ポートフォリオ理論の再検討

辻幸民

2022 年 2 月 2 日『三田商学研究』第 64 巻 5 号

概要

本稿ではシミュレーションを通じてポートフォリオ理論を再検討したい。ここのシミュレーションとは，ポートフォリオを構成する銘柄を無作為抽出し，その銘柄の実際の収益率データを用いてポートフォリオのパフォーマンスを計算する。全部で 70 万回を超えるポートフォリオを構築し，ポートフォリオのリスクの意味およびポートフォリオの事後的パフォーマンスについて検討する。リスクの意味とは，分散化によるポートフォリオのリスク削減には一定の限界があると言われているが，この意味について考察したい。またポートフォリオの事後的パフォーマンスとは，理論的には有効フロンティア上の接点ポートフォリオが最適なはずであるが，そのポートフォリオが事後的にも最善かどうかを検討する。特にポートフォリオの構成比率に非負制約を設定するか否かで，どのような差異があるのかに注目する。「非負制約あり」の場合は「非負制約なし」に比べ確実に有効性で劣っている。しかし事後的パフォーマンスという観点では，「非負制約あり」の接点ポートフォリオは「非負制約なし」のそれを凌駕する。さらに，より高い事後的パフォーマンスを発揮するのが等ウエイトのポートフォリオで，その勝敗は圧倒的優位と言えるぐらいの驚くべき結果をシミュレーションは教えてくれる。

キーワード：ポートフォリオ理論，有効フロンティア，分散化リスク，事後的パフォーマンス

1　はじめに

図 1 はポートフォリオ理論を表した絵である。今日ではあまりに有名なこの絵の説明はもはや必要ないかもしれないが，議論の端緒として簡潔に述べよう。図の縦軸 μ_R は収益率の平均を，横軸 σ_R はその標準偏差である。R_F は無危険利子率であり，縦軸上の点 R_F は安全資産を表している。また曲線 ALGB は，危険資産のみから構成される有効フロンティアである。縦軸上の点 R_F から曲線 ALGB への接線 R_FT が，安全資産と危険資産とを組合せる場合の有効フロンティアとなり，接点 T が危険資産の最適ポートフォリオである。なお曲線 ALGB 上の最も左側にある点 G を表すポートフォリオは，本稿では最小分散ポートフォリオ (global minimum variance portfolio，略して GMV) と称される。

ここで 2 つの点を注意しておく必要があろう。1 つは「有効フロンティア」という名称である。正しい有効フロンティアは曲線 ALGB の左上側の箇所，点 A から点 G までの曲線 ALG が有効フロンティアである。ということは，左下の曲線 GB は有効フロンティアではない。同じ標準偏差でありながら，より大きな収益率平均をもたらす別のポートフォリオが存在するからである。し

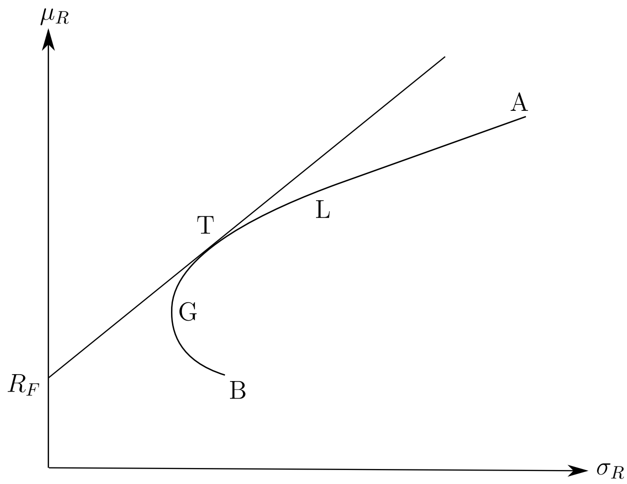

図 1　ポートフォリオ理論

かし以下の議論では曲線 ALGB 全体が問題にされる。そこで (他に適当な名称もないので) 本稿では，特に議論が混乱する懸念もないから，曲線 ALGB 全体のことを有効フロンティアと称している。2 点目の注意は「最小分散」の意味である。厳密には 2 種類の「最小」がある。1 つは有効フロンティアの曲線がそうであるように，平均を所与とした場合の最小分散の集まりという意味での「最小」である。これは平均をその値に限定した中で分散を最小化させたものという意味に他ならない。もう 1 つは点 G がそうであるように，平均の値を特定しない場合の最小分散である。これはあらゆるポートフォリオの中で分散が最小になっているという意味で，本当ならば英語表記のように「大域的」と明記すべきかもしれないが，これも特に混乱の恐れはないので，以下の議論で大域的最小分散ポートフォリオのことを，単に最小分散ポートフォリオと称している。

一般に，曲線 ALGB が左側に膨らんだ形になるという特徴は，分散投資の利益であると考えられている。例えば，点 B が何か任意の単独資産を表す点であったとする。複数の危険資産を組合せた有効フロンティアの形が左側に膨らむということは，点 B の資産のリスク (収益率標準偏差) より，別の資産を組合せたポートフォリオのリスクの方が小さくなる場合があるということである。元の資産よりリスクの大きな別の資産を組合せることで，組合せた結果のポートフォリオのリスクは，元の資産のリスクより小さくなり得るのである。ポートフォリオのリスクは小さくできるという点を，ここでは分散投資の利益と称することにしよう。

それでは，ポートフォリオを構成する資産の種類が増えていくとき分散投資の利益は大きくなるのかどうか。資産の種類が増えることをここでは「分散化が進むとき」と称しよう。あるいはここのポートフォリオとは，具体的には複数種類の株式を組合せて保有することが想定されているので，「資産の種類」が増えるというのは，ポートフォリオを構成する株式の様々な銘柄が増えることを意味する。そこで以下では「資産の種類」の数のことを株式の「銘柄数」と表現することにしたい。ポートフォリオを構成する株式銘柄数が増えて分散化が進むとき，ポートフォリオ全体のリ

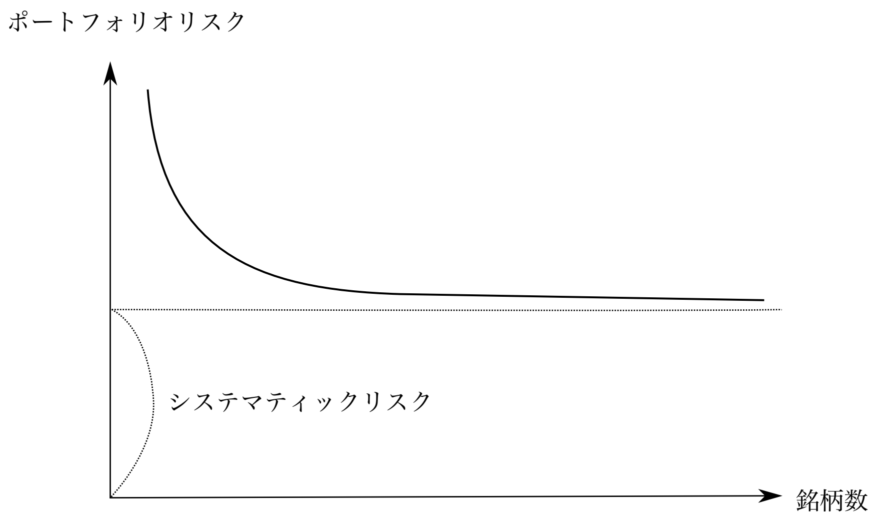

図 2　ポートフォリオのリスク

スクはどうなるであろうか。普通はポートフォリオのリスクは徐々に低下していくと考えられている。つまり曲線 ALGB は，ポートフォリオの分散化が進むと左側へシフトしていくというのが自然な解釈であろう。実はこれについて比較的早い時代からコンセンサスのようなものが形成されていて，それによると，分散化が進むとリスク減少という分散投資の利益は確かにもたらされるのであるが，ただそれには一定の限界があるものと考えられている。ここで言う「限界」を表現したのが図 2 である。この図は 1970 年頃から今の時代に至るまで finance のあらゆる教科書で描かれている。故に今「コンセンサスのようなもの」と表現した。

図 1 の $\mu_R - \sigma_R$ 平面上の 1 点は 1 つのポートフォリオを意味していて，選択すべき危険資産ポートフォリオは曲線 ALG(危険資産の有効フロンティア) 上で表現されるが，曲線のどの点のポートフォリオを取り上げるかによって，ポートフォリオのリスクは当然異なる値となる。リスクを評価するのに，どういうポートフォリオを対象としているかはすぐ後で述べるが，とりあえず何か適当なポートフォリオのリスクが一義的に決められるとしよう。そのポートフォリオのリスクの大きさとそのポートフォリオを構成する銘柄数との関係を示したのが図 2 である。この図の意味するところは，はじめ銘柄数の少ないうちは，銘柄数の増加でポートフォリオリスクは大きく低下するが，銘柄数が増えてくると，ポートフォリオリスクの低下の程度はごくわずかになる。特に図の水平 (に見える) 部分は，銘柄がどれだけ多くなってもポートフォリオリスクはほとんど不変ということであるから，分散化による分散投資の利益には限界が存在することを意味する。この点を本稿では以下「分散化の限界」と称する。また分散化によっては消せないリスクのことをシステマティックリスクと称したりする。

以上の内容は，finance のすべての教科書で触れられるポートフォリオ理論の最も基本的内容であるが，若干の論理の飛躍がないだろうか。今紹介した図 1 と図 2 という 2 つの絵は，関連していると言えば関連していると考えることもできるが，直接的関係がないと言えば，確かに直接的な関

係は存在しないとも言える。というように，図 1 と図 2 の関係は実は曖昧模糊としている。本稿の目的の 1 つは，この関係性について再検討することである。またこの検討を通じて，ポートフォリオ理論を現実適用しようとするとき，深刻な問題点が浮び上がる。

まずどうして図 1 と図 2 の関係が曖昧なのかを指摘しておこう。図 2 の曲線を導出するには，当然のことながら，ポートフォリオのリスクを計算する必要がある。そして，このリスクを計算するにはどういうポートフォリオを構築するか (つまり危険資産の構成比率をどうやって決めるか) を予め決めておかなければならない。当たり前である。筆者の知る限り，図 2 を描くときのポートフォリオとは，危険資産の構成比率を等ウエイトとすることが想定される。ところが，等ウエイトのポートフォリオは図 1 のどこで表現されるか。実は分からないのである。そもそも等ウエイトのポートフォリオが有効かどうか，曲線 ALG 上にあるかどうかもはっきりしないが，恐らくは曲線 ALG よりも右下に位置するだろう。

図 1 の含意は，危険資産は曲線 ALG 上のポートフォリオを選ぶべきであり，接点 T のポートフォリオが最適な危険資産の構成比率になるという主張である。ならば，分散化の限界を示すために図 2 を描きたいなら，ポートフォリオのリスクは，等ウエイトポートフォリオではなく，接点ポートフォリオのリスクを計算すべきではないか。あるいは，曲線 ALG 上のどこかの点を予め決めておいて (例えば一番左端の点 G など)，その点におけるポートフォリオのリスクを計算すべきであろう。そのような計算をしないと，図 1 と図 2 が整合的な絵であるとは言えない。以上の議論が本稿の最初の論点である。

本稿のもう 1 つの論点はポートフォリオのパフォーマンスについてである。図 1 の接点ポートフォリオ T が最適なのは，危険資産ポートフォリオとしてその構成比率で危険資産を組合せ，さらにこれに安全資産を組合せることが投資家の期待効用を最大化するからである。接点ポートフォリオ T は，ポートフォリオ理論の教える最も望ましい最適なポートフォリオと言える。しかし理論的な最適ポートフォリオが結果的に最善なものと言えるかどうかはまた別問題である。それでは実際のところ，接点ポートフォリオはどれぐらい望ましいポートフォリオなのであろうか。この問題の答えを知るには，接点ポートフォリオの実際のパフォーマンスを調べるしかない。すなわち，接点ポートフォリオの構成比率でもって銘柄を実際に購入してポートフォリオを構築する。その後，そのポートフォリオをしばらく保有し続ける。この保有によって獲得できる収益率はどれぐらいであろうか。最適以外のその他のポートフォリオを構築した場合と比較し，最適ポートフォリオにより得られる収益率はやはり一番優れているのであろうか。

