第 9 章の答え

1．ここで

$$\frac{(5-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4)$$

から、

$$0.95 = \mathrm{P}\left\{\chi^2_{4,0.975} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{4,0.025}\right\}$$
$$= \mathrm{P}\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{4,0.025}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{4,0.975}}\right\}$$

となります。$\chi^2_{4,0.025} = 11.14$、$\chi^2_{4,0.975} = 0.484$から、σ の 95%信頼区間は

$$\sqrt{\frac{(5-1)10^2}{11.14}} < \sigma \quad < \sqrt{\frac{(5-1)10^2}{0.484}}$$

となります。これを計算すると、$5.99<\sigma<28.75$ です。

2．$(10-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(9)$ですから、95%の信頼区間は $\sqrt{(10-1)5^2/19.02} < \sigma < \sqrt{(10-1)5^2/2.70}$ でとなります。これを計算すると、$3.44<\sigma<9.13$ です。

3．ここで

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{10}}} \quad \sim \quad t(9)$$

となりますから、

$$\mathrm{P}\left\{-t_{9,0.05} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{10}}} < t_{9,0.05}\right\} = 0.95$$

が成立します。よって、μの 95%信頼区間は

$$\bar{X} - t_{9,0.05}\sqrt{\frac{s^2}{10}} < \mu \quad < \bar{X} + t_{9,0.05}\sqrt{\frac{s^2}{10}}$$

となります。ここで標本平均は 52、標本分散は 75.78 ですから、これらを代入することで

$$52 - 2.262\sqrt{\frac{75.78}{10}} < \mu \quad < 52 + 2.262\sqrt{\frac{75.78}{10}}$$

となります。これを計算すると、信頼区間は $45.77<\mu< 58.23$ となります。

σ^2 に関する 95%信頼区間は $(10-1)75.78/19.02 < \sigma^2 < 10-1)75.78/2.70$ となります。これを計算すると、$35.86<\sigma^2<252.59$ ですから、σ に関する信頼区間は $5.99<\sigma<15.89$ となります。

4. 95%信頼区間は $7-2.262\sqrt{3^2/10}<\mu<7+2.262\sqrt{3^2/10}$ です（$4.85<\mu<9.15$）。

5. μの 95%信頼区間は、 $0.01-2.145\sqrt{0.02^2/15}<\mu<0.01+2.145\sqrt{0.02^2/15}$ です。これを計算すると-0.001<μ<0.021 となります。

6. μの 95%の信頼区間は $5-2.571\sqrt{2^2/6}<\mu<5+2.571\sqrt{2^2/6}$ です（これは $2.901<\mu<7.099$）。

7. 標本分散 s^2 は、

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$$

$$=\frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$$

と書き換えることができる。ここで s^2 の期待値は、

$$E[s^2]=\frac{\sigma^2}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\right]$$

となる（$\sigma^2/(n\text{-}1)$は定数であるため、期待値の外にだせる）。さらに

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$$

であり、χ^2確率変数の期待値は自由度に等しいことに注意すると、

$$\frac{\sigma^2}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\right]=\frac{\sigma^2}{n-1}(n-1)=\sigma^2$$

となる。以上から、s^2 は不偏性を満たした推定量といえる。

次に、s^2 の分散は、

$$V(s^2)=E[(s^2-\sigma^2)^2]$$

$$=E\left[\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2-\frac{n-1}{n-1}\sigma^2\right)^2\right]$$

となります[1]。[]内の第一項、第二項ともに $\sigma^2/(n\text{-}1)$を含んでいるため、これを 2 乗してから外にだすと、

---

1 式展開において、$\sigma^2=\frac{n-1}{n-1}\sigma^2$ としています。

$$E\left[\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2-\frac{n-1}{n-1}\sigma^2\right)^2\right]=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2-(n-1)\right)^2\right]$$

となります。ここで χ^2 確率変数の分散は、2×自由度に等しいことに注意すると、上式は

$$\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2-(n-1)\right)^2\right]=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

となります[2]。

以上から、

$$V(s^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

となります。この式をみると、n が大きくなるにつれて分散は 0 に近づいていくことが分かります。不偏性が満たされ、n が大きくなるにつれて分散は 0 に近づいていきますから、一致性も満たされるわけです。

---

2 既に確認した通り、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

となります。χ^2確率変数の期待値はその自由度ですから、$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$の分散は

$$\mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2-E[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2]\right)^2\right]=\mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2-(n-1)\right)^2\right]$$

となります。分散は 2×(自由度)に等しいため、これは 2(n－1)となります。