ の平均を取ったものである。

それでは図 6～図 8 の特徴を指摘する。まずは左図と右図の類似性は前と同じである。次にこの 4 つのケースでは、ほとんど優劣の差ははっきりしない。唯一指摘できるような一貫性は、図 7 の平均の散らばり具合において、リバランスは継続保有よりも標準偏差が小さいという点であろうが、これとてそれほど大きな差異が認められているわけではない。他の図 6 や図 8 では 4 ケースの優劣は時点毎にまちまちである。3 年間という期間が 1 年間よりも優れているとも主張できない。一般的に広く認識されている長期投資の優位性は、その根拠が乏しいといわざるを得ない。このシミュレーション結果では、投資期間が長くなると事後的パフォーマンスが改善するという特徴はほとんど観察されない。

5 結びに代えて

本稿ではポートフォリオの事後的パフォーマンスを計測するのが目的である。事後的パフォーマンスの尺度はポートフォリオの利回りであろう。そこでまず、利回りの計算方法について概念整理を行った。この議論を踏まえて、事後的パフォーマンスとして、ポートフォリオ構築時点以降に継続保有される場合とリバランスされる場合の 2 つのケースを想定した利回りを計算した。多数の銘柄組合せを無作為抽出で作成し、その銘柄組合せ 1 つ 1 つに 3 種類のポートフォリオを構築し、構築時点以降のパフォーマンスを継続保有の場合とリバランスする場合についてシミュレーションする。1 つの銘柄組合せで計 6 種類の利回りが計算され、構築時点以降の一定期間の利回りの平均と標準偏差を算出する。銘柄組合せは 1 つの時点で 10 万個超存在するが、ポートフォリオの事後的パフォーマンスの利回り平均と標準偏差を、多数の銘柄組合せについて平均あるいは標準偏差を取ること、事後的パフォーマンスの特徴を調べた。以上が本稿の分析内容である。

以上の結果から分かったことは、6 種類の事後的パフォーマンスはどれも優劣明確ではなく、相互に勝ったり負けたりである。どのポートフォリオがよいかははっきりしないのである。この「優劣明確ではない」という点を示したことがむしろ本稿の学術上の貢献であろうと筆者は考える。いうまでもないことであるが、理論的には接点ポートフォリオが最適なポートフォリオであることは、主に学界では議論の余地がない確立した言説であるが、実際のパフォーマンスはそれほどでもない。また最小リスクをもたらすはずの最小分散ポートフォリオのリスクは、事後的パフォーマンスという観点から他に比べて小さいかどうかとも判然としにくい。それに比べ、等ウェイトポートフォリオの事後的パフォーマンスにおける健闘ぶりが際立つ。等ウェイトポートフォリオは、接点

ポートフォリオや最小分散ポートフォリオに決して引けを取らない。むしろ凌駕することも少なくない。そこでどのポートフォリオの事後的パフォーマンスが良好なのかは、結局のところそのポートフォリオを実行する際の手間暇、つまり構築コストの大小が実用上の重要な決め手となりはしないだろうか。そこで、最後にこの構築コストを整理検討することで本稿の結びに代えたい。

まずは3種類のポートフォリオ構築の手間暇の比較である。接点ポートフォリオと最小分散ポートフォリオは、銘柄個々の利回り平均と分散共分散の標本統計量を推定する必要がある。そして、これら2つのポートフォリオは投資比率の計算に一定の数値計算を実施する必要がある。最小分散ポートフォリオは危険資産の組合せだけから算出できるが、接点ポートフォリオはそれに加えて無危険利子率から接線を考慮する必要がある。データの数値次第でこの接線が算出できないことも少なからずあり、そのため、計算の難易度は最小分散ポートフォリオより接点ポートフォリオの方がはるかに厄介である。それに比べて、等ウェイトポートフォリオの投資比率は計算の手間暇がほぼゼロである。接点ポートフォリオや最小分散ポートフォリオは、利回り平均・標準偏差で見て他を圧倒する良好な事後的パフォーマンスを見せないなら、大きな手間暇をかけてわざわざ構築するほどのものであろうかとの評価は十分妥当性を持つように思う。

次に継続保有かリバランスかの比較である。本稿で算出した事後的パフォーマンスを全体的に見渡すなら、リバランスが継続保有を若干優越しているような印象はある。しかしその構築コストを考慮するなら、リバランスが継続保有より優位にあるとはとても考えられない。これもいうまでもないが、リバランスは毎月の組替えであるから、これを実行するなら手数料を毎月負担しなければならない。対して継続保有は、構築時に一度だけ手数料を支払う。構築後1年間の期間であっても、両者の手数料の大きさは十数倍の差異となり得る。利回り平均・標準偏差で見る限り、この差異を相殺して余りあるような良好な事後的パフォーマンスとはとても思えない。等ウェイトで構築後1年間と3年間の比較も試みたが、事情は同じである。リバランスの場合、3年間は1年間の3倍の数の組替えを行うことになるが、このコスト増加に見合うリターン増加があるようには見えない。

以上の検討により、結局ポートフォリオの構築には最小の構築コストが最も望ましい。それは等ウェイトポートフォリオを継続保有することであろう。これが真の最適ポートフォリオということになるのかもしれない。

参考文献

- [1] Fama, Eugene F., 1976. *Foundations of Finance*, Basic Books, Publishers, New York.
- [2] Markowitz, Harry, 1952. "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol.7, No.1 (March, 1952), pp.77-91.
- [3] Merton, Robert C., 1972. "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* Vol.7, No.4 (September, 1972), pp.1851-1872.
- [4] 辻幸民「ポートフォリオ理論の再検討」『三田商学研究』第64巻5号(2021年12月), 35-62頁.