通常，収益率平均の値どおりに収益率が実現することはほとんどないから，ポートフォリオ理論の観点から見た最適ポートフォリオが，収益率の実現値でも最善である保証はどこにもない。本稿では以下，ポートフォリオ理論による最適ポートフォリオのことを「事前的に」最適と称したりする。他方，ポートフォリオを構築した後，それが実際に実現させた収益率を「事後的」パフォーマンスと称することにする。言い換えると，事前的に最適なポートフォリオは事後的にも最善なパフォーマンスを達成しているのであろうか。本稿の後半の論点はポートフォリオを数十万回シミュレーションすることでこの点を評価することである。

ポートフォリオは銘柄個々の組合せであるから，ポートフォリオ収益率の平均と標準偏差は，個

別銘柄の収益率平均と標準偏差 (および銘柄間の相関係数) から計算される。銘柄各々の収益率平均と標準偏差を銘柄の月次データから推定し，それらの値をポートフォリオの構成比率でもって組合せれば，ポートフォリオ収益率の平均と標準偏差の値を求めることができる。このようにして得られた収益率平均と標準偏差のことを，本稿ではポートフォリオの事前的パフォーマンスと称することにする。これは，構築時点において個々の銘柄の収益率予想 (平均や標準偏差) から期待される，ポートフォリオの予想パフォーマンスという意味である。他方，ポートフォリオをその構成比率で実際に構築し，その後一定期間保有するなら，そのポートフォリオのもたらす配当金や値上り益・値下り損から収益率を計算することができる。保有期間を例えば構築後 1 年間とし，毎月の収益率を計算していけば，12 個のポートフォリオ収益率の値を得ることができる。そして，これらの標本平均と標本標準偏差を計算すれば，これもポートフォリオのもたらすリターンとリスクである。このようにして計算されたリターンとリスクを，本稿ではポートフォリオの事後的パフォーマンスと称する。*1

危険資産を組合せた様々なポートフォリオの中で，その事前的パフォーマンスは確かに理論的な最適ポートフォリオ，つまり接点ポートフォリオが事前的に最適であることがシミュレーションでも確認できる。当然である。ここで有効フロンティアの曲線を描くのに非負制約の有無を問題にしたらどうなるか。非負制約の有無に応じて 2 種類の曲線が描ける。非負制約がある場合は非負制約がない場合に比べ，選択の幅が狭まるだけ，有効フロンティアの曲線は有効ではなくなる。計算上は，「非負制約あり」の場合に描かれる曲線は，「非負制約なし」の場合に描かれる曲線の内側に存在するので，理論的には「非負制約あり」の曲線を有効フロンティアと称するのはおかしい。それでも実用上は「非負制約あり」の曲線から接点ポートフォリオを求めることができる。この接点ポートフォリオは，事前的パフォーマンスでは「非負制約なし」と比べて有効性で必ず劣るのであるが，その事後的なパフォーマンスまで劣るかどうかは分からない。シミュレーションすると，「非負制約あり」の場合の接点ポートフォリオが，「非負制約なし」の場合の接点ポートフォリオよりも，事後的パフォーマンスでは決して劣らないことが示される。シミュレーションからさらに判明することは，実は両ポートフォリオよりももっと優れたポートフォリオがあって，それは等ウエイトのポートフォリオである。

等ウエイトポートフォリオとは，例えば富が 1000 万円あるとして，対象となる資産が 10 銘柄であるなら，各銘柄等分に 0.1 の構成比率で 100 万円ずつ投資するというポートフォリオである。数十万回におよぶシミュレーションを経て，等ウエイトポートフォリオが最善との結論はある意味驚くべき内容ではないか。大変に古い時代，恐らくはポートフォリオ理論登場よりも遙かに前の時代から，資産三分法という考え方が広く存在していて，それは資産を現金・株式・金 (現代なら不

*1 もう少し厳密に言うと，ポートフォリオの事後的パフォーマンスを測定するのに，ポートフォリオ構築後に銘柄間のリバランスを考慮するか否かで，ポートフォリオ収益率の計算方法は異なってくる。ポートフォリオ構築後の各月で，ポートフォリオにおける各銘柄の構成比率が当初の比率を維持するよう，適宜売買が繰り返されることを想定するのが「リバランスあり」であり，そのような途中の売買をせず，最初の売買だけであとはそのまま放置すること (buy and hold) を想定するのが「リバランスなし」である。本稿で言う事後的パフォーマンスとは，一貫して「リバランスあり」を想定した収益率を計算している。これは慣例あるいは計算の便宜に依るところが大きい。「リバランスあり」の場合は，その手数料の大きさが現実実効性の問題として重要になるが，これについては別の機会に議論する。

動産) に 3 等分して保有すべきというものである。資産は単純に等分しただけでも良いから，できる限り分散投資すべきという点がこの話の要諦であろう。もちろん，これは論理的な根拠があるわけではなく，経験則に依る直感的な見方なのであろうが，この延長線にあるのが，今日言うところの等ウエイトポートフォリオではなかろうか。このような直感的な考え方に依拠するのではなく，キチンとした論理でもってポートフォリオを構築しようというのが，1952 年のマルコービッツに始まる現代ポートフォリオ理論だったはずである。今日になって，相当に負荷の大きいシミュレーションが手軽に普通の PC で可能になって判明したことが，現代ポートフォリオ理論の教える接点ポートフォリオよりも等ウエイトポートフォリオの優位性だったとは，現代ポートフォリオ理論とは一体何だったのか。筆者個人は脱力感を禁じ得ない。

本稿の構成は以下のとおりである。ポートフォリオ理論の議論が，現実データを使った本物のポートフォリオで成立しているかどうか確認するのが本稿の目的であるから，まず第 2 節で，どうやって現実データを使ったポートフォリオを構成するのか，シミュレーションの方法を説明する。第 3 節はごく標準的なポートフォリオ理論の概説である。次に第 4 節で本稿の前半の論点，分散化の限界の問題を検討する。図 2 は古くから描かれているが，等ウエイトのポートフォリオで本当に図 2 がデータから描けるのかどうかを確認し，さらにその他のポートフォリオを対象にしたとき，分散投資の利益がどうなるかを検討する。第 5 節ではポートフォリオのパフォーマンスの問題を議論する。理論的には最適であるはずの「非負制約なし」の場合の接点ポートフォリオをはじめ，「非負制約あり」の場合や等ウエイトのポートフォリオや最小分散ポートフォリオまで，それぞれの事後的パフォーマンスをシミュレーションから比較する。

2　シミュレーション：銘柄抽出の方法

シミュレーションを実行する際，まずはポートフォリオを構成する銘柄を決めなければならない。実務でのポートフォリオ構築は，結局のところ銘柄選択に作成者の嗜好が強く反映するということかもしれないが，ここではそのような恣意性を極力排除したい。そこで銘柄をランダムに無作為抽出してポートフォリオを構成するものとしよう。この節では，以下の議論で依拠することになるポートフォリオについて，その構築方法を説明する。

例えば 1 つのポートフォリオを 5 銘柄から構成するものと決めておいて，その 5 銘柄を乱数を使って無作為に抽出する。銘柄各々の収益率平均，分散，共分散を推定する必要があるから，仮に今，2006 年 5 月末の時点にいて平均等を推定したいとする。推定のためのデータは 5 年間の月次データとしよう。2006 年 5 月末から見た過去 5 年間の月次データとは，具体的には 2001 年 6 月から 2006 年 5 月までのデータである。フルに (欠損値なしに) サンプルサイズ $60(= 5 \times 12)$ の収益率データを揃えるには，データベース上のデータ収録開始日が 2001 年 5 月以前の銘柄でなければならない。また本稿では，2006 年 5 月末で (平均等を推定して) ポートフォリオを構築した後，そのポートフォリオの事後的なパフォーマンスも計測したい。そこで 2006 年 5 月末以降のデータも併せて収集する。ポートフォリオ構築後の 1 年間を計測したいので，2006 年 6 月から 2007 年 5

月の月次データが必要である。[*2]

以上のことから，2006 年 5 月末のポートフォリオ構築に際し，無作為に抽出される銘柄は，5 年前の 2001 年 6 月から 1 年後の 2007 年 5 月までのデータが完全に存在する銘柄群の中から選択されることになる。そのような銘柄を 5 つ抽出し，その 5 銘柄を使ってポートフォリオを作成する。5 銘柄をどのような構成比率で組合せるかにより，様々なポートフォリオを作ることになるが，本稿では以下 3 種類のポートフォリオを作成する。1 番目は等ウエイトのポートフォリオである。銘柄数が 5 つなら，1 銘柄につき 0.2(= 1/5) の構成比率で組合せる。2 番目は危険資産の最適ポートフォリオである。5 銘柄から有効フロンティアの曲線 1 本を導出し，縦軸上の無危険利子率の値からその曲線への接点を求める。この接点が危険資産の最適ポートフォリオであり，これを以下では接点ポートフォリオと称する。なおここでは，無危険利子率には長期国債の利回りを当てる。[*3] 3 番目は最小分散 (GMV) ポートフォリオである。危険資産 5 銘柄から計算される有効フロンティアの，最も左側の点が最小分散ポートフォリオである。以上のように，5 銘柄の組合せ 1 つから 3 種類のポートフォリオを計算する。

次に，まったく同様にして別の 5 つの銘柄を無作為抽出し，その新しい 5 銘柄を使って，また上記 3 種類のポートフォリオを計算する。以上のことを 900 回繰り返す。つまり，2006 年 5 月末時点でのポートフォリオ構築を想定し，無作為抽出した別々の 5 銘柄で構成される銘柄の組合せを 900 個作成し，各組合せについてそれぞれ 3 種類のポートフォリオを作成するのである。これら 3 種類のポートフォリオの 1 つ 1 つについて，その収益率平均と標準偏差が各々 900 個ずつ計算できる。これら平均と標準偏差の値は，ポートフォリオを構成する 5 銘柄の構成比率を与件として，5 銘柄個々の収益率平均と標準偏差，そして相互の相関係数から数式に従って直接計算されるものである。このように計算される，ポートフォリオ収益率の平均と標準偏差を便宜上，ポートフォリオの事前的パフォーマンスと称することにしたい。

ただ，これら事前的パフォーマンスの値は，ポートフォリオの実際のパフォーマンスとあまり関係がない。1 つのポートフォリオが当初の構成比率で作成された後，そのまま 1 年間保有された場合，そのポートフォリオの毎月の収益率が 12 個計算される。これら 12 個の収益率から求められる平均と標準偏差は，いわばそのポートフォリオの事後的な成果と考えられる。そこでこのように

[*2] 本稿の依拠する株式銘柄の収益率データは，FDS(金融データソリューションズ) の提供する NPM 関連データサービス「日本上場企業月次リターン」である。これは各月の月末の株価 (終値) から計算される月々の収益率データである (配当がある場合は配当金を含んだ収益率)。それ故厳密に考えるなら，本稿の「パフォーマンス」という表現には若干齟齬がある。本当の株式取引の「パフォーマンス」(収益率) を計算するには，本来なら月末の株価を見てから (その月の収益率の値を知ってから) ポートフォリオの構成比率を計算し，その構成比率を実現するよう次の月初 (の朝一番) に株式を購入するのが現実的な取引であろうが，月の初日の株価データが入手できないのでそのような計算は実行できない。月々の収益率データの数字のみから計算される値をもってパフォーマンスとしたいなら，それは現実の株式取引を次のように擬製していることになる。毎日午後 3 時が東京証券取引所の取引終了時刻であるが，5 月末日午後 2 時 59 分にその月の収益率を計算し，それをデータの一部に使ってポートフォリオの構成比率を求めて 2 時 59 分 30 秒に注文を出す。実際には残りわずか 30 秒で約定できるかどうか危ういが，このような取引を想定すれば，終値だけから計算された収益率の数字でもって近似的にパフォーマンスとすることができよう。

