

15 置換積分と部分積分

導関数を求める技術として四則の微分法，合成関数の微分法，逆関数の微分法などを紹介してきた．これと同様に原始関数を求める技術，実はこれは前節の定理より定積分を求める技術に他ならないわけだが，これについてこの節では説明を加える．

まずは置換積分から始めよう．ある関数の原始関数（不定積分）を求めたいのだが，単純にはその原始関数が思いつかない状況を考える．しかし，その関数を見るとある関数 $f(u)$ と関数 $u = g(x)$ の合成関数と $g'(x)$ との積になっていたとする，即ち， $f(g(x))g'(x)$ とみることができたとする．このとき，関数 $f(u)$ の原始関数 $F(u)$ と関数 $u = g(x)$ の合成関数 $F(g(x))$ を x で微分すると

$$(F(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$$

となるので，

$$F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x)dx$$

が成立する．この左辺も不定積分の記号で表現すると

$$\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx$$

となる．ここで， $u = g(x)$ により，変数 u と x は関係している．以上を定理の形にまとめると，

定理 46（不定積分の置換積分）

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \Big|_{u=g(x)}$$

例 47

$$\int e^{2x}dx$$

を求めてみよう．

被積分関数 e^{2x} は $f(u) = e^u$, $u = 2x$ と分解すれば合成関数 $f(g(x))$ とみなせる . $u' = g'(x) = 2$ であるので , 問題の不定積分を以下のように変形し置換積分できるようにする .

$$\begin{aligned}\int e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int e^{2x} \cdot 2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} + C\end{aligned}$$

上の計算では定理 46 を素直に適用した . この適用のしかたを機械的に行なう便法として以下の方法がある . $u = 2x$ と考えたので , この微分式を求めると $du = 2dx$ となるが , これを $dx = \frac{1}{2} du$ と変形し , $2x$ を u に変えると共に dx にこの式の右边を代入すると

$$\int e^{2x} dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du$$

をえて , 後の計算は上と同じように進めることができる .

定理 48 (定積分の置換積分)

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

証明 定理 46 と定理 44 より明らか . $\square$

例 49

$$\int_1^3 e^{2x} dx$$

を求めてみよう . この例の不定積分版と同じ解釈をして , $g(1) = 2$, $g(3) = 6$

に注意すると ,

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int_1^3 e^{2x} \cdot 2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_2^6 e^u du \\ &= \frac{1}{2}(e^6 - e^2)\end{aligned}$$

次に部分積分の話題に移ろう . これは積の微分法の裏返しである . 積の微分法が主張するところは

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

であった . よって ,

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx\end{aligned}$$

これより ,

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

が成立する .

以上をまとめると不定積分 , 定積分共に以下の定理が成立することになる .

定理 50 (部分積分)

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x) dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \\ \int_a^b f'(x)g(x) dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx\end{aligned}$$

例 51

$$\int_0^2 xe^x dx$$

を部分積分法を使い求めてみよう． $f'(x) = e^x$, $g(x) = x$ とみなすと ,
 $f(x) = e^x$, $g'(x) = 1$ と考えればよいので ,

$$\begin{aligned}\int_0^2 x e^x dx &= [x e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= 2e^2 - [e^x]_0^2 \\ &= 2e^2 - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1\end{aligned}$$

例 52 次に ,

$$\int \log x dx$$

を部分積分法を使い求めよう .

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int 1 \times \log x dx \\ &= \int (x)' \log x dx \\ &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + C\end{aligned}$$

計算練習 3

次の定積分と不定積分を求めなさい .

1.

$$\int_0^1 (x - x^3) dx$$

$\frac{1}{4}$

2.

$$\int_0^1 e^{2x} dx$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

3.

$$\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x} dx$$

$$\log 2$$

4.

$$\int_1^3 e^{-x} dx$$

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{e^3}$$

5.

$$\int_0^1 (2x - 1)^3 dx$$

$$0$$

6.

$$\int_1^2 x e^{x^2} dx$$

$$\frac{1}{2}(e^4 - e)$$

7.

$$\int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx$$

$$\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

8.

$$\int_1^e x \log x dx$$

$$\frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

9.

$$\int_0^1 x e^x dx$$

10.

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx, \quad x > 0$$

$$\log x + \frac{1}{2x^2} + C$$

11.

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$$

12.

$$\int (x^e - e^x) dx$$

$$\frac{1}{e+1}x^{e+1} - e^x + C$$

13.

$$\int (2x+1)^5 dx$$

$$\frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$$

14.

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$$

$$\frac{1}{3}(\log x)^3 + C$$

15.

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx, \quad x < 0$$

$$\log(-x) + \frac{1}{2x^2} + C$$