2017年6月2日

藪友良

F検定

1. 複数の仮説の同時検定

これまで個々のパラメータについて、別々に仮説検定することを考えてきました。しかし、実証分析では、複数のパラメータを同時に仮説検定する必要もあるかもしれません。

ここでは複数のパラメータについて、どのように仮説検定をすれば良いかを考えましょう。説明変数がK個あるとします。

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_{K-q} X_{K-q} + \beta_{K-q+1} X_{K-q+1} + \ldots + \beta_K X_K + u \tag{1}$$

ここでは説明変数を2つのグループに分けています。まず、最初のK-q個の説明変数（$X_1, X_2, \ldots, X_{K-q}$）、そして最後のq個の説明変数（$X_{K-q+1}, X_{K-q+2}, \ldots, X_K$）となります。ここで、最後のq個の説明変数がYの動きを説明するうえで説明力を持っているかに関心がある、としましょう。

このとき、帰無仮説H_0と対立仮説H_1は、

$$H_0: \beta_{K-q+1} = \ldots = \beta_K = 0$$

$$H_1: \beta_{K-q+1} \neq 0 \text{ or } \ldots \text{ or } \beta_K \neq 0$$

となります。H_0はq個の説明変数の係数が全て0、H_1は係数のうち少なくとも1つは0ではない、とします。q=Kの場合、H_0は全ての係数が0となります。

説明を簡単にするため、q個の説明変数を最後に配置しました。しかし、実際の分析では、関心のあるq個の説明変数は最後である必要はありませんし、一緒に並んで配置する必要もありません。また、ここでは定数項が帰無仮説に含まれていませんが、定数項が0であることを仮説に加えることも可能です。

2. 同時検定はなぜ必要なのか？

複数の仮説を個別にt検定するのではなく、なぜ同時検定する必要があるのでしょうか。本節では、個別のt検定は有意水準を適切にコントロールできないことを説明します。

説明変数が2個のケースを考えましょう。

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$$

仮説は $H_0: \beta_1=\beta_2=0$、$H_1: \beta_1 \neq 0$ or $\beta_2 \neq 0$ とします。個別の t 検定として、$H_0: \beta_1=0$ に対応するものを t_1、$H_0: \beta_2=0$ に対応するものを t_2 と表記します。有意水準を 5%とすると、t 統計量が臨界値 $t_{0.05}$ を超えたとき、帰無仮説が棄却されます。$H_0: \beta_1=\beta_2=0$ を検定する場合、$|t_1|> t_{0.05}$ と $|t_2|> t_{0.05}$ の両方もしくは片方が成立していれば、$H_0: \beta_1=\beta_2=0$ を棄却したとしましょう。厳密には、$|t_1|> t_{0.05}$ となる場合を事象 A、$|t_2|> t_{0.05}$ となる場合を事象 B とすると、$A \cup B$ なら $H_0: \beta_1=\beta_2=0$ が棄却されます。

では、帰無仮説が正しいとき、$A \cup B$ が生じる確率（有意水準、つまり帰無仮説を誤って棄却する確率）は何%でしょうか。4 章で学習した加法定理から、

$$P\{A \cup B\}= P\{A\}+ P\{B\} - P\{A \cap B\}$$

となります。個別の t 検定の有意水準は 5%としましたから、$P\{A\}=P\{B\}=0.05$ です。ここで $P\{A \cap B\}$ の値は、t_1 と t_2 の相関関係に依存して変わります。もし t_1 と t_2 が独立なら、$P\{A \cap B\}=P\{A\}P\{B\} =0.05\times 0.05=0.0025$ となります。したがって、$P\{A \cup B\}=0.05+0.05-0.0025=0.0975$ です。有意水準 5%の t 検定を別々に行うと、約 10%の確率で帰無仮説を棄却してしまうのです。もし t_1 と t_2 の相関が強いなら、$P\{A \cap B\}$ は 5%に近い値となります。しかしながら、$P\{A \cup B\}$ は分析しているデータに応じて変わりますし、分析者には、その値が何かは分かりません。したがって、個別の t 検定を使っても、有意水準を正確に選択し検定を行うことができないのです。

3. *F* 検定の手順

前節では、個別に t 検定して複数のパラメータにわたる仮説検定を行うと、有意水準がコントロールできないことを示しました。ここでは、複数の仮説を同時検定するため、新たに *F* 検定を紹介します。*F* 検定は以下の手順で行います。