[*3] 無危険利子率のデータは，財務省が公表している「国債金利情報」ファイルを利用している。そのファイルに収録されている各月末の 7 年物から 10 年物までの 4 つの利回りから計算される平均値を，各月末の無危険利子率とみなしている。

計算された収益率平均と標準偏差をポートフォリオの事後的パフォーマンスと称しよう。そして次に，別の 5 銘柄をあらためて無作為抽出し，同様にして 1 つのポートフォリオの事前的パフォーマンスおよび事後的パフォーマンスを求めることができる。無作為抽出によって 900 個の銘柄組合せを作るので，同様に都合 900 回，ポートフォリオの事前的および事後的パフォーマンスを求めることができる。

さて以上の説明は，2006 年 5 月末時点における 5 銘柄のポートフォリオ構築を前提にしている。次に構築時点を 1 年間ずらしたとしよう。2007 年 5 月末時点でポートフォリオを構築するのである。前と同様な条件を維持しようとするなら，対象となる銘柄群は，5 年前の 2002 年 5 月以前にデータ収録が開始され，1 年後の 2008 年 5 月までデータが揃っている銘柄の集合である。この銘柄群から 5 つを無作為抽出して，上記 3 種類のポートフォリオ各々について，事前的パフォーマンスと事後的パフォーマンスを表す収益率平均と標準偏差を計算する。そして，この手続きをまた 900 回繰り返す。

以上の一連のプロセスを，毎年 5 月末にポートフォリオを構成するものと仮定して，順に計算していく。2006 年 5 月末，2007 年 5 月末，$\cdots$，2016 年 5 月末まで 11 回繰り返す。各時点で 900 個の銘柄組合せを抽出しているので，全部で 9900 個の銘柄組合せを作成していることになる。ここまでが 1 つの計算プロセスである。以下ではさらに計算条件をいくつか変更して同じ計算をする。変更する計算条件とは，まずポートフォリオを構築する際の銘柄数である。5 銘柄，10 銘柄，15 銘柄，$\cdots$，という具合に変更していく。この上限は，平均や分散・共分散を推定するのに用いたデータのサンプルサイズに依存する。上の例では 5 年分の月次データ (サンプルサイズ 60) を用いていたので，その数学的な限界の最大値は 59 銘柄である。半端であるから上限を 50 銘柄としている。[*4]

平均等を計算するのに用いるサンプルサイズも「変更する計算条件」である。5 年分の月次データではなく，今度は 10 年分の月次データ (サンプルサイズ 120) を用いるとしよう。利用するデータの期間が長くなるので，当然，無作為抽出の対象となる銘柄群も異なってくる。例えば 5 銘柄なら，前で利用した 5 銘柄ではなく，新しい銘柄群からあらためて 5 つを選択し直すことが必要である。ポートフォリオ構築時点が 2006 年 5 月末なら，10 年前の 1996 年 6 月から 1 年後の 2007 年 5 月までデータが揃っている，そういう銘柄のグループが選択対象の銘柄群である。前と同様，各時点で 900 個の銘柄組合せを抽出し，ポートフォリオ構築時点が毎年 5 月末で，最後が 2016 年 5 月までの 11 時点とみなして計算を実行する。そして，5 銘柄，10 銘柄，15 銘柄という具合に銘柄数を増やしていく。今度は平均等を 120 のサンプルサイズで推定しているから，計算可能な最大の銘柄数は 119 である。端数であるから，最大 110 個の銘柄を無作為抽出してポートフォリオを作る。

平均等を推定するのに，同様にして，15 年分および 20 年分の月次データを利用する場合も試みる。各々のサンプルサイズは 180 と 240 であり，銘柄数の上限を 170 個と 230 個とする。データのサンプル期間が 5 年と 10 年，15 年，20 年の場合，ポートフォリオを構築する各時点で，いつのデータがサンプルの先頭になり，いつのデータがサンプルの終わりになるのか，若干錯綜するので

[*4] 数学的な限界とは，分散共分散行列の非特異性を維持するためである。

	サンプル期間				
	5 年	10 年	15 年	20 年	
構築時点	データ開始時点				終了時点
2006 年 5 月	2001 年 6 月	1996 年 6 月	1991 年 6 月	1986 年 6 月	2007 年 5 月
2007 年 5 月	2002 年 6 月	1997 年 6 月	1992 年 6 月	1987 年 6 月	2008 年 5 月
2008 年 5 月	2003 年 6 月	1998 年 6 月	1993 年 6 月	1988 年 6 月	2009 年 5 月
2009 年 5 月	2004 年 6 月	1999 年 6 月	1994 年 6 月	1989 年 6 月	2010 年 5 月
2010 年 5 月	2005 年 6 月	2000 年 6 月	1995 年 6 月	1990 年 6 月	2011 年 5 月
2011 年 5 月	2006 年 6 月	2001 年 6 月	1996 年 6 月	1991 年 6 月	2012 年 5 月
2012 年 5 月	2007 年 6 月	2002 年 6 月	1997 年 6 月	1992 年 6 月	2013 年 5 月
2013 年 5 月	2008 年 6 月	2003 年 6 月	1998 年 6 月	1993 年 6 月	2014 年 5 月
2014 年 5 月	2009 年 6 月	2004 年 6 月	1999 年 6 月	1994 年 6 月	2015 年 5 月
2015 年 5 月	2010 年 6 月	2005 年 6 月	2000 年 6 月	1995 年 6 月	2016 年 5 月
2016 年 5 月	2011 年 6 月	2006 年 6 月	2001 年 6 月	1996 年 6 月	2017 年 5 月
サンプルサイズ	60	120	180	240	
最大銘柄数	50	110	170	230	

表 1　構築時点とサンプル期間

	サンプル期間			
	5 年	10 年	15 年	20 年
	5 銘柄	5 銘柄	5 銘柄	5 銘柄
	10 銘柄	10 銘柄	10 銘柄	10 銘柄
	15 銘柄	15 銘柄	15 銘柄	15 銘柄
	⋮	⋮	⋮	⋮
	45 銘柄	45 銘柄	45 銘柄	45 銘柄
	50 銘柄	50 銘柄	50 銘柄	50 銘柄
		60 銘柄	60 銘柄	60 銘柄
		⋮	⋮	⋮
		100 銘柄	100 銘柄	100 銘柄
		110 銘柄	110 銘柄	110 銘柄
			120 銘柄	120 銘柄
			⋮	⋮
			160 銘柄	160 銘柄
			170 銘柄	170 銘柄
				180 銘柄
				⋮
				230 銘柄
計	10	16	22	28

表 2　サンプル期間と銘柄数の組合せ

表 1 にまとめた。例えば，平均等を推定するためのサンプルに 15 年分のデータを使う場合，2008 年 5 月にポートフォリオを構築するなら，1993 年 6 月から 2009 年 5 月までの収益率データが必要である。

上記のことを 1 つのポートフォリオ構築時点について見ると，銘柄数の違いとサンプル期間の違いで，900 個の銘柄組合せを都合 76 回作っていることになる。この 76 の内訳が表 2 である。例えば，サンプル期間を 5 年とした場合は，自由度の制約によりポートフォリオ構築に利用できる最大銘柄数を 50 銘柄として，銘柄数が 5 銘柄の場合から，10 銘柄の場合，15 銘柄の場合，$\cdots$，50 銘柄の場合まで，5 銘柄刻みで合計 10 回，900 個の銘柄組合せを作る。またサンプル期間を 10 年とした場合は，最大銘柄数は 110 銘柄で，同様に銘柄数が 5 銘柄の場合，10 銘柄の場合，15 銘柄の場合，$\cdots$，110 銘柄の場合を考慮するが，ただし 50 銘柄を超える銘柄数では 10 刻みとしているので，サンプル期間 10 年のときは 16 回，900 個の銘柄組合せを作る。サンプル期間 15 年の場合は最大銘柄数が 170 銘柄であるとし，表にあるように，900 個の銘柄組合せを作るのは 22 回である。サンプル期間 20 年では最大銘柄数が 230 銘柄で，28 回である。このように 1 つの構築時点で見ると，銘柄数の違いとサンプル期間の違いによって $76(= 10 + 16 + 22 + 28)$ 回の異なる試行が存在し，この試行 1 つ 1 つすべてに，各々 900 個の銘柄組合せを構築するのである。そしてさらに，11 の構築時点を計算対象としているので，全部で 836 回 (76×11) の試行を行っていることになる。

本稿の以下の議論では，以上のようにして作成したポートフォリオについて考察する。

3　ポートフォリオの若干の数理

まずこの節では，前で紹介した図 1 と図 2 の理論的な根拠を明示しておこう。図 1 にある有効フロンティアの曲線や図 2 の曲線はどのようにして導かれるのか。これを確認するところから議論を始める。

3.1　有効フロンティア

危険資産の有効フロンティアを求めるには，図 1 の曲線 ALGB を導出する必要があり，そのためには次の形の数学問題を解かねばならない。銘柄 i の収益率平均を μ_i，ポートフォリオの構成比率を x_i で表す。ポートフォリオを構築する銘柄数は N で，$i = 1, \cdots, N$ である。これらの記号を使うと，ポートフォリオの収益率平均は $\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$ となる。また銘柄 i と銘柄 j の収益率共分散を σ_{ij} で，その構成比率をそれぞれ x_i と x_j で記すと $(i = 1, \cdots, N,\ j = 1, \cdots, N)$，ポートフォリオ収益率の分散は $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$ である。有効フロンティアを描くために解く数学問題とは次の

ような制約付き最小化問題である。

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1,\cdots,x_N}{\text{minimize}} \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{k=1}^{N} x_k = 1, \\
& \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i = \mu^*
\end{aligned}
$$

今，ポートフォリオの収益率平均が何か適当な値 μ^* であるとする。μ^* の値を所与として，ポートフォリオ収益率の平均が μ^* に等しく，かつポートフォリオを構成する銘柄の構成比率が合計 1 であるという 2 つの制約を満たしつつ，ポートフォリオ収益率の分散を最小化するような構成比率 $x_1,\cdots,x_N$ を求めること，これが上記の最小化問題の意味するところである。

言い換えると，ポートフォリオ収益率の平均 μ^* に設定された 1 つの値に対し，収益率の分散を最小にするような構成比率 x_i の組合せが求められ，その構成比率により求められた分散の値は，μ^* の値を所与とした最小分散である。次に収益率平均 μ^* の値を変える。当然のこと，収益率の分散を最小化する構成比率の値は変化し，そのときの分散も違った値となる。つまり，μ^* の 1 つの値に分散の値が 1 つ求められ，多数の μ^* の値について同様の計算をすれば，個々の μ^* の値に対応した分散の値も多数求められる。分散の平方根が標準偏差だから，多数の平均と標準偏差のペアが得られることになって，これらを図にプロットしていけば有効フロンティアの曲線となる。

ところで，上記の問題の解は x_i の正負を問わない。x_i の値が負というのは，その銘柄を空売りしていることを意味する。ポートフォリオは正の値の構成比率の銘柄を購入し，負の値の構成比率の銘柄を空売りすることで構築されることになる。これを「非負制約なし」と称しよう。他方，負の値がないこと，つまり構成比率が非負であることを制約に追加することもできる。この場合を以下では「非負制約あり」と称する。形式的に記すと，制約式として $x_i \geqq 0$(ただし $i=1,\cdots,N$) を制約条件に追加した以下のような問題，

