確率変数の平均と分散—期待値の計算について

新保一成*

2011 年 6 月 8 日

1 数学的期待値

確率変数 X の期待値とは，確率変数 X が取り得る値 x の加重平均のことで，$E[X]$ で表す。ウエイトは，x の起こりやすさ，つまり確率で，離散的確率変数の場合には $f(x_i)$，連続的確率変数の場合には $f(x)dx$ である。**期待値 $E[X]$ は，定数である。**

$$E[X] = \begin{cases} \sum_i x_i f(x_i) & : X \text{ が離散的確率変数の場合}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & : X \text{ が連続的確率変数の場合}. \end{cases} \tag{1}$$

2 期待値の性質

■定数 a の期待値

$$E[a] = \int_{-\infty}^{\infty} af(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = a$$

となり，定数の期待値は定数そのものであることがわかる。最後の等号は，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ による。離散的確率変数の場合にも同様である。

■$+X$ の期待値 (a は定数)

$$E[a + X] = \int_{-\infty}^{\infty} (a + x) f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} af(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = a + E[X]$$

■bX の期待値 (b は定数)

$$E[bX] = \int_{-\infty}^{\infty} bxf(x)dx = b \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = bE[X]$$

以上まとめて，確率変数 X，定数 a および b について，

$$E[a] = a \tag{2}$$

$$E[a + X] = a + E[X] \tag{3}$$

$$E[bX] = bE[X] \tag{4}$$

以下証明なしに，もうひとつの重要な性質を紹介する。二つの確率変数 X_1 と X_n に関して，和の期待値は期待値の和になる。

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] \tag{5}$$

* 慶應義塾大学商学部、〒108-8345 東京都港区三田 2-15-45、電子メール: `shimpo@fbc.keio.ac.jp`

より一般的に，確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ について，

$$E[X_1 + \cdots + X_n] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] \tag{6}$$

が成り立つ。統計学 II で同時確率密度，周辺密度という概念を学習すれば，容易に証明できるようになる。

特に $X_1, \ldots, X_n$ が母平均を μ とする母集団からの大きさ n の無作為標本であるとき，$E[X_i] = \mu, i = 1, \ldots, n$ であるから，

$$E[X_1 + \cdots + X_n] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = \mu + \cdots + \mu = n\mu \tag{7}$$

3　確率変数の平均

確率変数 X の平均とは，確率変数 X の期待値で，定数である。確率変数 X の平均を μ とすれば，次のように定義される。

$$\mu = E[X] = \begin{cases} \sum_i x_i f(x_i) & : X \text{ が離散的確率変数の場合}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & : X \text{ が連続的確率変数の場合}. \end{cases} \tag{8}$$

4　確率変数の分散

確率変数 X の分散とは，確率変数 X の平均からの偏差の 2 乗の期待値で，定数である。$V[X]$ で確率変数 X の分散を表す。確率変数 X の分散を σ^2 とすれば，次のように定義される。

$$\sigma^2 = V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[(X - \mu)^2] = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i) & : X \text{ が離散的確率変数の場合}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx & : X \text{ が連続的確率変数の場合}. \end{cases} \tag{9}$$

4.1　分散の性質

■定数 a の分散　定数に散らばりはないから，その分散はゼロである。

$$V[a] = E[(a - E[a])^2] = E[(a - a)^2] = E[0] = 0$$

■$a + X$ の分散 (a は定数)　定数の部分に散らばりはないから，$a + X$ の分散は X の分散に等しい。

$$V[a+X] = E[(a+X-E[a+X])^2] = E[(a+X-E[a]-E[X])^2] = E[(a+X-a-E[X])^2] = E[(x-E[X])^2] = V[X]$$

■bX の分散 (b は定数)　定数の部分に散らばりはないから，$a + X$ の分散は X の分散に等しい。

$$\begin{aligned} V[bX] &= E[(bX - E[bX])^2] = E[(bX - bE[X])^2] \\ &= E[\{b(X - E[X])\}^2] = E[b^2(X - E[X])^2] = b^2 E[(X - E[X])^2] = b^2 V[X] \end{aligned}$$

