2024/01/10

藪友良

積率母関数と中心極限定理

統計学の理論分析において、重要な位置を占める積率母関数を説明し、その対数として定義されるキュムラント母関数を紹介します。これらを用いることで、確率変数のk次の積率や中心積率を簡単に求めたり、正規分布の再生性や中心極限定理を証明したりすることが可能となります。4 節では、正規分布の再生性を、5 節では、中心極限定理を証明していますので、興味がある読者は最後まで読んでください。なお、本資料は、藪友良『入門　実践する統計学』(2012 年、東洋経済新報社)の補足資料となります。

1. 積率母関数とは

確率変数Xを用いて、次のように関数$M(t)$を定義します。

$$M(t) = E[e^{tX}]$$

このとき、k**次の積率**(kth moment)である$E[X^k]$は、次のように求めることができます。

$$E[X^k] = \frac{d^k M(t)}{dt^k}|_{t=0}$$

積率がすぐに計算できるため、関数$M(t)$は**積率母関数**(moment generating function)もしくは**モーメント母関数**と呼ばれます[1]。

[積率母関数から積率を求める証明]

ネイピア数eを用いた指数関数e^{tX}を$X=0$の周りでマクローリン展開すると、次のようになります[2]。

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2}{2!}X^2 + \frac{t^3}{3!}X^3 + \ldots$$

上式の期待値をとることで、積率母関数は次のように表現できます。

$$E[e^{tX}] = 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \frac{t^3}{3!}E[X^3] + \ldots$$

ここで、tに関して積率母関数を微分すると、

$$\frac{dM(t)}{dt} = E[X] + tE[X^2] + \frac{t^2}{2!}E[X^3] + \ldots$$

となり、これを$t=0$で評価すると 1 次の積率になります。

---

1 確率変数によっては、積率母関数は定義できない場合もあります。これは積率についても同じことです。

2 マクローリン展開は、数学の入門書を調べてください。なお、マクローリン展開では、$t=0$のとき、$e^{tX}|_{t=0} = 0$であること、また、$\frac{de^{tX}}{dt}|_{t=0} = X$、$\frac{d^2e^{tX}}{dt^2}|_{t=0} = X^2$、$\frac{d^3e^{tX}}{dt^3}|_{t=0} = X^3$、…となることに注意してください。

$$\frac{dM(t)}{dt}|_{t=0} = E[X]$$

次に、tに関して積率母関数を 2 階微分すると、

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2} = E[X^2] + tE[X^3] + \ldots$$

となり、これを$t = 0$で評価すると、2 次の積率となります。

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2}|_{t=0} = E[X^2]$$

これを繰り返すと、以下が成立することを確認できます。

$$\frac{d^kM(t)}{dt^k}|_{t=0} = E[X^k]$$

[終]

例 1：標準正規分布 *N*(0, 1)の積率母関数

確率変数Xは標準正規分布に従うとしましょう。Xの密度関数は$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$であることから、積率母関数は次のようになります。

$$E[e^{tX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2-2tx}{2}\right)}dx$$

ここで次の等式を用いると、

$$x^2 - 2tx = (x-t)^2 - t^2$$

積率母関数は次のように展開できます。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}dx = e^{\frac{t^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}dx\right]$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}}$$

上式の展開では、$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}$は正規分布 *N*(*t*, 1)の密度関数であるため、$-\infty$から∞まで積分をとると、1 になることを用いました(確率の和は 1 となります)。

この積率母関数を、*t* で微分しましょう。合成関数の微分の公式を使うと、次のようになります(合成関数の微分の公式は、サポートウェブサイトの追加資料「微分について」を参照してください)[3]。

---

[3] 式展開を詳しく書きます。$z = \frac{t^2}{2}$と定義すると、合成関数の微分の公式から、次のようになります。

$$\frac{dM(t)}{dt} = te^{\frac{t^2}{2}}$$

よって、$t = 0$で評価すると 0 になります(つまり、$E[X] = 0$)。次に、2 階微分すると、

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2} = e^{\frac{t^2}{2}} + t^2e^{\frac{t^2}{2}}$$

となり、$t = 0$で評価すると 1 になります(つまり、$E[X^2] = 1$)。次に、3 階微分すると、

$$\frac{d^3M(t)}{dt^3} = te^{\frac{t^2}{2}} + 2te^{\frac{t^2}{2}} + t^3e^{\frac{t^2}{2}}$$