1) H_1 が正しいと考えて(1)式を推定して、残差 2 乗和 $\sum \hat{u}_{1,i}^2$ と決定係数 R_1^2 を計算します。決定係数の定義 $R_1^2 = 1-\sum \hat{u}_{1,i}^2 / \sum (Y_i - \bar{Y})^2$ から、残差 2 乗和は $\sum \hat{u}_{1,i}^2 = (1-R_1^2)\sum (Y_i - \bar{Y})^2$ とも書けます。
2) H_0 が正しいと考えて（q 個の説明変数を除く）

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_{K-q} X_{K-q} + u \qquad (2)$$

を推定し、残差 2 乗和 $\sum \hat{u}_{0,i}^2$ と決定係数 R_0^2 を計算します。残差 2 乗和は $\sum \hat{u}_{0,i}^2 = (1 - R_0^2)\sum (Y_i - \bar{Y})^2$ となります。

3) このとき、F 統計量は(3)式で与えられます。

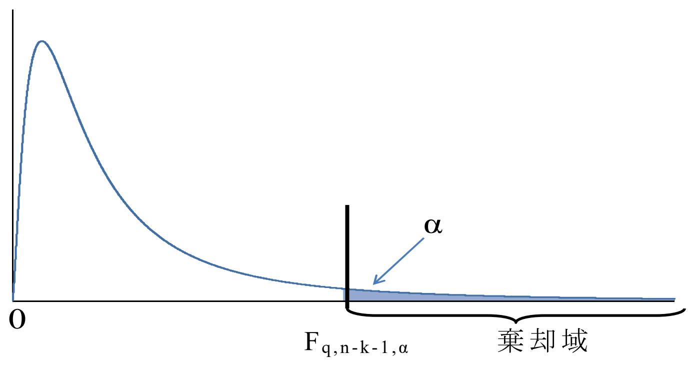
$$F = \frac{(\sum \hat{u}_{0,i}^2 - \sum \hat{u}_{1,i}^2)/q}{\sum \hat{u}_{1,i}^2 /(n-K-1)} \qquad (3)$$

F 統計量は自由度 q、n－K－1 の F 分布に従います。有意水準を α とすると、F が $F_{q,n-K-1,\alpha}$ よりも大きな値であれば、H_0 を棄却して H_1 を採択します。

F の分母は 2 乗和なので正となります。このため、F の符号条件は分子で決まります。そして、(1)式は(2)式より多くの説明変数が含まれていますから、Y の動きをより良く説明でき、残差 2 乗和も小さくなるはずです($\sum \hat{u}_{1,i}^2 \le \sum \hat{u}_{0,i}^2$)。したがって、どちらの仮説が正しくても分子は必ず 0 以上となるはずです。

当然ですが、分子が大きな正の値になるか、小さな正の値になるかは、どちらの仮説が正しいかに依存します。もし H_0 が正しいなら(q 個の説明変数(X_{K-q+1}, X_{K-q+2}, …, X_K) が Y の動きを説明するうえで意味がない)、(2)式でも当てはまりは良いはずであり、分子 $\sum \hat{u}_{0,i}^2 - \sum \hat{u}_{1,i}^2$ は 0 に近い値となるはずです。逆に、H_1 が正しいなら(q 個の説明変数が Y の動きを説明するうえで重要となる)、(2)式では当てはまりが悪くなり、分子 $\sum \hat{u}_{0,i}^2 - \sum \hat{u}_{1,i}^2$ は大きな正の値となります。

図 1 ：$F \sim F(q,n\text{-}k\text{-}1)$



以上をまとめると、

H_0 が正しいなら $\sum \hat{u}_{0,i}^2 - \sum \hat{u}_{1,i}^2$ は小さな値をとる

H_1 が正しいなら $\sum \hat{u}_{0,i}^2 - \sum \hat{u}_{1,i}^2$ は大きな値をとる

よって、F 統計量が十分に大きな値であれば、H_0 を棄却して H_1 を採択するの

が自然です。

厳密には、有意水準を α として、F 値が $F_{q,n\text{-}K\text{-}1,\alpha}$ より大きな値なら H_0 を棄却します（図 1 参照）。つまり、H_0 が正しいとき、H_0 を誤って棄却する確率は α しかありませんから、もし F 値が $F_{q,n\text{-}K\text{-}1,\alpha}$ より大きな値であれば、偶然ではなく H_1 が正しかったと考えます。