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1,\cdots,x_N}{\text{minimize}} \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{k=1}^{N} x_k = 1, \\
& \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i = \mu^*, \\
& x_i \geqq 0, \qquad i = 1,\cdots,N
\end{aligned}
$$

の解が「非負制約あり」の場合のポートフォリオとなる。当然のこと，x_i が負になることはなく(空売りする銘柄はなく)，x_i の値は正かゼロである。

要するに「非負制約あり」と「非負制約なし」の差異は，数式で表せば，N 個の不等式制約があるか否かというだけの差であるが，この差異は理論上も実用上も少なからず大きな違いとなる。「非

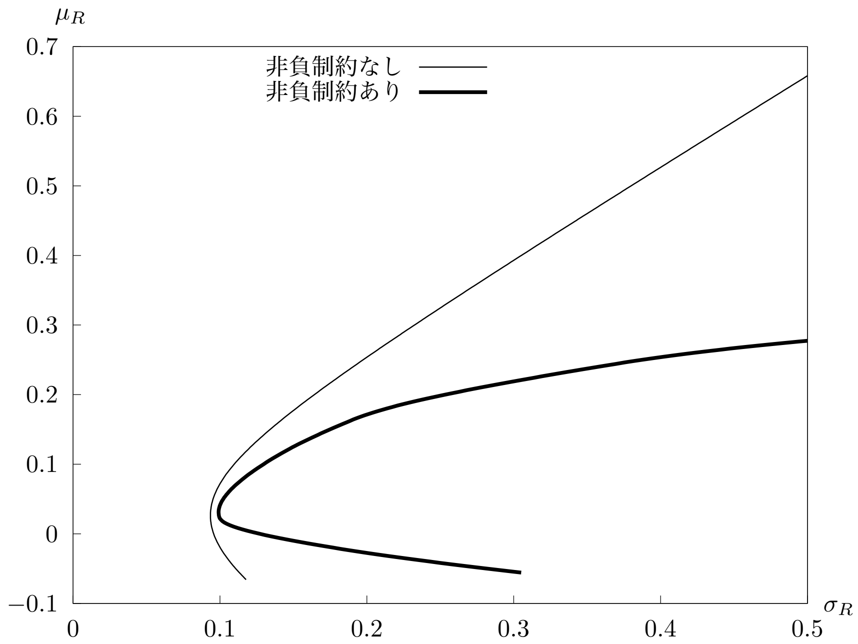

図 3　非負制約の有無

負制約なし」の場合はラグランジュ未定乗数法から，有効フロンティアの特徴に関する解析的な分析が古い時代からいくつかの文献でなされている。ところが，ごく単純な不等式制約が加わる「非負制約あり」の場合は，キューン・タッカー条件を使って解析的な展開が可能なはずであるが，実際のところ，そのような分析を試みた文献はほぼ存在せず，また筆者の浅学ゆえかもしれないが，そのキューン・タッカー条件の解析はほとんど無理ではないかという印象を持っている。ただ，数式での解析が難しくとも，数値的に解くことは比較的簡単にできる。構成比率が負の値になったものについてはゼロを代入し，一定の手順に従って順次繰り返し計算を実行していけば，「非負制約あり」の場合の (平均を所与とした) 最小分散を求めることができる。計算に要する手間暇あるいは計算機への負荷は，「非負制約なし」の場合 (解析解) でも「非負制約あり」の場合 (数値解) でも，両者の間にそれほど大差ない。

「非負制約あり」の解析が難しいとはいえ，次の点は解析するまでもなく自明であろう。「非負制約あり」の場合は，「非負制約なし」の場合と比較して，選択の自由度が小さくなる分，「非負制約あり」の場合の有効フロンティアの曲線は，「非負制約なし」の場合のそれよりも有効ではなくなる。すなわち，「非負制約あり」の曲線は必ず「非負制約なし」の曲線の内側に位置する。例として描いたのが図 3 である。この図は銘柄数を 20 銘柄とし，無作為抽出した 20 銘柄の組合せの 1 つについて，その有効フロンティアの曲線を描いたものである。この図で明らかなように，「非負制約なし」の有効フロンティアの曲線は，「非負制約あり」の有効フロンティアの曲線を包むような形状になる。従って，「非負制約なし」の場合の最適ポートフォリオは，「非負制約あり」の場合の

それよりも必ず有効になる。

「非負制約あり」の有効フロンティアは有効ではないので，厳密にはこれを「有効」と称するのはおかしいのであるが，前にも断ったとおり，曲線の名称が他にないので本稿では，「非負制約あり」の有効フロンティアと称することにする。理論的に有効であろうとなかろうと，有効フロンティアの曲線に対する接線から接点が求められるなら，それが接点ポートフォリオということになり，さらに有効フロンティアの一番左端の点が最小分散ポートフォリオということになる。つまり，接点ポートフォリオや最小分散ポートフォリオには，「非負制約なし」と「非負制約あり」とで 2 種類のものが計算できる。本稿ではすべて検討対象となる。

ところで，有効性を測る代表的な尺度がシャープ比率で，これは，ポートフォリオの収益率平均が無危険利子率を超える超過リターンの，標準偏差に対する比率として定義される。$\mu_R - \sigma_R$ 平面上の図で言えば，縦軸上の無危険利子率の点から危険資産のポートフォリオを表す点を結ぶ直線の傾きの値に相当する。このシャープ比率を最大にする直線は，「非負制約なし」の場合の有効フロンティア曲線への接線であり，その接点の表すポートフォリオが，危険資産ポートフォリオとしては最も有効性が高く，ポートフォリオ理論から見て「最適」ということになる。このことをここでは「接点ポートフォリオが事前的に最適である」と称している。さらに，「非負制約なし」の方が「非負制約あり」よりも有効フロンティアの曲線が左上方に位置するのであるから，「非負制約なし」の接点ポートフォリオのシャープ比率は，「非負制約あり」の接点ポートフォリオのそれより必ず大きな値となって有効性が高い。

3.2 分散化の効果

この小節では，図 2 の根拠となる Fama(1976) の議論を紹介しよう。

今，安全資産を無視して，危険資産のみからなるポートフォリオを考える。ポートフォリオを構成する銘柄数は N である。個別銘柄 i の収益率の分散を σ_{ii} で表し，銘柄 i と銘柄 j の収益率の間の共分散は σ_{ij} とする。なお $i = 1, \cdots, N$ と $j = 1, \cdots, N$ である。このポートフォリオにおける銘柄 i の構成比率は x_i であり $(i = 1, \cdots, N)$，この x_i には $1 = \sum_{i=1}^{N} x_i$ が成立している。

ポートフォリオの収益率の分散を $\sigma(R_P)^2$ として記すと，これは

$$\sigma(R_P)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} x_i \left(\sum_{j=1}^{N} x_j \sigma_{ij} \right)$$

というように書けるが，ここで構成銘柄を等ウエイトとするポートフォリオを考えよう。すなわち，$x_i = x_j = \frac{1}{N}$ を代入する。

$$\begin{aligned}\sigma(R_P)^2 &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \sigma_{ij} \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ii} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \sigma_{ij} \\ &= \frac{1}{N} \overline{\sigma_{ii}} + \frac{N-1}{N} \overline{\sigma_{ij}} \qquad (1)\end{aligned}$$

上式の 2 行目に現れる $\overline{\sigma_{ii}}$ と $\overline{\sigma_{ij}}$ とは，

$$\overline{\sigma_{ii}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ii}$$
$$\overline{\sigma_{ij}} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sigma_{ij}$$

として定義される。ポートフォリオを構成する N 銘柄の収益率の分散は当然 N 個存在して，これら N 個の分散の平均が上記の $\overline{\sigma_{ii}}$ である。また N 銘柄の収益率の間の共分散は全部で $N(N-1)$ 個あるので，これら $N(N-1)$ 個の共分散の平均が $\overline{\sigma_{ij}}$ である。

銘柄数 N を増やしていくとき，どのような銘柄を選択するかで当然，$\overline{\sigma_{ii}}$ や $\overline{\sigma_{ij}}$ の値は異なったものとなる。ただ，N の増加で $\overline{\sigma_{ii}}$ や $\overline{\sigma_{ij}}$ が徐々に小さくなったり大きくなったりという傾向は存在しないであろう。対して，$\overline{\sigma_{ii}}$ や $\overline{\sigma_{ij}}$ にかかる係数はどうか。N の増加で，$\frac{N-1}{N}$ は 1 に近づき，$\frac{1}{N}$ は 0 に近づく。分散は常に正の値であるから，N 増加で第 1 項はゼロに近づいていって，$\sigma(R_P)^2$ は $\overline{\sigma_{ij}}$ に収束していく。

それでは実際のポートフォリオを作るとき，そのポートフォリオを構成する銘柄数 N の増加で，ポートフォリオリスクの $\sigma(R_P)^2$ は $\overline{\sigma_{ij}}$ へ収束していくのか。これは本当にポートフォリオを作成して，そのリスクを計算してみないと分からない。そこで次に，銘柄をランダムに無作為抽出することでポートフォリオを構築し，$\sigma(R_P)^2$ 等の数値を調べることにする。

4　分散化の限界について

ここでは第 2 節で説明した無作為抽出の銘柄組合せを用いて，分散化の限界についてシミュレーションしたい。まずは 3.2 節で見たように，等ウエイトポートフォリオの構築を前提とした Fama の議論を，シミュレーションに依拠して数量的に確認する。次に等ウエイトポートフォリオではない別のポートフォリオ，特に有効フロンティア上のポートフォリオに着目して，分散化の限界があるのかないのか検討する。

4.1　等ウエイトポートフォリオの場合

ここでは，等ウエイトポートフォリオを構築した場合，Fama の主張した分散化の限界が数量的に確認できることを具体的に計算してみよう。

第 2 節で述べたように，ポートフォリオを構成する銘柄数と，平均等を推定するためのサンプル期間を所与とすると，無作為抽出した銘柄組合せは，1 つの構築時点につき 900 個あって，11 の構築時点があるので，合計 9900 個の銘柄組合せが存在する。これら 9900 個のポートフォリオ 1 つ 1 つについて，等ウエイトのポートフォリオ構築を前提にして $\overline{\sigma_{ii}}$ と $\frac{1}{N}\overline{\sigma_{ii}}$，$\overline{\sigma_{ij}}$ と $\frac{N-1}{N}\overline{\sigma_{ij}}$，$\sigma(R_P)^2$ と $\sigma(R_P)$ を計算する。表 3 は，これらの値について 9900 個の平均を銘柄数別にまとめたものである。なお平均等を推定するサンプル期間は 20 年としている。銘柄数 $N = 5, 10, 15, \cdots, 130, 140, 150$

N	$\overline{\sigma_{ii}}$	$\frac{1}{N}\overline{\sigma_{ii}}$	$\overline{\sigma_{ij}}$	$\frac{N-1}{N}\overline{\sigma_{ij}}$	$\sigma(R_P)^2$	$\sigma(R_P)$
5	0.16678	0.03336	0.04283	0.03426	0.06762	0.26004
10	0.16661	0.01666	0.04273	0.03846	0.05512	0.23477
15	0.16631	0.01109	0.04272	0.03987	0.05096	0.22574
20	0.16607	0.00830	0.04267	0.04054	0.04884	0.22100
25	0.16640	0.00666	0.04269	0.04098	0.04764	0.21827
30	0.16631	0.00554	0.04281	0.04138	0.04693	0.21663
35	0.16594	0.00474	0.04272	0.04149	0.04624	0.21503
40	0.16629	0.00416	0.04278	0.04171	0.04586	0.21416
45	0.16612	0.00369	0.04263	0.04168	0.04537	0.21301
50	0.16619	0.00332	0.04270	0.04185	0.04517	0.21253
60	0.16605	0.00277	0.04268	0.04197	0.04474	0.21151
70	0.16620	0.00237	0.04276	0.04215	0.04452	0.21100
80	0.16585	0.00207	0.04265	0.04212	0.04419	0.21022
90	0.16624	0.00185	0.04279	0.04231	0.04416	0.21014
100	0.16611	0.00166	0.04274	0.04232	0.04398	0.20971
110	0.16623	0.00151	0.04277	0.04238	0.04389	0.20950
120	0.16614	0.00138	0.04272	0.04237	0.04375	0.20917
130	0.16610	0.00128	0.04273	0.04240	0.04368	0.20899
140	0.16639	0.00119	0.04275	0.04244	0.04363	0.20888
150	0.16611	0.00111	0.04273	0.04245	0.04355	0.20870