となり、$t = 0$で評価すると 0 になります(つまり、$E[X^3] = 0$)。最後に、4 階微分すると、

$$\frac{d^4M(t)}{dt^4} = \left(e^{\frac{t^2}{2}} + t^2e^{\frac{t^2}{2}}\right) + 2\left(e^{\frac{t^2}{2}} + t^2e^{\frac{t^2}{2}}\right) + (3t^2e^{\frac{t^2}{2}} + t^4e^{\frac{t^2}{2}})$$

となり、$t = 0$で評価すると 3 になります(つまり、$E[X^4] = 3$)[4]。

例 2：正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$の積率母関数

確率変数Xは正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$に従うとしましょう。このとき、積率母関数は次のように計算できます。

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2-2\sigma^2tx}{2\sigma^2}}dx$$

ここで次の等式を用いると、

$$(x-\mu)^2 - 2\sigma^2tx = x^2 + \mu^2 - 2\mu x - 2\sigma^2tx$$

$$= [x^2 - 2(\mu + \sigma^2t)x + (\mu + \sigma^2t)^2] + [\mu^2 - (\mu + \sigma^2t)^2]$$

$$= [x - (\mu + \sigma^2t)]^2 - [2\mu\sigma^2t + \sigma^4t^2]$$

積率母関数は次のように展開できる。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2t)]^2-[2\mu\sigma^2t+\sigma^4t^2]}{2\sigma^2}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-(\mu+\sigma^2t)]^2}e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}dx$$

$$= e^{ut+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-(\mu+\sigma^2t)]^2}dx\right]$$

$$\frac{de^{\frac{t^2}{2}}}{dt} = \frac{de^z}{dz}\frac{dz}{dt} = e^zt$$

そして、$z = \frac{t^2}{2}$を代入すると、$e^zt = te^{\frac{t^2}{2}}$です。以下の式展開では、とくに明示することなく、合成関数の微分の公式を用いていますので注意してください。

[4] 藪友良『入門　実践する統計学』(東洋経済新報社、2012)9 章の証明にある脚注(10)では、標準確率変数の 4 乗の期待値が 3 となることを用いました。

右辺[ ]内は、$N(\mu+\sigma^2 t,\ \sigma^2)$の密度関数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-(\mu+\sigma^2 t))]^2}$の積分です。確率の和は 1 から、[ ]内は 1 となります。まとめると、積率母関数は次のようになります[5]。

$$M(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

正規確率変数Xの期待値がμ、分散がσ^2となることを証明しましょう。まず、積率母関数を t で微分すると、次のようになります。

$$\frac{dM(t)}{dt}=(\mu+\sigma^2 t)e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

よって、$t=0$で評価するとμになります(つまり、$E[X]=\mu$)。次に、2 階微分すると、

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2}=\sigma^2 e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}+(\mu+\sigma^2 t)^2 e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

となり、$t=0$で評価すると$\sigma^2+\mu^2$になります(つまり、$E[X^2]=\sigma^2+\mu^2$)。Xの分散は、

$$V(X)=E[(X-\mu)^2]=E[X^2]-\mu^2$$

となりますから、$\sigma^2(=\sigma^2+\mu^2-\mu^2)$と求めることができます。

2. キュムラント母関数とは

積率を計算する別の方法として、キュムラント母関数があります。確率変数Xの積率母関数が$M(t)$であるとき、**キュムラント母関数**(cumulant generating function)は、積率母関数の対数として定義されます。

$$K(t)=\ln M(t)$$

キュムラント母関数は、**中心積率**である$E[(X-E[X])^r]$と関連しています。なお、積率母関数の定義($M(t)=E[e^{tX}]$)から、$K(0)=\ln M(0)=\ln(1)=0$です。

キュムラント母関数を、$t=0$の周りでマクローリン展開すると、次のようになります。

$$K(t)=K(0)+k_1 t+\frac{k_2}{2!}t^2+\frac{k_3}{3!}t^3+\frac{k_4}{4!}t^4+\ldots$$

なお、k_rは**キュムラント**(cumulant)と呼ばれ、$t=0$で評価した関数$K(t)$の r 階微分として定義されます。

$$k_r=K_r(t)|_{t=0}=\frac{d^r K(t)}{dt^r}|_{t=0}$$

つまり、キュムラント母関数を r 階微分して、$t=0$と置けば、キュムラントk_rを求めることができます。

$K(t)$の r 階微分とは、たとえば、

---

[5] たとえば、標準正規分布であれば、$\mu=0$、$\sigma^2=1$を代入することで、積率母関数は$M(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$となり、これは例 1 の結果と同じになります。

$$K_1(t) = \frac{dK(t)}{dt} = \frac{1}{M(t)}\frac{dM(t)}{dt}$$

$$K_2(t) = \frac{d^2K(t)}{dt^2} = \frac{1}{M(t)}\frac{d^2M(t)}{dt^2} - \frac{1}{M(t)^2}\left(\frac{dM(t)}{dt}\right)^2$$