以上まとめて，確率変数 X，定数 a および b について次が成り立つ。

$$V[a] = a \tag{10}$$

$$V[a + X] = V[X] \tag{11}$$

$$V[bX] = b^2 V[X] \tag{12}$$

特に $X_1, \ldots, X_n$ が母平均を μ，母分散を σ^2 とする母集団からの大きさ n の無作為標本であるとき，$V[X_i] = \sigma^2, i = 1, \ldots, n$ であるから，

$$V[X_1 + \cdots + X_n] = V[X_1] + \cdots + V[X_n] = \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 = n\sigma^2 \tag{13}$$

となることを示すことができる。証明には，無作為標本の場合に，確率変数の積の期待値が期待値の積に等しいという事実が必要である。これも統計学 II の課題である。付録 A に証明を付しておく。

5 標本平均の平均と分散

母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 $X_1, \ldots, X_n$ を考える。このとき，

$$E[X_i] = \mu, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$V[X_i] = \sigma^2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

である。標本平均 $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

の平均は (4) と (7) より，

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right] = \frac{1}{n}E\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

となる。また標本平均の分散は (12) と (13) より，

$$V[\bar{X}] = V\left[\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right] = \frac{1}{n^2}V\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる。以上まとめると次のようになる。

$$E[\bar{X}] = \mu \tag{14}$$

$$V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{15}$$

6 正規化された確率変数の平均と分散

平均 μ，分散 σ^2 をもつ確率変数 X を正規化した変数を Z とする。

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z の平均は (3) と (4) より，

$$E[Z] = E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}E[X - \mu] = \frac{1}{\sigma}(E[X] - \mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

となる。分散は (11) と (12) より，

$$V[Z] = V\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2}V[X - \mu] = \frac{1}{\sigma^2}V[X] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

となる。このように，すべての確率変数を正規化すると，その平均はゼロ，分散は 1 になる。

7　2 項母集団の平均と分散

離散的確率変数 X は，ある事象 A が生じた場合に $x = 1$，そうでない場合に $x = 0$ をとる。事象 A が起こる確率が p，したがって起こらない確率が $1 - p$ であるような母集団を 2 項母集団といい，

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1 \tag{16}$$

で表すことができる。$f(x)$ は，ベルヌーイ試行を表す 2 項分布

$$f(x) = {}_nC_x p^x(1-q)^{n-x}, \quad x = 0, \ldots, n \tag{17}$$

で $n = 1$ の場合である。

この確率変数 X の平均を μ_p とすると，

$$\mu_p = E[X] = 0 \times f(0) + 1 \times f(1) = 0 \times p^0(1-q)^1 + 1 \times p^1(1-q)^0 = p \tag{18}$$

を得る。分散を σ_p^2 とすると

$$\sigma_p^2 = V[X] = E[(X-p)^2] = (0-p)\times f(0)+(1-p)\times f(1) = (0-p)\times p^0(1-q)^1+(1-p)\times p^1(1-q)^0 = p(1-p) \tag{19}$$

となる。以上まとめて次を得る。

$$\mu_p = p \tag{20}$$
$$\sigma_p^2 = p(1-p) \tag{21}$$

付録 A　(13) の証明

$$\begin{aligned}
V[X_1 + \cdots + X_n] &= E\left[\{(X_1 + \cdots + X_n) - E[X_1 + \cdots + X_n]\}^2\right] \\
&= E\left[\{(X_1 - E[X_1]) + \cdots + (X_n - E[X_n])\}^2\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i - E[X_i])^2\right] + 2E\left[\sum_{1\le i\le j\le n}(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])\right]
\end{aligned}$$

ここで右辺第 1 項は，

$$\sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i - E[X_i])^2\right] = n\sigma^2$$

である。

右辺第 2 項を展開すると，

$$\begin{aligned}
2E\left[\sum_{1\le i\le j\le n}(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])\right] &= 2E\left[X_iX_j - X_iE[X_j] - E[X_i]X_j + E[X_i]E[X_j]\right] \\
&= 2\left(E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] - E[X_i]E[X_j] + E[X_i]E[X_j]\right) \\
&= 2\left(E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j]\right)
\end{aligned}$$

となる。ここで，$X_1, \ldots, X_n$ が無作為標本であるとき，すなわち確率変数 X_i と X_j が独立であるとき，

$$E[X_i X_j] = E[X_i]E[X_j], \quad i \neq j.$$

を示すことができるので (ここの部分が統計学 II の課題である)，右辺第 2 項はゼロになる。

以上より，

$$V[X_1 + \cdots + X_n] = n\sigma^2$$

が証明された。