4. F 統計量の別表現

F 統計量は、q 個の説明変数（$X_{K\text{-}q+1}, X_{K\text{-}q+2}, \ldots, X_K$）が Y の動きを説明するうえで重要であれば、帰無仮説（$X_{K\text{-}q+1}, X_{K\text{-}q+2}, \ldots, X_K$ は意味がない）を棄却します。逆に、Y の動きを説明するうえで役に立たないなら、帰無仮説は採択されてしまいます。したがって、もし q 個の説明変数が決定係数を大きく改善していたら、F 値の値は大きくなるはずです。こうした直観は正しく、実は、F 統計量は決定係数を使っても表現できます。以下では、F 統計量の別表現を紹介します。

残差 2 乗和は

$$\sum \hat{u}_{0,i}^2 = (1-R_0^2)\sum (Y_i-\bar{Y})^2 、\sum \hat{u}_{1,i}^2 = (1-R_1^2)\sum (Y_i-\bar{Y})^2$$

と書けました。両式を(3)式に代入することで、F 統計量は

$$F = \frac{[(1-R_0^2)\sum (Y_i-\bar{Y})^2 - (1-R_1^2)\sum (Y_i-\bar{Y})^2]/q}{[(1-R_1^2)\sum (Y_i-\bar{Y})^2]/(n-k-1)}$$

$$= \frac{(R_1^2-R_0^2)/q}{(1-R_1^2)/(n-k-1)} \tag{4}$$

と表記できます。H_1 が正しいなら、q 個の説明変数を含んだ(1)式は当てはまりが良く、決定係数 R_1^2 は大きな値を取り、ゆえに分子 $R_1^2-R_0^2$ も大きな値を取ります。H_0 が正しいなら、q 個の説明変数を入れても、これらを除いてもフィットは変わりませんから、分子 $R_1^2-R_0^2$ は小さな値を取ります。

例 1（通常表示される F 値とは？）　統計ソフト（エクセルなど）で回帰分析をすると、デフォルトとして F 値が表示されます。これは仮説を

$$H_0: \beta_1=\ldots=\beta_K=0$$

$$H_1: \beta_1 \neq 0 \text{ or} \ldots \text{or } \beta_K \neq 0$$

として F 統計量を計算したものです（q=K の場合）。つまり、帰無仮説 H_0 は全ての説明変数の係数が 0 である、対立仮説は少なくとも 1 つの係数は 0 ではない、となります。H_0 が採択されたら説明変数がどれも意味がなく、H_0 が棄却されたらどれかが意味があるのです。

H_0 が正しいなら、モデルは $Y_i=\alpha+u_i$ となります。練習問題 2.12(2)で見たように、α の最小 2 乗推定量は $\overline{Y}$ となります（つまり、$\hat{\alpha}=\overline{Y}$）。よって、残差 2 乗和は、Y の偏差 2 乗和 $\sum \hat{u}_{0,i}^2 = \sum (Y_i - \overline{Y})^2$ です。また、$\sum \hat{u}_{1,i}^2 = (1-R_1^2)\sum (Y_i - \overline{Y})^2$ から、(3)式より、

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{(\sum (Y_i - \overline{Y})^2 - (1-R_1^2)\sum (Y_i - \overline{Y})^2)/q}{(1-R_1^2)\sum (Y_i - \overline{Y})^2 /(n-k-1)} \\
&= \frac{R_1^2 / q}{(1-R_1^2)/(n-k-1)}
\end{aligned}
$$

となります。決定係数 R_1^2 が大きくなると、F 値も大きくなることが分かります。つまり、(1)式を推定し、決定係数 R_1^2 が高ければ H_0 を棄却できます。決定係数 R_1^2 が高ければ説明変数が有効なわけですから、説明変数は意味がないという仮説を棄却できるのです。厳密には、q=K から F～F(K, n-K-1)となり、有意水準 α のとき、F が $F_{K,n-K-1,\alpha}$ より大きな値なら H_0 を棄却します。

こうした仮説検定は、説明変数が非常に多いときに重要となります。たとえば、説明変数が 20 個もあれば、そのうち数個は偶然、帰無仮説が誤って棄却されるかもしれません。説明変数が 200 個もあればなおさらです。しかし、F 検定によって、全ての係数が同時に 0 であるかを調べれば、誤って仮説を棄却する可能性は有意水準に等しくなります。これが全ての係数が同時に 0 であるかを検証する理由となります。ただし、帰無仮説が棄却されても、どの変数が有意なのかは分かりませんから、結果の解釈には注意が必要です。

