繰り返し期待値の法則(Law of Iterated Expectations)

繰り返し期待値の法則とは、確率変数 X と Y に対して、

$$E[\mathrm{X}]=E[E[\mathrm{X}|\mathrm{Y}]]$$

が成立することをいう。E[X|Y]は Y を条件とした X の期待値であり、Y は確率変数であるから E[X|Y]も確率変数となる。また、E[E[X|Y]]とは E[X|Y]の期待値を意味する。繰り返し期待値の法則は、「X の期待値は条件付き期待値 E[X|Y]の期待値に等しい」ことを示している。

[証明]　ここで、X の周辺密度関数を $f(x)$、Y の周辺密度関数を $f(y)$、X と Y の同時密度関数を $f(x,y)$となる。また、条件付き密度関数 $f(x|y)$は $f(x,y)/f(y)$と定義される。X の周辺密度関数 $f(x)$は、同時密度関数 $f(x,y)$を y について積分したものである。

$$f(x)=\int_y f(x,y)dy$$

ただし、$\int_y$ は y の取りうる全範囲について積分を取ることを意味する。ここで、E[X|Y]の確率密度関数は $f(y)$であることに注意してほしい(Y に依存して E[X|Y]が変わるためである)。このとき、以下のように、$E[E$[X|Y]]=E[X]を証明できる。

$$E(E[X\,|\,Y])=\int_y E[X\,|\,Y]f(y)dy$$

$$=\int_y\left[\int_x xf(x\,|\,y)dx\right]f(y)dy=\int_y\int_x xf(x\,|\,y)f(y)dxdy$$

$$=\int_x\int_y x\frac{f(x,y)}{f(y)}f(y)dydx\ =\int_x\int_y xf(x,y)dydx$$

$$=\int_x x\left[\int_y f(x,y)dy\right]dx=\int_x xf(x)dx=E[X]$$

[終]