

## 1 関数

1 変数関数  $y = f(x)$  について基本的な事項の確認を行う.  $x$  は独立変数といい,  $y$  は従属変数とよぶ. この独立や従属という言葉使いのニュアンスをしっかりと会得しよう. 関数というと必ず, 独立変数が決まるとそれに応じて従属変数が決まるという  $x$  から  $y$  への方向性があることを理解しよう. 数学では慣例として独立変数は  $x$  で従属変数は  $y$  で表わすが, 必ずしも  $x$  と  $y$  を使う必要はない. 文脈によっては  $y$  で独立変数を表し  $x$  で従属変数を表わすこともあるし,  $x, y$  以外の例えば  $s$  や  $t$  を使うこともある. 「関数  $y = x^2$ 」という表現は「 $y = x^2$  という式でその対応規則が表される関数», すなわち, 「独立変数の値の 2 乗を従属変数の値とするという規則である関数」を表現している. したがって, 関数  $t = s^2$  と関数  $y = x^2$  は同じ関数である.

一般には独立変数  $x$  を従属変数  $y$  に対応させる関数は

$$y = f(x)$$

などと表現する. ここで表れる  $f$  が対応の規則である関数そのものを指し示している記号である.

実数全体の集合を  $R$  とかく. そして, 非負実数全体の集合を  $R_+$ , 正実数全体の集合を  $R_{++}$  とかく. 即ち,

$$R_+ \equiv \{x \in R | x \geq 0\}, \quad R_{++} \equiv \{x \in R | x > 0\} \quad (1)$$

である.  $a, b$  を  $a < b$  である実数とする.  $a$  以上  $b$  以下のすべての実数を集めた集合を  $[a, b]$  とかく. この形の集合を閉区間という. 同様に  $a$  より大きく  $b$  未満の実数を集めた集合を  $(a, b)$  とかき, これを開区間という. これらふたつの区間は共にその長さが有限なので有限区間という. 他の有限区間として半开区間も講義では登場した. これらを集合の記号で表すと,

$$[a, b] \equiv \{x \in R | a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) \equiv \{x \in R | a < x < b\} \quad (2)$$

となる. さらに, 実数  $a$  に対し  $a$  以上のすべての実数を集めた集合を  $[a, +\infty)$  とかく. 即ち,

$$[a, +\infty) \equiv \{x \in R | a \leq x\} \quad (3)$$

である。これは無限の長さをもつので無限区間とよぶ。 $(a, +\infty)$  や  $(-\infty, a]$  や  $(-\infty, a)$  の記号の意味は明らかだろう。

関数  $y = f(x)$  の定義域とは独立変数  $x$  がとりうる値をすべて集めた集合のことをいう。そして、それを

$$D(f)$$

と表わす。たとえば、関数  $y = 3x + 1$  の定義域は  $R$  であり、関数  $y = \sqrt{x}$  の定義域は  $R_+ = [0, \infty)$  であり、関数  $y = 1/x$  の定義域は  $R \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  である。

集合の演算記号で

$$A \setminus B$$

は  $A$  に属する要素から  $B$  に属する要素を取り除いた集合を表す。即ち、

$$A \setminus B \equiv \{x | x \in A, x \notin B\}$$

と定義される。 $A \setminus B$  は  $A$  と  $B$  の差集合という。

$a, b, c$  という 3 つの数を集めた集合は  $\{a, b, c\}$  と表記される。この記法を用いると  $[0, 1] = (0, 1) \cup \{0, 1\}$  が成立する。

独立変数  $x$  が定義域をすべて動き回ったときに、関数  $f$  を経由して従属変数  $y$  も動き回ることになる。ある関数の従属変数がとる値すべてを集めた集合をその関数の像といい  $I(f)$  と表わす。よって、

$$I(f) \equiv \{f(x) | x \in D(f)\} \quad (4)$$

と書くことができる。2 次関数  $y = x^2$  の像は  $R$  ではなく、 $[0, \infty)$  であることに注意しよう。

定義域を  $A$  とする実数値関数  $f$  のことを

$$f : A \rightarrow R \quad (5)$$

と書く。この記号には独立変数や従属変数が表われていないことに注意しよう。再三言っているように、変数の記号は何でもいいので特に書く必要もないからである。関数の本質はどの領域で定義されているかの情報である  $A$  と独立変数にどのように従属変数を対応させるかの情報である  $f$  にあるのである。

問 1 関数  $y = 3x + 1$ ,  $t = s^2$ ,  $v = 1/u$  のそれぞれの像を求めなさい.

## 2 関数の連続性

関数  $y = f(x)$  の連続性とそれに関連する定理について解説する. この関数の定義域の点  $a \in D(f)$  をひとつとり固定して考える. 関数  $f$  が  $a$  で連続であるとは, そのグラフで考えると点  $(a, f(a))$  の左右でそのグラフがつながっていることであるが, それを数学的に正確に記述すると以下ようになる.

関数  $y = f(x)$  の定義域  $D(f)$  の点  $a$  を考える. 独立変数  $x$  を  $a$  から  $a + \Delta x$  に  $a + \Delta x$  が  $D(f)$  に属するように変化させたとき, それに対応する  $y$  の変化分

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

は  $x$  の変化分  $\Delta x$  の関数となる. これを,

$$\Delta y = \varphi_a(\Delta x)$$

と表す. 以上の記号を使い,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi_a(\Delta x) = 0$$

が成立するとき, 関数  $f$  は  $a$  において連続であるという.  $f$  の定義域に属するすべての  $a \in D(f)$  において連続であるとき, 関数  $f$  は連続であるという. 従って, 連続関数とはそのグラフで切れているところがひとつもない関数ということになる.