5. 構造変化の検定

時系列データを扱っていると、パラメータに生じる構造変化を捉えることが重要となります。たとえば、オイルショックやバブル崩壊により、突然、経済構造が変化したりします。このとき経済構造の変化を的確に捉えないと、推定に歪みが生じてしまいます。

分析者は T_B 期に構造変化が生じたかどうかに関心があります。このため、標本期間を T_B 期で 2 つに分割します。

$$Y_t = \alpha^{(1)} + \beta_1^{(1)} X_{1,t} + \ldots + \beta_K^{(1)} X_{K,t} + u \qquad \text{期間：} t=1,\ldots,T_B \tag{5}$$
$$Y_t = \alpha^{(2)} + \beta_1^{(2)} X_{1,t} + \ldots + \beta_K^{(2)} X_{K,t} + u \qquad \text{期間：} t=T_B+1,\ldots,T$$

標本期間の前半が 1～T_B で、後半が T_B+1～T となります。パラメータの右上添え字は、構造変化が生じた前後でパラメータが異なる可能性を明示するために数字を入れています。つまり、前半のパラメータは $\alpha^{(1)}$、$\beta_1^{(1)}$、…、$\beta_K^{(1)}$、後半のパラメータは $\alpha^{(2)}$、$\beta_1^{(2)}$、…、$\beta_K^{(2)}$ です。

ここでの仮説は、

$$H_0: \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}, \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_K^{(1)} = \beta_K^{(2)}$$
$$H_1: \alpha^{(1)} \neq \alpha^{(2)} \text{ or } \beta_1^{(1)} \neq \beta_1^{(2)} \text{ or } \ldots \text{ or } \beta_K^{(1)} \neq \beta_K^{(2)}$$

であり、帰無仮説 H_0 は構造変化がない、対立仮説 H_1 は構造変化がある、を意味します。

構造変化の検定を行うため、ダミー変数を定義しましょう。

$$D_t = \begin{cases} 0 & t \le T_B \\ 1 & t > T_B \end{cases}$$

ここで D_t は、t が標本期間の前半なら 0、後半なら 1 となるダミー変数です。

ダミー変数を用いることで、先の 2 本の式を

$$Y_t = \alpha^{(1)} + \beta_1^{(1)} X_{1,t} + \ldots + \beta_K^{(1)} X_{K,t} + \theta_0 D_t + \theta_1 D_t X_{1,t} + \ldots + \theta_K D_t X_{K,t} + u_t \tag{6}$$

とまとめられます。ただし、$\theta_0=\alpha^{(2)}-\alpha^{(1)}$ 、$\theta_1=\beta_1^{(2)}-\beta_1^{(1)}$、…、$\theta_K=\beta_K^{(2)}-\beta_K^{(1)}$となります。説明変数は X_1, X_2,…, X_K、そしてダミー変数との交差項(X_1D, X_2D,…, X_KD)からなります。このとき、仮説は

$$H_0:\theta_0= \theta_1=\ldots= \theta_K=0、H_1:\theta_0 \neq 0 \text{ or } \theta_1 \neq 0、\ldots、 \text{ or } \theta_K \neq 0$$

と表現できます。H_0 は構造変化がない、対立仮説 H_1 は構造変化がある、を意味します。

(6)式は H_1 が正しいときの定式化であり、この式を推定することで、対立仮説 H_1 のもとでの残差 2 乗和 Σu_1^2 が計算できます。H_0 が正しいなら構造変化がないため、全期間のデータから、

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1,t} + \ldots + \beta_K X_{K,t} + u_t$$

を推定することで、残差 2 乗和Σu_0^2が得られます。そして、H_1のもとで説明変数は 2(K+1)あり、q=K+1 ですから、F 統計量は自由度 K+1、n-2(K+1)の F 分布します（F～F(K+1, n-2(K+1)) ）。

