3　偏微分と 2 変数関数の微分式

微積分 I では独立変数がひとつしかない関数, これを 1 変数関数という, を扱ってきたが, 微積分 II では独立変数がふたつの関数, 2 変数関数, の微分を考察する．具体的には, 普通は 2 つの独立変数を x と y で表し, それに従属するひとつの変数を z で表す．しかし, これらの文字は関数の本質になんら影響を与えないことは 1 変数関数の場合と同様である．2 変数関数の例をいくつかあげてみると,

$$z = 3x + 4y - 5$$

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = e^{x+2y^2}$$

など無数に考えることができる． 1 変数関数のグラフは平面内の曲線となったが, 2 変数関数のグラフは空間内の曲面になる．一般の 2 変数関数は $z = f(x, y)$ と表記できることはいいだろう．x と y がこの関数の独立変数であり, z が従属変数である．この関数の微分を考察するということは, 2 つの独立変数を変化させたときに, この関数によりその値が必然的に決定される従属変数 z の変化の様子を調べるということである．このような 2 変数を同時に動かしたときの z の変化をとらえるための考察は後に扱うが，その準備として偏微分の考え方をここでは学ぶ．

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における x に関する偏微分係数とは, 独立変数 y を b に保ったまま独立変数 x のみを a から変化させたときの微分係数のことをいう．即ち，$x = a$ から $x = a + \Delta x$ まで x を変化させるとそのときの従属変数 z は $z = f(a, b)$ から $z = f(a + \Delta x, b)$ に変化するから，

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b) - f(a, b)$$

である．よって，$(x, y) = (a, b)$ における x に関する偏微分係数は極限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \tag{1}$$

となる．これは，x のみを独立変数とした 1 変数関数

$$z = f(x, b)$$

を考え，その $x = a$ における微分係数を考えたものに他ならない．これを記号では

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \quad \text{または} \quad f_x(a, b) \quad \text{または} \quad z_x(a, b)$$

とかく．同様に y に関する偏微分係数も定義される．このようにして各点 (a, b) で 2 種類の偏微分係数が定義されるので，点 (a, b) にその点の偏微分係数を対応させる関数が新たにふたつ考えられ，x に関する偏導関数と y に関する偏導関数を定義することができる．これらはそれぞれ

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{または} \quad f_x(x, y), f_y(x, y) \quad \text{または} \quad z_x, z_y$$

と表記される．また, x(または y) に関する偏導関数をもとめることを x(または y) に関して偏微分するという．

実際に偏微分することは簡単であり，いままでの 1 変数の微分法の知識をすべて援用することができる．x に関する偏微分をするには独立変数 y を定数とみなし x のみを変数として微分すればよいことになる．

具体的に関数

$$z = xy^2$$

を使い x に関する偏導関数を求めてみる．y を定数とみるので，

$$z = (y^2)x$$

とみなし，y^2 は 3 や 5 といった定数と思い，x に関して微分すると y^2 をうる．これが x に関する z の偏導関数である．すなわち，

$$z_x = y^2 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^2$$

である．y に関する偏導関数については，x を 3 や 5 といった定数とみなし，y について z を微分すると $2xy$ となる．よって，

$$z_y = 2xy \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$$

である．さらに，$(x,y)=(3,2)$ における各偏微分係数は

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3,2)=2^2=4, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(3,2)=2\times 3\times 2=12$$

である.

演習 1

次の 2 変数関数の偏導関数を求めなさい.

1.

$$z=\frac{x+2}{3y+4}$$

$$z_x=\tfrac{1}{3y+4}, \quad z_y=-\tfrac{3x+6}{(3y+4)^2}$$

2.

$$z=x^2-xy+y^2$$

$$z_x=2x-y, \quad z_y=-x+2y$$

3.

$$z=\frac{y}{1+x^2}$$

$$z_x=-\tfrac{2xy}{(1+x^2)^2}, \quad z_y=\tfrac{1}{1+x^2}$$

4.

$$z=xe^{x+y}$$

$$z_x=(1+x)e^{x+y}, \quad z_y=xe^{x+y}$$

5.

$$z=xe^y-ye^x$$

$$z_x=e^y-ye^x, \quad z_y=xe^y-e^x$$

6.

$$z=y\log(x^2+y^2+1)$$

$$z_x=\tfrac{2xy}{x^2+y^2+1}, \quad z_y=\log(x^2+y^2+1)+\tfrac{2y^2}{x^2+y^2+1}$$

そもそも偏導関数を求める目的は偏微分係数を簡単に求めたいことにある．そして，偏微分係数を求める目的は 2 変数関数の微分式を求めることにある．2 変数関数 $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における微分式とは

$$\Delta z \approx f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y$$

のことである．この式は x が a から $a + \Delta x$ に，y が b から $b + \Delta y$ に変化したとき z が $f(a, b)$ からどのくらい変化するかを表わす式である．その z の変化量は Δz で表されている．簡単な例

$$z = f(x, y) = xy^2$$

を取り上げよう．

$$f_x(x, y) = y^2, \quad f_y(x, y) = 2xy$$

である．そして $(x, y) = (3, 2)$ における偏微分係数は

$$f_x(3, 2) = 4, \quad f_y(3, 2) = 12$$

である．このことより $z = xy^2$ の $(x, y) = (3, 2)$ における微分式は

$$\Delta z \approx 4\Delta x + 12\Delta y$$

となる．この微分式は，x が 3 から $3 + \Delta x$ に Δx だけ変化し，y が 2 から $2+\Delta y$ に Δy だけ変化したときの，z の変化分 Δz はおおよそ $4\Delta x+12\Delta y$ で計算できること，を意味している．例えば，x が 3 から 3.1 に変化し，y が 2 から 2.05 に変化したときには，$\Delta x = 3.1-3 = 0.1$ であり $\Delta y = 2.05-2 = 0.05$ であるので，この微分式より

$$\Delta z \approx 4 \times 0.1 + 12 \times 0.05 = 1$$

と計算され，z の変化分 Δz はおおよそ 1 であり，z は 12 からおおよそ 13 に変化することが分るのである．正確な Δz の値は，

$$\Delta z = 3.1 \times 2.05^2 - 3 \times 2^2 = 13.02775 - 12 = 1.02775$$

であるが，微分式でえられた 1 という値は精度の高い良い近似になっていることがわかるだろう．

演習 2

次の 2 変数関数の $(x, y) = (3, 1)$ における微分式を求めよ.

1.

$$z = \frac{x+2}{3y+4}$$

$$\Delta z \approx \frac{1}{7}\Delta x - \frac{15}{49}\Delta y$$

2.

$$z = x^2 - xy + y^2$$

$$\Delta z \approx 5\Delta x - \Delta y$$

3.

$$z = \frac{y}{1+x^2}$$

$$\Delta z \approx -\frac{3}{50}\Delta x + \frac{1}{10}\Delta y$$

4.

$$z = xe^{x+y}$$

$$\Delta z \approx 4e^4\Delta x + 3e^4\Delta y$$

5.

$$z = xe^y - ye^x$$

$$\Delta z \approx (e - e^3)\Delta x + (3e - e^3)\Delta y$$

6.

$$z = y\log(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\Delta z \approx \frac{6}{11}\Delta x + \left(\log 11 + \frac{2}{11}\right)\Delta y$$