表 3　銘柄数 N とポートフォリオリスク

のすべて共通に，過去 20 年分の月次データから平均や標準偏差，相関係数を推定している。

表 3 を見れば，Fama の指摘は容易に確認できる。$\overline{\sigma_{ii}}$ と $\overline{\sigma_{ij}}$ は，N の値が大きくなってもほとんど同じである。従ってポートフォリオ収益率の分散 $\sigma(R_P)^2$ を構成する第 1 項は，$\frac{1}{N}$ の効果により，N 増加で小さくなっていく。対して第 2 項は，$\frac{N-1}{N}$ の効果で大きくなっていく。全体として $\sigma(R_P)^2$ は N の増大で一貫して小さくなっていくが，グラフで明確に小さくなるのが分かるのは精々 25~30 銘柄ぐらいまでで，それより銘柄数を増やしても，標準偏差の値はほとんど 0.2 少々のレベルで，それより小さな値にはならない。標準偏差を縦軸に (横軸は銘柄数) したグラフが図 4 である。図 4 の曲線の形は，N が 40 銘柄以上でほとんど水平な直線のように見える。

以上のように，確かに銘柄数を増やしてみても，ポートフォリオリスク (収益率の標準偏差) はそれ以上減らないという限界が存在する。ただしこの計算は，ポートフォリオの構成銘柄を等ウエイトで組合せてポートフォリオを構築することが前提である。

4.2　有効フロンティア上のポートフォリオの場合

もし異なるポートフォリオを問題にする場合はどうか。例えば最小分散 (GMV) ポートフォリオならばどうか。全期間 9900 個の銘柄組合せについて，各々の最小分散ポートフォリオの収益率標準偏差を計算する。これら 9900 個の標準偏差の平均を銘柄数ごとにプロットしたのが図 5 である。なおここの最小分散ポートフォリオとは，「非負制約なし」の場合に導出される有効フロンティアの左端の点である。大変興味深いことに，図 5 では銘柄数 N の増加によって，一貫してポート

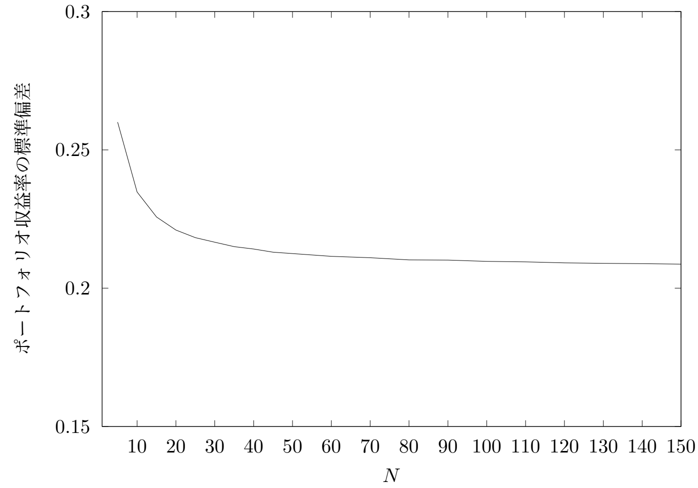

図 4　ポートフォリオのリスク：シミュレーションによる作図

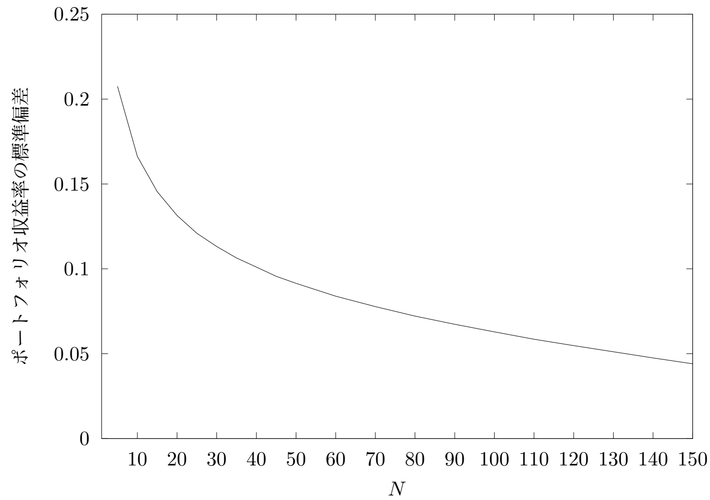

図 5　銘柄数 N と最小分散ポートフォリオの収益率標準偏差 (全構築時点の平均)

フォリオ収益率の標準偏差は低下し続ける。図 5 の曲線の形状では，もうそれ以上標準偏差は小さくならないという「限界」は存在しないように見える。

この図 5 の対象は構築時点すべてである。つまり，推定のためのサンプル期間を 20 年間として，各銘柄数についてそれぞれ，2006 年 5 月から 2007 年 5 月，$\cdots$，2016 年 5 月までの 11 時点すべてで計算された収益率標準偏差 9900 個の平均である。言うまでもないことであるが，収益率平均は時点ごとに大きく異なり，ポートフォリオを取り巻く環境は構築時点ごとに大きく異なり得る。従って 11 年に及ぶ構築時点を単純に平均することが妥当な手続きかどうかは危うい。そこで今，

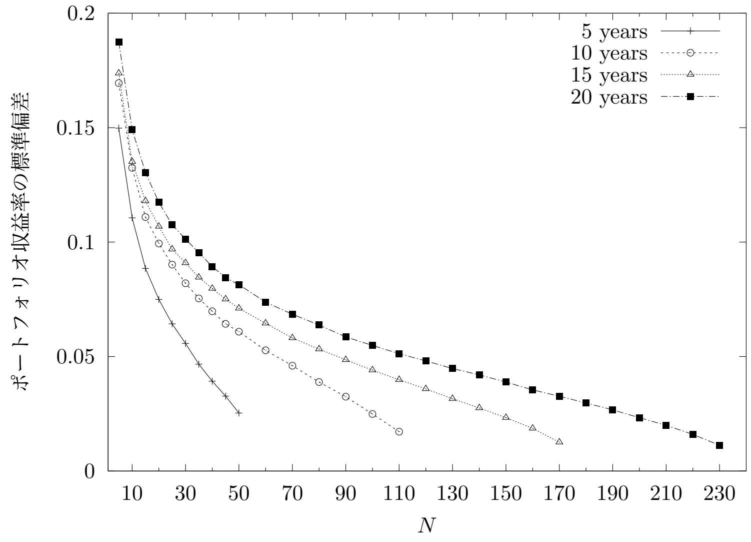

図 6　最小分散ポートフォリオ (非負制約なし) の収益率標準偏差 (2016 年の平均)

1 つの構築時点に絞った場合についても検討する。例えば 2016 年 5 月末という構築時点を取り上げ，その時点で構築される 900 個のポートフォリオについて，収益率標準偏差の平均を計算してみる。これが図 6 と図 7 である。

図 6 は最小分散ポートフォリオを，図 7 は接点ポートフォリオを対象としている。どちらも「非負制約なし」の場合である。1 つの構築時点について，銘柄数の違いとサンプル期間の違いで計 76 回の計算ができる。図 6 と図 7 にはこの 76 個の点がプロットされている。1 つの点は，該当サンプル期間と該当銘柄数における該当ポートフォリオの収益率標準偏差 900 個を平均した値である。今，対象が最小分散ポートフォリオでも接点ポートフォリオでも，銘柄数の増加により標準偏差は一貫して低下し，銘柄数を増やすことによる分散化の限界は存在しないように見える。紙幅の関係で掲載は省略するが，他の構築時点 (2016 年 5 月末以外の時点) についても図 6・図 7 とほぼ同様な曲線を描くことができる。

図 6 と図 7 は「非負制約なし」の場合の有効フロンティアから求められる最小分散ポートフォリオと接点ポートフォリオであるが，これらポートフォリオを「非負制約あり」の場合の有効フロンティアから導出したらどうなるか。まったく同じ計算を今度は「非負制約あり」で実行した計算結果が図 8 と図 9 である。これら図 8 と図 9 にある曲線の形状ならば，分散化の限界が存在するように見える。ただし前でも述べたとおり，「非負制約あり」の場合に描かれる有効フロンティアの曲線は，本当の有効フロンティアではない。本当に有効なのはあくまでも「非負制約なし」の場合であって，有効ではないポートフォリオで描かれる図でもって分散化の限界を主張するのは，等ウエイトポートフォリオでもって分散化の限界を主張することと本質的には同じであろう。

銘柄数の増加でポートフォリオの収益率標準偏差がどうなるか，計算可能な最大銘柄数まで計算

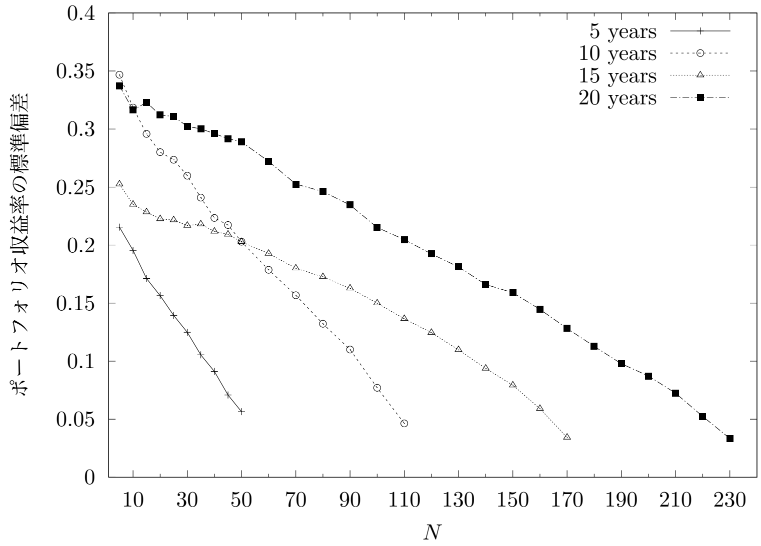

図 7　接点ポートフォリオ (非負制約なし) の収益率標準偏差 (2016 年の平均)

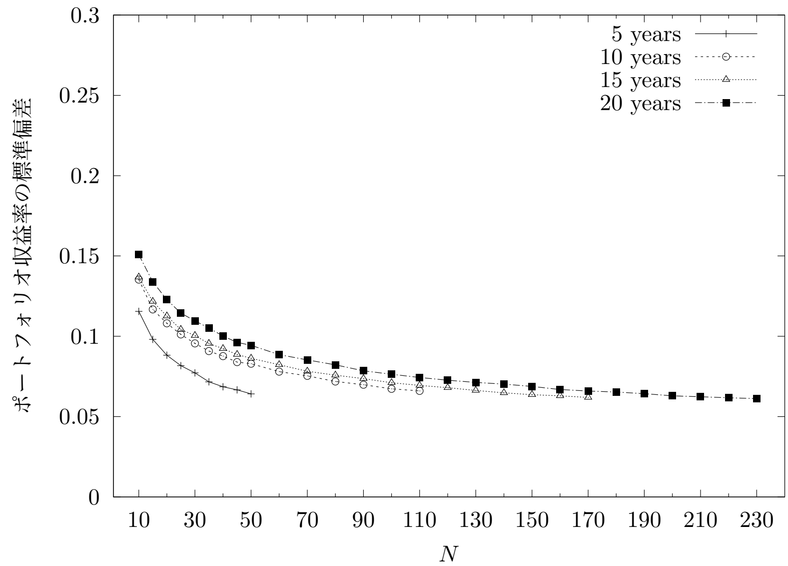

図 8　最小分散ポートフォリオ (非負制約あり) の収益率標準偏差 (2016 年の平均)