例 1（為替介入の効果）　日本の通貨当局（財務省と日本銀行）は、為替レートが過度に変動しないようにする目的のため、為替介入を行ってきました。為替介入とは、通貨当局が外国為替市場において、為替レートに影響を与えることを目的に外国為替の売買を行うことです。ここでは 1991 年 4 月 1 日から 2002 年 12 月 31 日までの日次データを用いて、為替介入の効果を分析しました。

$$\Delta s = \alpha+\beta Int+u$$

Δs は為替の変化率、Int を介入金額（億円）とします。Int>0 なら円買ドル売介入、Int<0 なら円売ドル買介入とします。介入が意図した効果があるとき、$\beta<0$ となります。構造が安定していたか（α と β に構造変化があったか）を調べましょう。

$$\Delta s = \alpha^{(1)}+\beta^{(1)}Int+u \quad \text{for } t=1,\ldots,T_B$$

$$\Delta s = \alpha^{(2)}+\beta^{(2)}Int+u \quad \text{for } t=T_B+1,\ldots,T$$

有意水準 5%とすると、F 値が 3.00（$=F_{2,n-4,0.05}$）より大きければ H_0 が棄却されます[1]。

構造変化の検定においては、分析者が構造変化日を決める必要があります。恣意的に構造変化日を決めてしまうと、結果に信頼性がおけなくなってしまいます。たとえば、1993 年 5 月 31 日に構造変化が生じたかを検証すると、F 値は 1.64 であり H_0 が採択されます。構造変化日が 1995 年 6 月 21 日とすると、F 値は 15.34 で H_0 が棄却されます。もし分析者が構造変化はないと主張したいなら、1993 年 5 月 31 日を構造変化日に設定すれば良いことになります。逆に、構造変化があると主張したいなら、1995 年 6 月 21 日を構造変化日と設定すれば良いのです。これでは研究者の判断で結果が左右されてしまい望ましくありません。

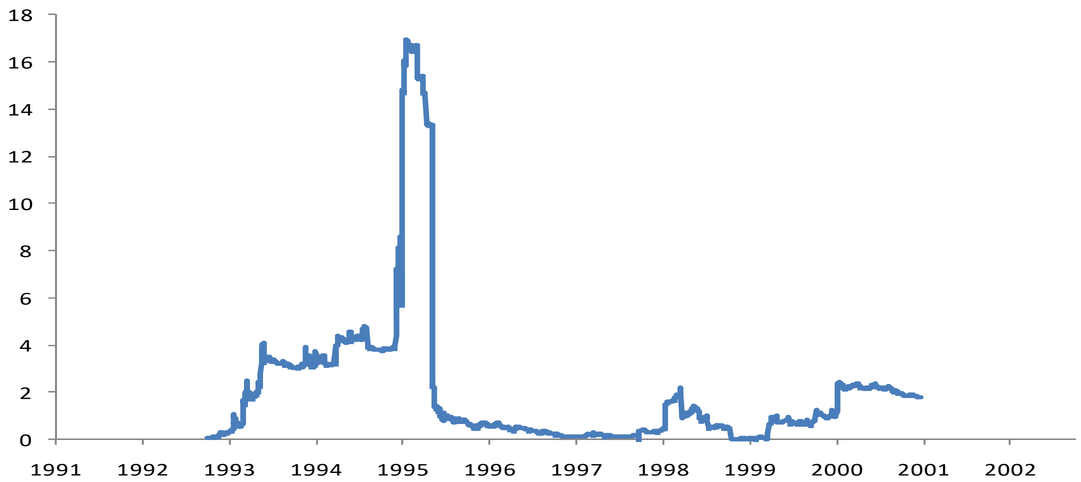
図 2 では、さまざまな構造変化日に対して F 値を計算してみました[2]。たとえ

[1] 日次データで n は非常に大きいため、$F_{2,\infty,0.05}$ の値を用いました。

[2] 構造変化日 T_B としては、0.15T から 0.85T までを考えます。たとえば、T=100 であれ

ば、F 値は 1993 年 5 月 31 日で 1.64、1995 年 6 月 21 日は 15.34 となっています。1995 年 4 月 17 日で、F 値は 16.69 で最大となります。構造変化日は F 値を最大にする日と考えるのが自然です。つまり、構造変化がないとする帰無仮説をもっとも棄却しやすい日が、構造変化日の推定値として尤もらしいと考えられます。構造変化日は 1995 年 4 月 17 日ですが、F 値が 16.69 という結果から構造変化があったといえるのでしょうか。この F 値は sup-F と呼ばれ、通常の F 分布と異なる分布に従います[3]。さまざまな構造変化日を試して、もっとも大きな値をとる F 値ですから、通常の F 統計量より大きい値を取りやすくなります。表 1 は、sup-F の分布表となります。H_0 が正しい（構造変化がない）なら、制約数 q=2 のもとで、sup-F が 5 よりも大きい確率は 10%、5.86 より大きい確率は 5%、7.78 より大きい確率は 1%です。よって、sup-F が 16.69 ということは、H_0 が正しという仮説を、どの有意水準でも棄却できます。つまり、構造変化が無かったとはいえないのです。