であり、これらは積率母関数の性質($M(0) = 1$、$\frac{dM(t)}{dt}|_{t=0} = E[X]$、$\frac{d^2M(t)}{dt^2}|_{t=0} = E[X^2]$)を使うと、積率を使って次のように表現できます。

$$k_1 = K_1(t)|_{t=0} = E[X]$$
$$k_2 = K_2(t)|_{t=0} = E[X^2] - E[X]^2 = E[(X - E[X])^2]$$

なお、k_2は 2 次の中心積率であり、分散となります。少し面倒ですが、同様の計算をすると、k_3を次のように求めることができます。

$$k_3 = K_3(t)|_{t=0} = E[(X - E[X])^3]$$

なお、k_4、k_5、…は中心積率ではなく、中心積率の多項関数になっています。

例 3：正規確率変数のキュムラント母関数

確率変数Xが正規分布 $N(0、\sigma^2)$に従うとき、その積率母関数は次のようになります(例 2 で$\mu = 0$と置いた場合に該当します)。

$$M(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

この対数をとると、正規分布 $N(0、\sigma^2)$のキュムラント母関数が得られます。

$$K(t) = \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

$t = 0$のとき、$K(0) = 0$です。また、1 階微分すると、

$$K_1(t) = \sigma^2 t$$

となり、これを$t = 0$で評価すると、$k_1 = K_1(0) = 0$です(つまり、期待値は 0 となる)。2 階微分すると、

$$K_2(t) = \sigma^2$$

となり、これを$t = 0$で評価すると、$k_2 = K_2(0) = \sigma^2$です(つまり、分散はσ^2となる)。3 階微分すると 0 となり、$t = 0$で評価しても、$k_3 = K_3(0) = 0$です(つまり、$E[(X - E[X])^3]$は 0 となる)。なお、k_4、k_5、…はすべて 0 です。

3. 積率母関数と確率分布の対応

積率母関数と分布関数は 1 対 1 で対応していることが知られています。つまり、分布関数と積率母関数を知ることは同一の事象となります。例えば、確率変数X_1、X_2の積率母関数が、それぞれ$M_1(t)$、$M_2(t)$とします。ここで、$M_1(t) = M_2(t)$であれば、任意の値xに対して、$P\{X_1 < x\} = P\{X_2 < x\}$が成立します。

これは直観的には明らかです。2 つの積率母関数が等しいなら、全ての積率が等しくなります。

$$E\left[X_1^k\right] = E\left[X_2^k\right]\ for\ any\ k$$

つまり、期待値と分散だけでなく、分布の性質を決定している高次の積率も等しくなることから、分布も一致すると考えることは自然なことでしょう。

以下では、積率母関数を用いて、正規確率変数の再生性と中心極限定理の証明をします。定理の詳細やその直観は、教科書『入門　実践する統計学』(東洋経済新報社、2012)を参照してください。

4. 正規確率変数の再生性

確率変数X_1、X_2は、相互に独立な正規確率変数とします。つまり、

$$X_1 \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)、X_2 \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$$

となります。このとき、任意の定数(c_1、c_2)を用いた確率変数X_1、X_2の線形関数$c_1X_1 + c_2X_2$の積率母関数を求めましょう。

ここで、$c_iX_i \sim N(c_i\mu_i,\ c_i^2\sigma_i^2)$であることから、$c_iX_i$の積率母関数は次のようになります。

$$E[e^{tc_iX_i}] = E\left[e^{(tc_i)X_i}\right]$$

$$= e^{c_i\mu_i t + \frac{c_i^2\sigma_i^2 t^2}{2}}$$

これを用いると、線形関数$c_1X_1 + c_2X_2$の積率母関数は、

$$M(t) = E[e^{t(c_1X_1 + c_2X_2)}]$$

$$= E[e^{tc_1X_1}]E[e^{tc_1X_2}]$$

$$= e^{c_1\mu_1 t + \frac{c_1^2\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{c_2\mu_2 t + \frac{c_2^2\sigma_2^2 t^2}{2}}$$

$$= e^{(c_1\mu_1 + c_2\mu_2)t + \frac{(c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

