第 7 章の答え

1. サンプルサイズは十分大きいため、中心極限定理を用いることができますし、標本分散は母分散を高い精度で推定できています。よって、平均 $\overline{X}$ は期待値 μ で分散 $3^2/50$ の正規分布に従います。

1)平均と母平均 μ の差が 1 時間を越える確率は（ $\sqrt{3^2/50}$ =0.424 を用いて)、

$$P\{|\overline{X}-\mu|>1\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{0.424}\right|>\frac{1}{0.424}\right\}=P\{|Z|>2.36\}$$

となります。また、

$$\begin{aligned}P\{|Z|>2.36\}&=P\{Z>2.36\}+P\{Z<-2.36\}\\&=2\times P\{Z>2.36\}\\&=2\times(1-P\{Z<2.36\})\\&=2\times(1-0.9909)=0.0182\end{aligned}$$

2)標本平均を標準化すると標準正規分布に従いますから、

$$P\left\{-1.96<\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}<1.96\right\}=0.95$$

が成立します。したがって、μの 95%信頼区間は、

$$\bar{X}-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}<\mu<\bar{X}+1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

となります。ここで、平均は 10 時間ですから、母平均 μ の 95%信頼区間は

$$10-1.96\times0.424<\mu<10+1.96\times0.424$$

です。これを計算すると 9.17<μ<10.83 となります。

2. 平均 $\overline{X}$ は期待値 μ で分散 $10^2/40$ の正規分布に従います。よって、95%信頼区間は、

$$450-1.96\sqrt{\frac{10^2}{40}}<\mu<450+1.96\sqrt{\frac{10^2}{40}}$$

となります（これを計算すると 446.9<μ<453.1)。

3. サンプルサイズが十分に大きいとき、 $\hat{p}\sim N(p,p(1-p)/n)$ですから

$$P\left\{-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}<\hat{p}-p<1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\}=0.95$$

となります。推定誤差が±1%以内に収まる確率は 95%、つまり

$$P\{-0.01 < \hat{p} - p < 0.01\} = 0.95$$

となります。よって、

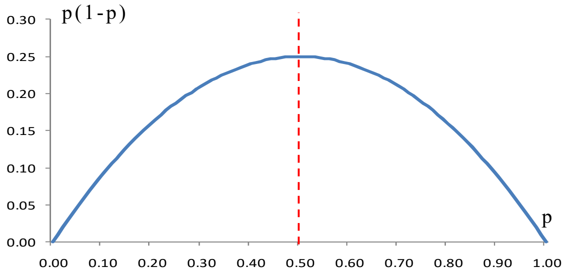
$$0.01 = 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

を解くことで、推定誤差が±1%以内に収まるために必要なサンプルサイズ n として、

$$n=196^2 p(1-p)$$

を求めることができます。ここで n は p の値に依存しているため、p の値が分かれば n を求めることが出来ます。しかし、調査前に p の値は未知ですから、n を決めることはできません。

ここで $p(1\text{-}p)$は、p=0.5 で最大値になることを確認しましょう。下図は、横軸が p、縦軸が $p(1\text{-}p)$としています。p=0（もしくは 1）なら $p(1\text{-}p)$=0、p=0.5 なら $p(1\text{-}p)$=0.25 で最大となります[1]。以上から、p=0.5 のとき、n は $196^2 0.5^2$=9604 で最大となります。



以上から、たとえ最悪の状況（p=0.5）を想定しても、9604 人に聞き取り調査をすれば、推定誤差は 1%以内に収まることが分かります。

4. 通常の調査では n は小さいため推定誤差は大きくなります。よって、0.1%の低下は単なる標本変動と考えられ、支持率が低下しているとはいえません。
5. 1）p=300/N、$\hat{p}$=30/200=0.15 ですから、N=300/$\hat{p}$=300/0.15=2000 匹として推定されます。2）N の 95%信頼区間を求めるため、まずは p の 95%信頼区間を求めます。これは、

[1] $p(1-p)=p-p^2= -(p-1/2)^2-1/4$ と展開できます。ここで 1 項目だけが p に依存し、常に 0 以下となります。この項が最大となるのは 0 のとき、つまり p=1/2 のときです。

$$0.15 - 1.96\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}} < p < 0.15 + 1.96\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}}$$

となります（計算すると 0.10<p<0.20 です）。よって、N の 95%信頼区間は下限が 300/0.20=1500、上限が 300/0.10=3000 となります。

6. $\hat{\theta}$の分散は$V(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = E[\hat{\theta}^2] - E[\hat{\theta}]^2 = E[\hat{\theta}^2] - \theta^2$ですから、$V(\hat{\theta})$=0 でない限り、$\hat{\theta}^2$は θ^2 の不偏推定量ではありません[2]。
7. 平均 2 乗誤差は

$$E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = E[\{(\hat{\theta}-E[\hat{\theta}]) + (E[\hat{\theta}]-\theta)\}^2]$$
$$= E[(\hat{\theta}-E[\hat{\theta}])^2] + (E[\hat{\theta}]-\theta)^2 + 2(E[\hat{\theta}]-\theta)E(\hat{\theta}-E[\hat{\theta}])$$

と分解できます。ここで右辺第 3 項は

$$E(\hat{\theta}-E[\hat{\theta}]) = E[\hat{\theta}] - E[\hat{\theta}]$$

ですから 0 となります。また、右辺第 1 項は$\hat{\theta}$の分散に他なりません。

平均 2 乗誤差とは？

教科書では紹介できませんでしたが、平均 2 乗誤差は、推定量が真の値と平均的にどの程度ずれるかを測っており、推定量の望ましさを測る重要な指標となっています。平均 2 乗誤差が小さいほど良い推定量とされ、これが大きいほど悪い推定量とされます。問題 7 から、平均 2 乗誤差は、推定量の分散とバイアスの 2 乗に分解されることが分かりました。

$$E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = V(\hat{\theta}) + (E[\hat{\theta}]-\theta)^2$$