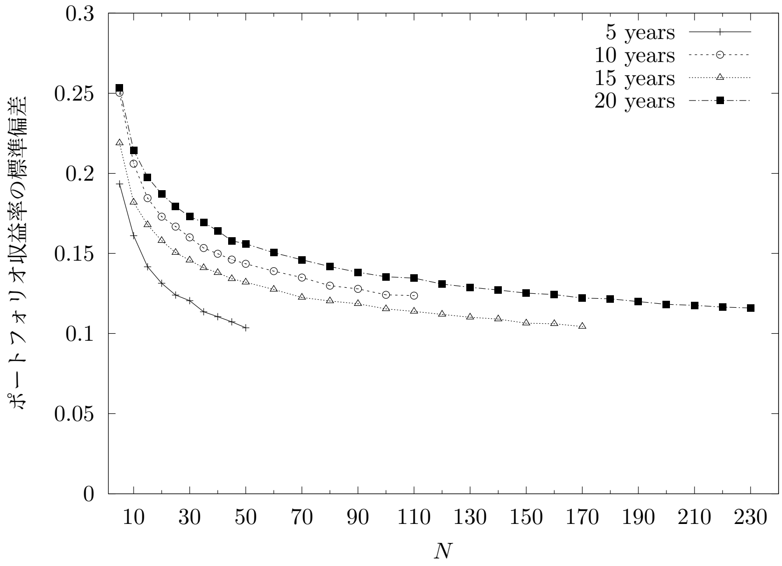

図 9　接点ポートフォリオ (非負制約あり) の収益率標準偏差 (2016 年の平均)

を実行したのが表 4 である。上記 76 回の試行における最大の銘柄数はサンプル期間 5 年では 50 銘柄，サンプル期間 10 年で 110 銘柄，サンプル期間 15 年で 170 銘柄，サンプル期間 20 年で 230 銘柄であった。他方，技術的な限界の最大銘柄数はサンプル期間 5 年 (サンプルサイズ 60) で 59 銘柄，サンプル期間 10 年 (サンプルサイズ 120) で 119 銘柄，サンプル期間 15 年 (サンプルサイズ 180) で 179 銘柄，サンプル期間 20 年 (サンプルサイズ 240) で 239 銘柄である。*5 そしてこれらの中間の銘柄数，サンプル期間 5 年のとき 55 銘柄，サンプル期間 10 年のとき 115 銘柄，サンプル期間 15 年のとき 175 銘柄，サンプル期間 20 年のとき 235 銘柄の結果も併せて表 4 に提示しておく。

表 4 には「事前」と「事後」の 2 種類の数値がある。「事後」については後で説明する。今は「事前」の方の値に注目して頂きたい。この「事前」とは，有効フロンティア曲線の位置 (標準偏差の値) を表す。つまり，銘柄個々の収益率平均や標準偏差・相関係数から該当ポートフォリオの構成比率に従って計算されるポートフォリオ収益率の標準偏差である。900 個の銘柄組合せ各々に標準偏差が求められるので，900 個の標準偏差を平均した値である。「非負制約なし」かつ「事前」の場合，サンプル期間 5 年の 50 銘柄，サンプル期間 10 年の 110 銘柄，サンプル期間 15 年の 170 銘柄，サンプル期間 20 年の 230 銘柄のそれぞれの値は，図 6 と図 7 にある曲線の一番右下の点に相当する。これら標準偏差の値と比べ，最小分散ポートフォリオでも接点ポートフォリオでも，技術的限界の本当の最大銘柄数における収益率標準偏差はさらに 1 桁小さな水準になっている。

このように技術的限界の最大銘柄数において，ポートフォリオ収益率の標準偏差は非常に小さな

*5 本文の「技術的な限界の最大銘柄数」とは，収益率の分散共分散行列が非特異である (逆行列を持つ) ために必要な，銘柄数の最大値のことである。最大銘柄数は時系列データのサンプルサイズから 1 を引いた値になる。この点の数学的証明は本稿の付録を参照願いたい。

	接点ポートフォリオ				最小分散ポートフォリオ			
	非負制約なし		非負制約あり		非負制約なし		非負制約あり	
銘柄数	事前	事後	事前	事後	事前	事後	事前	事後
	サンプル期間：5 年							
50	0.0565	0.3833	0.1036	0.1210	0.0254	0.1794	0.0642	0.0872
55	0.0336	0.4634	0.1031	0.1212	0.0169	0.2459	0.0621	0.0831
59	0.0094	0.7005	0.0999	0.1209	0.0061	0.6075	0.0607	0.0856
	サンプル期間：10 年							
110	0.0464	0.6056	0.1237	0.1225	0.0172	0.2194	0.0660	0.0732
115	0.0275	0.7460	0.1217	0.1234	0.0114	0.3198	0.0653	0.0735
119	0.0068	1.0971	0.1206	0.1226	0.0041	0.8588	0.0641	0.0734
	サンプル期間：15 年							
170	0.0343	0.6188	0.1044	0.1079	0.0126	0.2305	0.0620	0.0640
175	0.0207	0.8054	0.1037	0.1073	0.0086	0.3340	0.0612	0.0637
179	0.0054	1.0291	0.1029	0.1063	0.0032	0.8027	0.0605	0.0633
	サンプル期間：20 年							
230	0.0335	0.7632	0.1160	0.1144	0.0112	0.2582	0.0612	0.0589
235	0.0183	0.8835	0.1153	0.1141	0.0076	0.3745	0.0607	0.0597
239	0.0047	1.2120	0.1145	0.1134	0.0028	0.9622	0.0598	0.0584

表 4　ポートフォリオ収益率の標準偏差 (2016 年の平均)

値を作り出す。しかしこれら小さな標準偏差をもってして，ポートフォリオのリスクが本当に小さくなったと考えても良いのであろうか。答えは明らかに否である。厳密な証明は筆者にも現時点でよく分からないが，今指摘した標準偏差が非常に小さくなるという現象は，自由度不足による悪影響と考えるべきではないか。もしそうだとすると，この問題はポートフォリオ理論の現実適用に深刻な困難をもたらす懸念がある。ポートフォリオ理論を現実に適用する際，個別銘柄の平均や標準偏差等を推定することが必要不可欠であるが，銘柄数の増大が分散化の進展で標準偏差を小さくしたのか，あるいは推定の自由度不足により標準偏差を小さくしたのか，両者を識別することはできないからである。この問題を本稿ではとても解決できないので，ここで論点を変更する。この後の議論は，ポートフォリオのリスクが本当のところどうなのかという評価である。ポートフォリオの本当のリスクを評価するには，ポートフォリオ理論の教える (本稿で「事前」と称する) ポートフォリオ収益率の標準偏差とはまた別の観点が必要なのではないだろうか。ここで筆者が注目したいのは，ポートフォリオの事後的パフォーマンスという観点である。

ここの「事後」とは，実際に構築されたポートフォリオがその後どのような収益率を稼いだかを表している。構築後 1 年間保有し続けるなら，そのポートフォリオの収益率が毎月計算でき，12 個の月次収益率データを入手できる。これら 12 個の収益率の平均と標準偏差を求めれば，これらの値はポートフォリオの事後的パフォーマンスと称するに相応しい統計量である。事後的パフォーマンスの検討は次節にまわすが，その前にこの節を結ぶに際し，事後的な収益率標準偏差に注目しよう。表 4 の「事後」とされている値である。

最小分散ポートフォリオでも接点ポートフォリオでも同様なのであるが,「非負制約なし」の「事前」の標準偏差は銘柄数の技術的最大値で非常に小さな値となっている。このとき,「事後」の標準偏差は逆に大きくなっていく。場合によっては 2 倍を超える大きさになるものもある。技術的な最大限界の銘柄数においては,「事前」の標準偏差は小さくなるものの,「事後」の標準偏差,つまりポートフォリオの実際のリスクはむしろ相当に大きくなるのである。次に「非負制約あり」の「事前」の標準偏差を見てみよう。標準偏差の値は銘柄数の増大に伴って小さくなる。しかし,「非負制約なし」の場合と比べて,その低下の程度は大変穏やかである。また「非負制約あり」における「事後」の標準偏差は,銘柄数の増大に対してほとんど横ばいである。

以上のように,本当の有効フロンティアの場合 (「非負制約なし」の場合),分散化の限界は存在しないように見え,(本稿で言う「事前」の) 標準偏差は非常に小さくなり得るが,事後的パフォーマンスで見た実際のリスクという点では,必ずしも標準偏差の小さいことがポートフォリオのリスクを小さくするとは限らない。他方,「非負制約あり」の場合の有効フロンティアなら,「事前」の標準偏差の値に分散化の限界を見て取ることができ,事後的パフォーマンスで見て,銘柄数の増加がポートフォリオのリスク削減にならないことも分かる。しかし「非負制約あり」の有効フロンティアは,本物の有効フロンティアではなく,有効ではないポートフォリオを使って分散化の効果を測っているという点では,等ウエイトポートフォリオで導かれた議論と同じものと言えよう。

5　事後的パフォーマンス

ポートフォリオの事前的パフォーマンスと事後的パフォーマンスとの間に関連性はあるのであろうか。もっと言うなら,事前的に最適なポートフォリオが事後的にも優れたパフォーマンスを残していると言えるのだろうか。ここで言う事前的な最適ポートフォリオとは接点ポートフォリオ,つまり $\mu_R - \sigma_R$ 平面上で,無危険利子率を表す縦軸上の点から有効フロンティアに描いた接線の接点の表すポートフォリオのことである。この接点を導出するのに,危険資産だけから成る有効フロンティアの曲線が必要であるが,この曲線は,構成銘柄の比率に関して非負制約を設けるか否かで,2 種類の曲線を想定することができる。これら 2 つの曲線それぞれに接線の接点が存在し得るので,接点ポートフォリオも 2 つ存在する。「非負制約なし」の場合の有効フロンティアから導出される接点ポートフォリオと,「非負制約あり」の場合の有効フロンティア上にある接点ポートフォリオである。前者は後者よりも事前的には有効であるが,事後的なパフォーマンスでも優れていると言えるのか。

5.1　事後的な有効性

$\mu_R - \sigma_R$ 平面上で最も有効性の高い最適ポートフォリオは,事後的にも優れたパフォーマンスを達成しているのであろうか。シャープ比率は事後的な有効性の尺度としても援用できよう。最適なポートフォリオの教える構成比率に従って実際にポートフォリオを構築し,一定期間経過した後に,その期間中の収益率平均と標準偏差を求めるのである。このようにして求められた収益率平均