となります(式展開では、確率変数X_1、X_2は相互に独立であるため、$E[e^{t(c_1X_1+c_2X_2)}] = E[e^{tc_1X_1}]E[e^{tc_1X_2}]$としました)。これは$N(c_1\mu_1 + c_2\mu_2,\ c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2)$の積率母関数と同じです。つまり、2 つの独立な正規確率変数の線形関数は、やはり正規確率変数となることが確認できます。

5. 中心極限定理

無作為抽出によって確率変数X_1、X_2、…、X_nが得られるとしましょう。よって、これらの確率変数は相互に独立であり、同一の分布に従うことになります(分布はどのようなものでもかまいません)。また、X_iの期待値はμ、分散はσ^2とします。中心極限定理では、「nが十分に大きいとき、確率変数$Z_n = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$は正規分布 $N(0、\sigma^2)$に従う」と主張しています[6]。

---

[6] 同じことですが、これが正しいとき、$\bar{X} \sim N(\mu、\sigma^2/n)$、$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu、n\sigma^2)$となります。中心極限定理を$\bar{X}$や$\sum_{i=1}^n X_i$

ここでは、中心極限定理が正しいことを、積率母関数を用いて証明しましょう[7]。

確率変数Z_nを次のように定義します[8]。

$$Z_n = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{n}}$$

ここで、$Y_i = X_i - \mu$と定義すると、Z_nは次のように表現できます。

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}}$$

なお、Y_iは期待値 0、分散σ^2となります。

確率変数Y_iの積率母関数を$M(t) = E[e^{tY_i}]$、キュムラント母関数を$K(t) = \ln M(t)$と定義します。このとき、確率変数$Y_i/\sqrt{n}$の積率母関数は、

$$E\left[e^{t\frac{Y_i}{\sqrt{n}}}\right] = E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_i}\right]$$

と展開できるため、積率母関数は$M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$となります。よって、$Z_n$の積率母関数$M_n(t)$は、

$$\begin{aligned}
M_n(t) = \ & E\left[e^{t\frac{(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)}{\sqrt{n}}}\right] \\
&= E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_1}\right] E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_2}\right] \dots E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_n}\right] \\
&= \ M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \dots M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n
\end{aligned}$$

となります(式展開では、Y_iが相互に独立であることを用いました)。

確率変数Z_nのキュムラント母関数は、積率母関数の対数をとることで求められます。

$$K_n(t) = \ln M_n(t) = n \ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = nK\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

ここで、$K(s) = K(0) + k_1 s + \frac{k_2}{2!}s^2 + \frac{k_3}{3!}s^3 + \frac{k_4}{4!}s^4 + \ldots$と展開でき、$s = t/\sqrt{n}$であることに注意すると、$Z_n$のキュムラント母関数は次のようになります。

を用いて証明しないのは、$\bar{X}$の分散が 0 に収束してしまうこと、$\sum_{i=1}^{n} X_i$の分散が∞に発散してしまうことからです。

7 厳密には、積率母関数が存在しない確率変数があることから、中心極限定理は特性関数$E[e^{itX}]$を用いて証明されます(iは虚数であり、$i = \sqrt{-1}$と定義されます)。なお、本節の証明は、Bruce Hansen (2023) “Probability and Statistics for Economists” Princeton University Press を参考にしました。

8 式展開を詳しく書きます。$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$に注意すると、

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) &= \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right) \\
&= \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

$$K_n(t) = n\left\{K(0) + k_1\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{k_2}{2!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{k_3}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{k_4}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 + \ldots\right\}$$

キュムラント母関数の性質から、$K(0) = 0$となり、また、この場合、$k_1 = 0$、$k_2 = \sigma^2$となります(k_1はY_iの期待値 0、k_2は分散σ^2です)。よって、キュムラント母関数は、

$$K_n(t) = n\left\{\frac{\sigma^2}{2!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{k_3}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{k_4}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2!}t^2 + \frac{k_3}{3!\sqrt{n}}t^3 + \frac{k_4}{4!\,n}t^4 + \cdots$$

となり、右辺 2 項目以降の分母にはnが含まれているため、nが大きくなると 0 に収束していきます。

以上から、nが大きくなると、Z_nのキュムラント母関数は次のようになります。

$$K_n(t) \to \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

右辺は正規分布 N(0、σ^2)のキュムラント母関数であり、これはZ_nの積率母関数が正規分布の積率母関数に収束することを意味しています(正規分布の積率母関数とキュムラント母関数は例 3 を参照してください)。

$$M_n(t) \to e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

これはnが十分に大きければ、確率変数Z_nが正規分布 N(0、σ^2)に従うことを意味しています。