連続関数の顕著な性質として次の定理が知られている.

**定理 2 (ワイヤストラスの定理)** 連続関数はその定義域内の有限閉区間上では必ず最大値と最小値に達する.

この定理の主張することを詳しく説明する. 特に, 閉区間  $[a, b]$  上で最大値に達するという意味を数学的に正確に記述することを学ぶ. すなわち,  $[a, b]$  上で関数  $f$  が最大値に達するとは,

ある  $c \in [a, b]$  が存在し, すべての  $x \in [a, b]$  に対し  $f(c) \geq f(x)$  が成立することである

と定義する. このとき,  $c$  を関数  $f$  の最大点といい,  $f(c)$  を関数  $f$  の最大値という. 最小についても同様に考えられる. さらに, この日本語を論理記号で記述すると上記の主張は

$$\exists c \in [a, b]; \forall x \in [a, b], f(c) \geq f(x)$$

と簡便な形に書ける.

- 問 3
1.  $y = \sqrt{x}$  の閉区間  $[2, 4]$  における最大点と最大値を求めよ.
  2.  $y = x^2$  の  $[-1, 2]$  における最小点と最小値を求めよ.
  3.  $y = 1/x$  の  $[-3, -1]$  における最大点と最大値を求めよ.

### 3 関数の微分可能性

関数  $y = f(x)$  の微分可能性について解説する. その準備のため区間の端点と内点の定義をする. 区間  $I$  の端点とは  $I$  に属する点で,  $I$  の右端あるいは左端の点のことをいう. 例えば  $[0, 1]$  の端点は  $0$  と  $1$  である. 一方,  $(0, 1)$  は端点を持たない. また, 区間  $I$  の内点とは,  $I$  に属する点で, 端点ではない点のことをいう. 例えば,  $[0, 1]$  の内点は  $0 < x < 1$  を満たす  $x$  である.  $(0, 1)$  の内点はやはり  $0 < x < 1$  を満たす  $x$  である. 一般に开区間ではすべての点はその开区間の内点である. 点  $x$  が区間  $I$  の内点であれば, 十分小さい  $r > 0$  を選ぶことにより

$$(x - r, x + r) \subset I$$

が成立することに注意しよう. 区間  $I$  の内点全体の集合を  $I$  の内部とよび, 記号では  $I^\circ$  と表す. 例えば,  $[a, b]^\circ = (a, b)$ ,  $(a, b)^\circ = (a, b)$  である.

関数  $y = f(x)$  の定義域  $D(f)$  の話から始める. この講義で登場する関数の定義域は多くの場合区間であるが, たまに区間の有限個の和集合であることがある. しかし, それより複雑な定義域をもつ関数はでてこない. 定義域  $D(f)$  が区間の有限個の和集合である場合,  $D(f)$  の点  $x$  が内点であると言っ

たときは、その  $x$  が属する区間において  $x$  が内点であることを意味すること  
にしよう。

- 問 4 1. 区間  $[3, \infty)$  の内部を求めよ。  
2. 関数  $y = x^2$  の  $\varphi_{-1}(\Delta x)$  と  $\varphi_3(\Delta x)$  を求めよ。  
3. 関数  $y = x^3$  の  $\varphi_{-2}(\Delta x)$  と  $\varphi_2(\Delta x)$  を求めよ。  
4. 関数  $y = x^3$  の  $\varphi_a(\Delta x)$  を求めよ。

次に関数の微分可能性について解説する。

1.  $a$  は  $D(f)$  の内点であり、
2. 極限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_a(\Delta x)}{\Delta x}$$

がある実数  $c$  に定まるとき、

関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるという。このとき、 $c$  を関数  $f$  の  $a$  にお  
ける微分係数といい、 $f'(a)$  と表わす。さらに、関数  $f$  が定義域  $D(f)$  のすべ  
ての内点において微分可能であるとき、 $f$  は微分可能であるという。

関数  $y = f(x)$  が微分可能であるとき、その定義域  $D(f)$  のすべての内点  $x$   
で  $x$  における微分係数  $f'(x)$  が定まる。このようにして、新たに  $D(f)$  の各  
内点  $x$  に対して微分係数  $f'(x)$  を対応させるという規則が導かれた。この関  
数  $f'$  は  $D(f)$  の内部  $D(f)^\circ$  を定義域とする。これを関数  $f$  の導関数という。  
関数  $y = f(x)$  の導関数は普通  $y' = f'(x)$  と表され、その従属変数は  $y'$  を使  
うことが習慣となっている。

高校で学習した導関数の公式はこの導関数を手軽に求める方法を教えてく  
れるものであった。例えば、 $y = x^2$  の導関数は  $y' = 2x$  であるという公式は  
誰でも知っているが、いちいち上記の極限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_a(\Delta x)}{\Delta x}$$

を計算しなくても、この公式は  $a$  における微分係数は  $2a$  であることを教えて  
くれるのである。例えば、 $x = 3$  における  $y = x^2$  の微分係数は

$$2x = 2 \times 3 = 6$$

と簡単に求めることができる.

新しい公式として,

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

の導関数は

$$y' = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

であることを紹介する. そして, この導関数の定義域は  $D(f') = (0, \infty)$  である. さらに,

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

の導関数は

$$y' = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

であることを導関数の定義に従って示す. この導関数の定義域は元の関数の定義域と同じ  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  である. そして, 指数の表記法をとると上の微分公式はそれぞれ

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad (x^{-1})' = -x^{-2}$$

となることに注意すべきである.