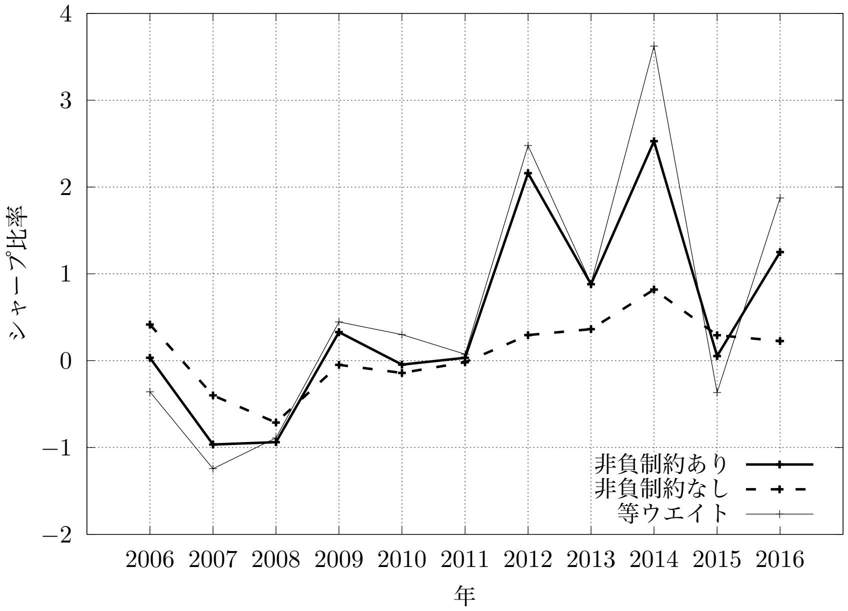

図 10　事後的パフォーマンス：シャープ比率

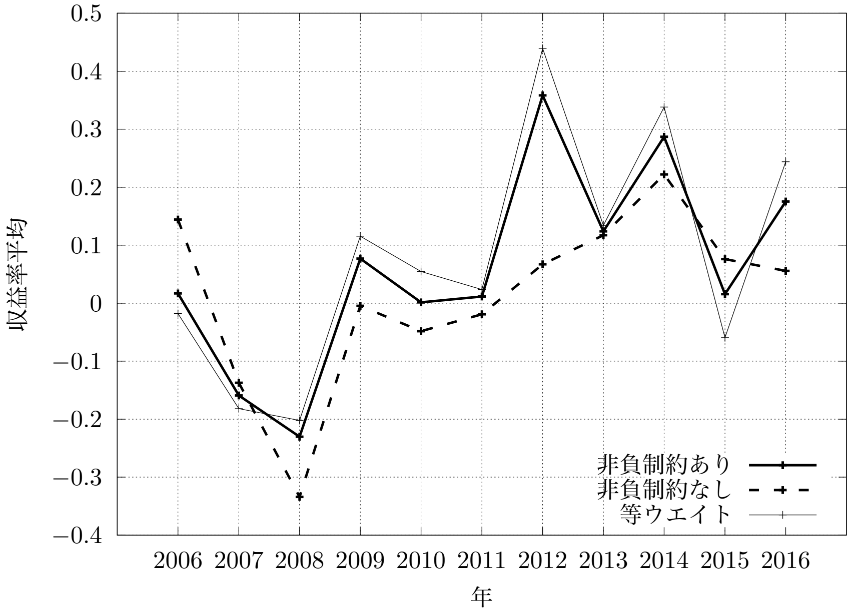

図 11　事後的パフォーマンス：収益率平均

と標準偏差は，そのポートフォリオの事後的パフォーマンスを表した数字であるから，これらの値から計算されるシャープ比率は，ポートフォリオの有効性に関する事後的尺度と言えよう。

事前的には (ポートフォリオ理論の教えるところでは) 非負制約なしの場合が，非負制約ありの場合よりも必ず有効であったが，事後的パフォーマンスで見ても同様に有効と言えるのであろうか。例えば，統計学の有名な性質によると，標本平均は母平均の最も望ましい推定値であるが，実際上は母平均と標本平均が同じ値になることはほとんどないであろう。従って，事前的に有効なポートフォリオが事後的にも優れたパフォーマンスを達成するとは限らない。それでは，事後的なポートフォリオの有効性は事前的なそれと比べてどうなのか。これは実際に試してみないと分からない。

ポートフォリオを構築時点から 1 年間保有を続ける場合，ポートフォリオのもたらす毎月の収益率を計算し，1 年間にわたる収益率の標本平均と標本標準偏差を計算した。[*6] そしてこれらの値と無危険利子率とから事後的なシャープ比率を計算した。その一例が図 10 である。これは 30 銘柄でポートフォリオを構築し，各銘柄の平均等を推定するサンプル期間を 10 年とした場合の結果である。毎年 900 個のポートフォリオがあるので，1 つ 1 つのポートフォリオで計算される事後的なシャープ比率が各年で 900 個存在するが，この 900 個の値に関する平均をプロットしたのが図 10 である。またシャープ比率ではなく，収益率平均そのものについて 900 個を平均した値を示したのが図 11 である

事前的には「非負制約なし」の方が「非負制約あり」よりも有効である (事前的なシャープ比率は大きい) はずが，事後的なパフォーマンスでは，「非負制約なし」が「非負制約あり」より勝っているとは必ずしも言えない。「非負制約なし」が「非負制約あり」を上回っているのは，シャープ比率で見て 11 年中の 4 年だけ (2006 年，2007 年，2008 年，2015 年)，収益率平均で見れば 11 年中 3 年 (2006 年，2007 年，2015 年) に過ぎない。どちらの尺度で見ても，「非負制約なし」が「非負制約あり」に比し大きく負けている年が少なくない。

以上のことは，「非負制約なし」の場合が「非負制約あり」の場合よりパフォーマンスの振幅の大きいことを示唆しているが，これはある意味納得的な結果ではないだろうか。「非負制約なし」の場合，ポートフォリオを構築する際に構成比率が負になる銘柄が数銘柄含まれることになり，これはその銘柄を空売りしていることになる。空売りを一切しない「非負制約あり」のポートフォリオに比べ，空売り銘柄を含んでいるポートフォリオのリスクが高くなることは直感的には自明なことのように思う。従って良好な結果の出る時期は，「非負制約なし」のポートフォリオのパフォーマンスが「非負制約あり」のそれを凌駕するが，逆に不良な結果に直面する時期には，「非負制約なし」の方は「非負制約あり」より不振にあえぐことになる。

図 10 および図 11 でもう 1 点興味深い観察事実を指摘すると，「非負制約あり」が「非負制約なし」よりも良好な時期について，「非負制約あり」よりさらに良好なパフォーマンスを発揮しているのが等ウエイトのポートフォリオである。これらの図は，銘柄数が 30 かつサンプル期間 10 年の場合であるが，銘柄数がいくつであっても，また何年のサンプル期間を用いようとも，ほとんどあ

[*6] 前で注記したように本稿の対象とする事後的パフォーマンスとは，ポートフォリオの構成銘柄について期間中のリバランスを前提に計算されるポートフォリオ収益率である。リバランスの有無に関しては別の機会に議論したい。

$\mu_c > \mu_u > \mu_e$	16
$\mu_c > \mu_e > \mu_u$	58
$\mu_u > \mu_c > \mu_e$	204
$\mu_u > \mu_e > \mu_c$	15
$\mu_e > \mu_c > \mu_u$	481
$\mu_e > \mu_u > \mu_c$	15
計	789

$\mu_c > \mu_u$	555
$\mu_u > \mu_c$	234
計	789

$\mu_e > \mu_u$	554
$\mu_u > \mu_e$	235
計	789

$\mu_e > \mu_c$	511
$\mu_c > \mu_e$	278
計	789

表 5　事後的パフォーマンス：収益率平均の大小

らゆるケースについて，等ウエイトポートフォリオの高パフォーマンスが観察される。これについては次の小節で確認する。

5.2　それぞれのポートフォリオの比較

本稿のシミュレーションは，ポートフォリオの構築時点 1 つについて，銘柄数の違いとサンプル期間の違いで 76 回の試行をしていて，その 76 の内訳は表 2 で記したとおりである。さらにポートフォリオの構築時点が 11 個あるから，試行は合計 836($= 76 \times 11$) 回に及ぶ。この 1 回の試行について，900 個の銘柄組合せを無作為抽出していて，1 個の銘柄組合せについて各々，等ウエイトのポートフォリオおよび接点ポートフォリオ，最小分散ポートフォリオが構築できる。今，これらポートフォリオのもたらす収益率平均を比較するとしよう。等ウエイトポートフォリオと「非負制約なし」の接点ポートフォリオ，「非負制約あり」の接点ポートフォリオ，3 種類のポートフォリオについて，各収益率平均 900 個の平均を取ってパフォーマンスの優劣を比較する。836 回の試行をしているから 836 個の優劣比較が可能である。

ところが実際には，ポートフォリオの収益率平均の計算できない試行がいくつか存在する。サンプル期間 20 年の場合で，「非負制約なし」の接点ポートフォリオの収益率平均がしばしば計算不可となる。このようなケースが 47 回あった。[*7] この 47 回を除く 789 回については，「非負制約なし」と「非負制約あり」の接点ポートフォリオおよび等ウエイトの 3 つのポートフォリオの収益率平均を比較できる。これらの大小関係をまとめたのが表 5 である。「非負制約なし」のポートフォリオ収益率平均の平均を μ_u で，「非負制約あり」のそれを μ_c で，等ウエイトポートフォリオのそれを μ_e で表している。

表 5 の一番左の表は，μ_u と μ_c，μ_e の 3 つの比較である。またその右には，2 つの収益率平均を比較した結果も並べている。3 つの収益率平均を比較すると，$\mu_e > \mu_c > \mu_u$ となるのが全体の 6 割超 481 で，他を圧倒していると言ってもよかろう。2 番目に多いのはその逆の並び $\mu_u > \mu_c > \mu_e$ で，これは 204(全体の 25.9%) ある。これらの結果は，μ_e と μ_u は浮き沈みが激しく，逆に μ_c は安

[*7] 1 回の試行で 900 組の銘柄組合せが存在するが，ここで言う「接点ポートフォリオの収益率平均が計算不可」とは，900 組すべての銘柄組合せについて接点ポートフォリオが存在しなかったことを意味する。サンプル期間 20 年の場合，収益率を計算するためのデータ開始期がバブル時代 (割高な株価) になっていて，あらゆる個別銘柄について推定される収益率平均は低い値となる。このため，ポートフォリオの有効フロンティアは下方に位置して，無危険利子率からの接線を持ちにくい。なお接線の傾きが負となる場合は「計算不可」としている。

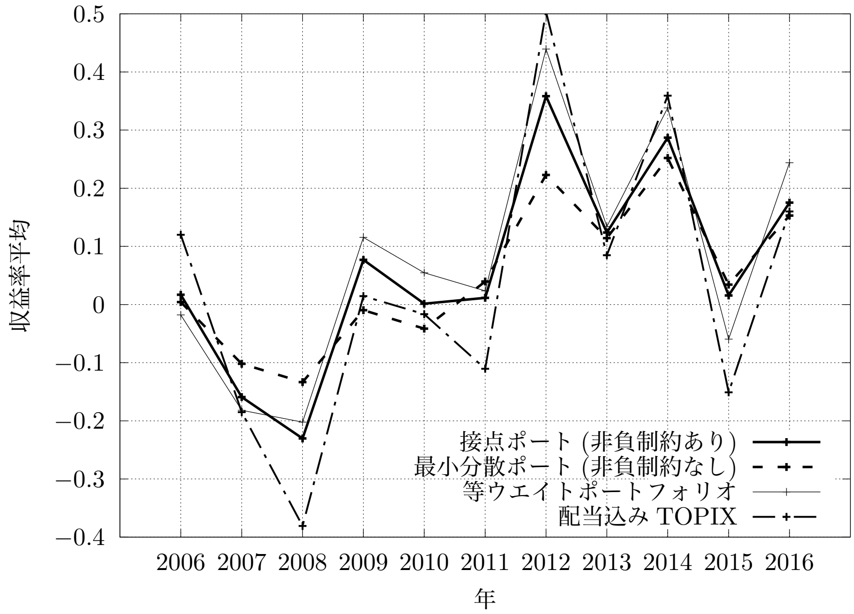

図 12　事後的パフォーマンス：4 ポートフォリオの収益率平均

定していることを示唆する。ただ μ_u と μ_c の 2 つの比較で見ると，7 割超の 555 で μ_c は μ_u を上回る。またほぼ同様の頻度で μ_e は μ_u や μ_c を上回っていることも分かる。