図 2: sup-F 検定



以上の分析から、構造変化日は 1995 年 4 月 17 日とされました。ここでは、1995 年 4 月 17 日以前と以後で別々に推計を行いました。その結果、

ば、構造変化日は 15、16、...、84、85 とします。このように、最初の 1～14 と最後の 86～100 は構造変化日として考えません。これは構造変化日の前と後で、十分な標本数を確保するためです。

[3] Sup は supremum の略であり、最大値を表します。さまざまな F 値を計算して、一番大きな値を使うので、Sup-F と表記します。

前半：$\Delta s = -0.0002 + 0.035Int+u$

$(0.0002) \quad (0.011)$

後半：$\Delta s = 0.00007 -0.011Int+u$

$(0.0002) \quad (0.002)$

となりました。つまり、後半では β は有意に負で、介入は意図した効果を持っていますが、前半では β は有意に正で、介入は逆効果を持っています。

表 1: sup-F

	α		
q	**0.10**	**0.05**	**0.01**
1	7.12	8.68	12.16
2	5.00	5.86	7.78
3	4.09	4.71	6.02
4	3.59	4.09	5.12
5	3.26	3.66	4.53
6	3.02	3.37	4.12
7	2.84	3.15	3.82
8	2.69	2.98	3.57
9	2.58	2.84	3.38
10	2.48	2.71	2.23
11	2.40	2.62	3.09
12	2.33	2.54	2.97

コラム：Mr. Yen

1995 年に何があったのでしょうか？少し時期が違いますが、1995 年 6 月 21 日、Mr. Yen と呼ばれた榊原英資氏が財務省の国際金融局局長に就任し、為替介入の意思決定における実際上の指揮を始めました。彼は、前任者の介入について、次のように語っています。「介入があまりにも頻繁すぎたということもあって、市場は介入慣れし、市場は介入を 1 つの与件としながら動いていた。しかも、ほとんどの介入は協調介入を含めて予測可能で、協調介入でさえ、若干の効果が短期的には見られたものの、その効果は長続きせず、市場の円高センチメントを変えるのは容易でなかった」そこで、「為替介入の哲学と手法の変更。これは、私が決定し、財務官と大臣を説得すればよかった。1 つは、介入の頻度を極端に少なくし、1 回ごとの介入は大量の資金でいわゆる押上げ介

入することだった」。つまり、榊原氏は、市場参加者の期待形成を効果的に変えるため、意図的に大規模な介入を少ない頻度で行うことで、介入効果を高めていたと言えます。

これまで統計的に構造変化の可能性を検証し、その後、榊原氏の著書からも構造変化の確認ができました。構造変化を実証するためには、統計的にも歴史・制度的にも確認する必要があります。たとえば、榊原氏が著書で介入の仕方を変えたと言っても、介入方法が実際に変わっているかは分かりません。また、介入方法が変わっていても、それが介入効果を表す β まで変化させているとは限らないでしょう。逆に、統計的に構造変化が確認できたとしても、歴史・制度的な裏付けをしないと、その主張に説得力が足りないでしょう。統計的な裏付け、歴史・制度的な裏付けは、車輪の両輪なのです。どちらかが欠けても良い実証研究とは言えません。

6. トレンド変数と構造変化

12 章では、ダミー変数を紹介しました。計量経済学では、ダミー変数以外にも分析に有用な様々な変数があります。ここでは、その中でトレンド変数を紹介します。

線形モデル

多くの時系列データにはトレンドが存在します。たとえば、GDP、消費、気温などは右上がりのトレンドを持った系列です。トレンドを考慮するため、1、2、3、4、…というように、値が 1 ずつ増加していくトレンド変数（t と表記）を考えましょう。表 2 では、1970 年から 1978 年までについてトレンド変数 t を定義しました。トレンド変数は、データが始まった 1970 年に 1 という値をとり、1 ずつ値が増加しています。

GDP の動きを説明するモデルとして、

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t$$

を考えましょう。ここで $Y_t = \ln(GDP_t)$としています。GDP には右上がりのトレンドがありますから、説明変数としてトレンド変数 t を用いています。上式は t-1 時点でも成立していますから、$Y_{t-1} = \alpha + \beta(t-1) + u_{t-1}$ となります。t 時点と t-1 時