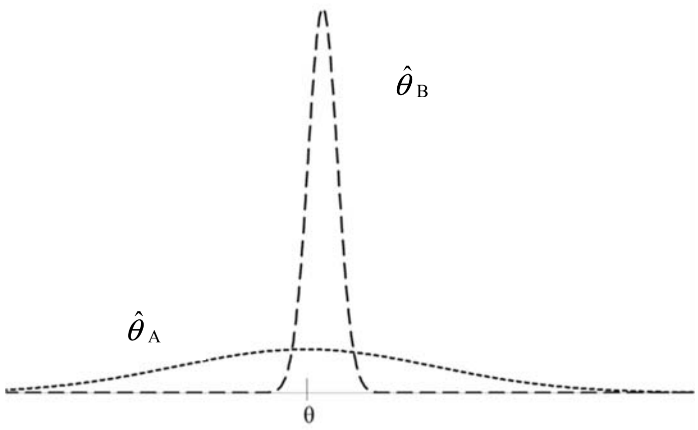
つまり、良い推定量とは、バイアスだけでなく、ばらつきも小さい推定量となるのです。

次の 2 つの推定量を考えてみてください(下図参照)。推定量$\hat{\theta}_A$は、バイアスは 0 ですが（不偏推定量）、分散が大きい推定量となっています。これに対し、推定量$\hat{\theta}_B$は、バイアスは少しありますが（不偏推定量ではない）、分散がとても小さいため、かなり正確に真の値を推定できます[3]。平均 2 乗誤差を計算すると、推定量$\hat{\theta}_B$の方が小さくなり、バイアスが存在したとし

[2] たとえば、θ=0 なら θ^2 も 0 ですが、$\hat{\theta}$ が 0 を中心に分布しても、$\hat{\theta}^2$ はプラスの値しかとりませんからその期待値は 0 ではありません。

[3] ここでは両推定量とも一致性は満たされるとしましょう。

ても、ばらつきが小さいため、より望ましい推定量といえます。この教科書では、不偏推定量だけを扱っていますが、よりアドバンスな統計学を勉強すると、バイアスはあっても分散が小さいなら、有用な推定量があることが分かります。



8. この推定量の期待値は[4]、

$$E\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right] = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iE[X_i]$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\mu\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \mu\frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \mu$$

となりますから、不偏性が満たされています。

---

[4]式展開では、次の公式を用いました。

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

[証明]この公式を証明しましょう。ここで n が偶数とします。上式で、1 と n を足すと n+1、2 と n-1 を足すと n+1、3 と(n-2)を足すと n+1 です。よって、Σi は n+1 が n/2 個ありますから、これらの和は(n+1)×n/2=n(n+1)/2 です。n が奇数でも同様に証明できます。[終]

9．1)期待値は以下となります。

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\varpi_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\varpi_i E[X_i]=\mu\sum_{i=1}^{n}\varpi_i$$

2)よって、$\Sigma\omega_i=1$ であれば不偏性が満たされます。つまり、加重平均は不推定量となります。

3) $\Sigma\omega_i=1$ のとき、分散は

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\varpi_i X_i-\mu\right)^2\right]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\varpi_i X_i-\sum_{i=1}^{n}\varpi_i\mu\right)^2\right]$$

$$=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\varpi_i(X_i-\mu)\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\varpi_i^2 E[(X_i-\mu)^2]=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\varpi_i^2$$

となります。式展開において、$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$から $\mu=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\mu$となること、$X_i$ は相互に独立であるとこと[5]、を用いました。

この式から、分散が最小となるのは$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2$が最小となるときである、と分かります。ここでは、分散を最小にする ω_i は、1/n であることを証明します。

$$\sum_{i=1}^{n}\varpi_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\varpi_i-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\varpi_i-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n}{n^2}+2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\varpi_i-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\varpi_i-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}+2\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\varpi_i-\frac{n}{n}\right)$$

右辺 2 項目は ω_i に依存しませんし、第 3 項は 0 となります(式展開において、$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$ に注意)。よって、分散を最小にする ω_i は第 1 項目を 0 とする 1/n となります。したがって、平均が最も有効な推定量となります。

---

5 ここでは n=2 として、式展開をみていきましょう。

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{2}\varpi_i(X_i-\mu)\right)^2\right]=E\left[(\varpi_1(X_1-\mu)+\varpi_2(X_2-\mu))^2\right]$$
$$=E\left[\varpi_1^2(X_1-\mu)^2+\varpi_2^2(X_2-\mu)^2+2\varpi_1\varpi_2(X_1-\mu)(X_2-\mu)\right]$$
$$=\varpi_1^2E\left[(X_1-\mu)^2\right]+\varpi_2^2E[(X_2-\mu)^2]+2\varpi_1\varpi_2E[(X_1-\mu)(X_2-\mu)]$$
$$=\varpi_1^2\sigma^2+\varpi_2^2\sigma^2+2\varpi_1\varpi_2\times 0$$
$$=\varpi_1^2\sigma^2+\varpi_2^2\sigma^2$$

ここで X_1 と X_2 は独立ですから、共分散は 0（$E[(X_1-\mu)(X_2-\mu)]=0$）としました。