ここでは接点ポートフォリオの「非負制約あり」と「非負制約なし」の 2 つ，および等ウエイトのポートフォリオの計 3 つの間の比較を述べたが，別のポートフォリオの事後的パフォーマンスはどうであろうか。前で最小分散ポートフォリオについても取り上げたが，最小分散ポートフォリオも「非負制約あり」と「非負制約なし」の両方が考えられる。ここでは最小分散ポートフォリオで「非負制約なし」の場合の事後的パフォーマンスを調べてみよう。これと比較のために，TOPIX の事後的パフォーマンスも併せて図にプロットしてみる。また便宜のため，接点ポートフォリオ「非負制約あり」の場合と，等ウエイトポートフォリオの場合も同じ図にプロットした。後者の 2 つは図 11 にあるものと同じである。以上の 4 つの系列が図 12 である。

図 12 に掲載した TOPIX の事後的パフォーマンスとは，FDS が独自に計算して発表している TOPIX の配当込み収益率である。データ提供されている月次の値を該当年 (6 月から翌年 5 月まで) で平均して 12 を乗じた値である。TOPIX そのものは時価総額で加重した平均値であり，それに構成銘柄に支払われた配当金を加味した収益率が，ここで言う配当込み収益率である。TOPIX は，本稿の等ウエイトとは別ポートフォリオではあるが，パフォーマンスは似たような動向となるであろう。図 12 の 4 つの系列は概ね連動していて，事後的パフォーマンスはどれも似たような結果と言えるが，違いもある。最小分散ポートフォリオは，4 つの中では最も変動性が小さい。対して最も変動の大きいのは配当込み TOPIX である。乱高下する変動性，良いときは良いが悪いときは悪いという性質は等ウエイトポートフォリオよりも一段と強く表れている。

この結果の興味深い含意は，今日，パッシブ運用・インデックス運用が盛んであり，TOPIX 連動型の運用スタイルは隆盛を誇っているような印象を筆者は持っているが，その限界をこの図 12 は表しているのではないか。

6 結び

本稿では，シミュレーションを通じてポートフォリオ理論を再検討した。具体的には，ポートフォリオを形成する際の分散化の限界およびその事後的パフォーマンスである。分散化によるポートフォリオのリスク削減には一定の限界があると言われている。確かに，Fama の示した等ウエイトポートフォリオや「非負制約あり」の場合の接点ポートフォリオや最小分散ポートフォリオでは，収益率標準偏差の低下に限界のあることが分かる。しかし，これらポートフォリオはいずれも有効なポートフォリオとは言えない。ポートフォリオ理論の主張では有効なポートフォリオを危険資産の選択対象とすべきである。最も肝心な本当の有効フロンティアにおける「非負制約なし」の接点ポートフォリオや最小分散ポートフォリオでは，分散化の限界が存在するようには見えない。特に技術的に可能な最大銘柄数において，ポートフォリオの収益率標準偏差は非常に小さな値を達成する。しかしこの小さな標準偏差をもってして，本当にそのポートフォリオのリスクが小さくなったと考えるのは早計である。この小さな標準偏差は，個別銘柄の収益率平均や標準偏差等を推定する際の自由度不足に起因する可能性が高い。ポートフォリオを実際に構築して一定期間保有を継続した場合に実現する収益率の標準偏差から判断するに，ポートフォリオのリスクはむしろ増大していると考えられる。

以上の点は，ポートフォリオ理論の現実適用に際し，実は深刻な困難が伴っていることを示唆させる。1 つは銘柄数を増やしてポートフォリオの収益率標準偏差が低下するとしても，それが分散化の効果で標準偏差が低下したのか，推定の自由度不足で低下したのか両者の区別ができないからである。またそもそもの話，ポートフォリオ理論の教える収益率標準偏差がポートフォリオのリスク尺度として意味あるものなのかどうかも怪しい。そこで次に本稿では，ポートフォリオの事後的パフォーマンスを検討した。理論で事前的に最適とされるポートフォリオは，事後的にも最善なパフォーマンスを実現しているかどうかである。

「非負制約あり」の有効フロンティアは，「非負制約なし」のそれに比べて，事前的には必ず有効性で劣る。しかし事後的なパフォーマンスでは，「非負制約あり」の接点ポートフォリオは「非負制約なし」のそれを凌駕する。さらに，より高いパフォーマンスを発揮しているのが等ウエイトのポートフォリオであり，その勝敗は圧倒的優位にあるとも言えるような驚くべき結果をこのシミュレーションは教えている。

7 付録：ポートフォリオの銘柄数とサンプル期間

銘柄 i の第 t 時点の収益率データを R_{it} で表す。ただし $t = 1, \cdots, T$ および $i = 1, \cdots, N$ であるとする。つまり，時系列データのサンプルサイズが T であり (本稿ではこれを「サンプル期間」と

称している)，対象銘柄は全部で N 個の銘柄ということである。収益率データ R_{it} を $N \times T$ の行列として並べ，それを行列 $\mathbf{R}$ として次のように定義する。

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots\cdots & R_{1T} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ R_{N1} & \cdots\cdots & R_{NT} \end{pmatrix} \tag{2}$$

N 個の銘柄に関する分散共分散行列は $N \times N$ 行列であるが，今問題となるのは，データ行列 $\mathbf{R}$ から計算される分散や共分散の標本統計量である。第 i 銘柄の分散の標本統計量は $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \bar{R}_i)^2$，また第 i 銘柄と第 j 銘柄の共分散の標本統計量は $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)$ として計算される。ただし $\bar{R}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{it}$，$\bar{R}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{jt}$ である (また不偏性の議論は無視する)。これらを $N \times N$ の行列として並べると，

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{1t} - \bar{R}_1)^2 & \cdots & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{1t} - \bar{R}_1)(R_{Nt} - \bar{R}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{Nt} - \bar{R}_N)(R_{1t} - \bar{R}_1) & \cdots & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{Nt} - \bar{R}_N)^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

であるが，この $\mathbf{V}$ が分散共分散行列の推定量に他ならない。それでは $\mathbf{V}$ はデータ行列 $\mathbf{R}$ とどのような関係にあるか。この関係を導出するために，次の行列 $\mathbf{M}$ を定義する。

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \frac{1}{T}\mathbf{1}\mathbf{1}' \tag{4}$$

$\mathbf{M}$ は T 次の正方行列で，$\mathbf{I}$ は T 次の単位行列，$\mathbf{1}$ は 1 が T 個並んだ列ベクトルを，$'$ は転置をそれぞれ表している。容易に次の計算が確認できよう。まず $\frac{1}{T}\mathbf{R}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1 & \cdots & \bar{R}_N \end{pmatrix}'$ であるから，

$$\mathbf{RM} = \mathbf{R} - \begin{pmatrix} \bar{R}_1\mathbf{1}' \\ \bar{R}_2\mathbf{1}' \\ \cdots \\ \bar{R}_N\mathbf{1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} - \bar{R}_1 & R_{12} - \bar{R}_1 & \cdots\cdots & R_{1T} - \bar{R}_1 \\ R_{21} - \bar{R}_2 & R_{22} - \bar{R}_2 & \cdots\cdots & R_{2T} - \bar{R}_2 \\ \vdots & & \cdots\cdots & \vdots \\ R_{N1} - \bar{R}_N & R_{N2} - \bar{R}_N & \cdots\cdots & R_{NT} - \bar{R}_N \end{pmatrix}$$

というように数式展開できるが，この $\mathbf{RM}$ とは，銘柄各々の収益率データについて，サンプル期間に関する各銘柄の時系列平均からの偏差を計算していることが分かる。この偏差の銘柄間の積和を時系列方向に求めたものが，上で定義した分散共分散の推定量であるから，

$$\mathbf{V} = \frac{1}{T}\mathbf{RM}(\mathbf{RM})' = \frac{1}{T}\mathbf{R}(\mathbf{MM}')\mathbf{R}' = \frac{1}{T}\mathbf{RMR}'$$

という関係が成立する。ところでここの $\mathbf{M}$ はべき等行列で，$\mathbf{MM}' = \mathbf{M}'\mathbf{M} = \mathbf{M}$ である。

さて次にこの N 次の正方行列 $\mathbf{V}$ が逆行列を持つ，あるいは同じ意味であるが，$\mathbf{V}$ が非特異行列であるのは，行列の階数が N のときである。行列の階数については次の定理が有名である。証明なしに結果だけを記す。

定理 1　行列 $\mathbf{A}$ を $(m \times n)$ 次とすると，$\mathrm{rk}(\mathbf{A}) \leqq \min\{m, n\}$ である。

定理 2　さらに行列 $\mathbf{B}$ を $(n \times k)$ 次とすると，$\mathrm{rk}(\mathbf{AB}) \leqq \min\{\mathrm{rk}(\mathbf{A}), \mathrm{rk}(\mathbf{B})\}$ である。

定理 3　行列 $\mathbf{C}$ がべき等行列なら，$\mathrm{rk}(\mathbf{C}) = \mathrm{tr}(\mathbf{C})$ である。
ただし，$\mathrm{rk}(\mathbf{X})$ は行列 $\mathbf{X}$ の階数，$\mathrm{tr}(\mathbf{X})$ は行列 $\mathbf{X}$ のトレースである。

時系列データのサンプルサイズ (サンプル期間の長さ) である T と，銘柄数を表す N とがどのような大小関係にあれば，行列 $\mathbf{V}$ が非特異行列であるか。定理 3 から，べき等行列 $\mathbf{M}$ の階数はそのトレースに等しいから，トレースに関する次のような式展開が可能である。

$$\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \mathrm{tr}(\mathbf{I}) - \mathrm{tr}(\frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{1}) = T - 1$$

つまり $\mathbf{M}$ の階数は $T - 1$ である。ここでもし $N \geqq T$ であるなら，定理 1 から $\mathrm{rk}(\mathbf{R}) \leqq T$ であり，さらにまた定理 2 から

$$\mathrm{rk}(\mathbf{V}) \leqq \min\{\mathrm{rk}(\mathbf{R}), \mathrm{rk}(\mathbf{M})\} \leqq T - 1$$

であるから，N 次の正方行列 $\mathbf{V}$ の階数が N になることはあり得ない。$N \geqq T$ であるなら，そのときの行列 $\mathbf{V}$ の階数は必ず N よりも小さくなって，行列 $\mathbf{V}$ は逆行列を持てない。N 次正方行列 $\mathbf{V}$ が逆行列を持てるための，N の上限は $T - 1$ ということになる。従って，分散共分散行列が非特異行列であるためには，銘柄数 N はサンプル期間の長さから 1 を引いた数 (つまり $T - 1$) 以下であることが必要である。

参考文献

[1] Fama, Eugene F., 1976. *Foundations of Finance*, Basic Books, Inc., Publishers, New York.

[2] Fama, Eugene F., 1996. “Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.31, No.4 (December, 1996), pp.441-465.

[3] Fama, Eugene F., and Merton H. Miller, 1972. *The Theory of Finance*, Dryden Press, Illinois.

[4] Huang, Chi-fu, and Robert H. Litzenberger, 1988. *Foundations for Financial Economics*, Prentice Hall, New Jersey.

[5] Merton, Robert C., 1972. “An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis* Vol.7, No.4 (September, 1972), pp.1851-1872.

[6] Roll, Richard, 1977. “A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory,” *Journal of Financial Economics*, Vol.4, No.2 (March, 1977), pp.129-176.