点の差をとると（t-(t-1) =1 に注意）、

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta + (u_t - u_{t-1})$$

となります。ゆえに、差の期待値は

$$E[Y_t - Y_{t-1}] = \beta$$

となります（$E[u_t]= E[u_{t-1}]=0$ に注意）。Y_t は GDP の対数であり、対数の差は変化率に等しいため（数学の付録参照）、β は GDP の期待成長率と解釈できます。

トレンドモデルの例として、地球温暖化の実証分析をすることもできます。Y を世界の平均気温とすると、$\beta>0$ なら地球温暖化を意味し、$\beta=0$ なら温暖化は生じていないことになります。

多項トレンド

もちろんトレンドは非線形かもしれません。たとえば、世界気温の分析では、2次トレンドまで含んだ $Y_t=\alpha+\beta_1 t+\beta_2 t^2+u_t$ として定式化するほうが良いかもしれません。表 2 では、t の 2 乗として t^2 を作成しています。

説明変数を K 個考えると、一般的な多項トレンドモデル（polynomial trend model）を考えることもできます。

$$Y_t=\alpha+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\ldots+\beta_k t^k+u_t$$

このモデルを用いることで、単純な上昇や下降トレンドだけでなく、複雑なトレンドを考慮することができます。

表 2: トレンド変数の作り方

	t	t^2	DU	DT
1970	1	1	0	0
1971	2	4	0	0
1972	3	9	0	0
1973	4	16	1	0
1974	5	25	1	1
1975	6	36	1	2
1976	7	49	1	3
1977	8	64	1	4
1978	9	81	1	5

構造変化モデル

非線形モデルとしては、突然の構造変化を考えることも可能です。たとえば、

1973 年のオイルショックにより、多くの国で経済成長率が鈍化しました。また、世界大恐慌では、世界経済が急激に冷え込み、GDP の水準が急激に落ちこみました。こうした突然の変化は多項トレンドではなく、ダミー変数を用いて捉える方がよいかもしれません。

構造変化日（T_B 時点）で水準が急激に変化する影響を捕らえたいなら、ダミー変数 D_t を考えます。D_t は、$t \leq T_B$ なら 0 となり、$t > T_B$ なら 1 となる変数です。この変数を用いて、

$$Y_t = \alpha + \beta t + \gamma D_t + u_t$$

とします。このとき、$t \leq T_B$ なら $D_t=0$ から $Y_t=\alpha+\beta t+u_t$ となり、$t > T_B$ なら $D_t=1$ から $Y_t=(\alpha+\gamma)+\beta t+u_t$ となります。構造変化による水準のシフトが捉えられていることが分かります。もし $\gamma=0$ なら水準の急激な変化はないとします。

次に、構造変化時点で係数だけがシフトする影響を捉えたいとしましょう（水準は変化していない）。たとえば、石油ショックで経済成長率は減少しましたが、GDP の水準はあまり変わりませんでした。このとき、$DT_t=D_t(t-T_B)$という変数を作ります。DT_t は、$t \leq T_B$ なら 0 となり、$t > T_B$ なら$(t-T_B)$となる変数です。表 2 では、構造変化時点として 1973 年（$T_B=4$）として D、DT を定義しています。

この変数を用いて、

$$Y_t = \alpha + \beta t + \theta DT_t + u_t$$

とします。このとき、$t \leq T_B$ なら $DT_t=0$ から $Y_t=\alpha+\beta t+u_t$ となり、$t > T_B$ なら $DT_t=(t-T_B)$から $Y_t=\alpha+\beta t+\gamma(t-T_B)+u_t$ となります。DT_t を定義するとき、t ではなく$(t-T_B)$を使った理由は、トレンドの傾きの変化だけを捉えたいからです（もし $DT_t=D_t t$ と定義してしまうと構造変化によって水準も大きく変化します）。ここで $\theta=0$ なら構造変化なしとなります。

もしトレンドの傾きと定数項へのシフトを同時に考慮したいなら、

$$Y_t = \alpha + \beta t + \gamma D_t + \theta DT_t + u_t$$

を推定します。$\gamma=\theta=0$ なら構造変化なしです。

構造変化日が未知であれば、5 節の SupF 検定をすることで、構造変化日を特定することも可能です。