2018/12/03

薮友良

第 5 章の答え

1　利益を X とすると、$E[X]=1\times0.5-0.5\times0.5=0.25$ 万円、$V(X)=(1-0.25)^2\times0.5+(-0.5-0.25)^2\times0.5=0.5625$ 万円、$\sqrt{V(X)}=0.75$ 万円となります[1]。

2　利益を X とすると、$E[X]=5\times0.3+8\times0.7=7.1$ 万円、$E[X^2]=25\times0.3+64\times0.7=52.3$ 万円ですから、$V(X)=E[X^2]-E[X]^2=52.3-7.1^2=1.89$ 万円、$\sqrt{V(X)}=1.3748$ 万円です[2]。

3　保険に加入しないなら 1 年で $20\times0.1=2$ 万円の損失が期待されます。保険に加入すれば $1\times0.9+(3+1)\times0.1=1.3$ 万円の損失が期待されます。以上から、保険に加入した方が損失は小さいと期待されるため、保険加入が望ましいといえます。

4　くじを購入することで得られる期待値収入は、$1000\times(1/100)+300\times(10/100)+50\times(24/100)+0\times(65/100)=52$ 円となります。よって、52 円を超える額を払えば寄付をしたことになります。

5　期待値は $E[X]=-1\times0.25+0\times0.5+3\times0.25=0.5$ です。また、$E[X^2]=1\times0.25+0\times0.5+9\times0.25=2.5$ から、$\sigma_X{}^2=E[X^2]-E[X]^2=2.5-0.5^2=2.25$、$\sigma_X=1.5$ となります。期待値±標準偏差（-1～2）に収まる確率は、$P\{X=-1\}+P\{X=0\}=0.75$。

6　$E[X]=0\times0.3+1\times0.7=0.7$、$E[Y]=0\times0.55+1\times0.25+2\times0.2=0.65$。$V(X)=(0-0.7)^2 0.3+(1-0.7)^2 0.7=0.21$、$V(Y)=(0-0.65)^2 0.55+(1-0.65)^2 0.25+(2-0.65)^2 0.2=0.6275$。よって、$Cov(X,Y)=(0-0.7)(0-0.65)0.05+(0-0.7)(1-0.65)0.1+(0-0.7)(2-0.65)0.15+(1-0.7)(0-0.65)0.5+(1-0.7)(1-0.65)0.15+(1-0.7)(2-0.65)0.05=-0.205$、

$\rho_{XY}=-0.205/(0.21\times0.6275)^{0.5}=-0.565$。

7　夫婦の年収の期待値は、$E[X+Y]=E[X]+E[Y]=400+450=850$。X の標準偏差 100、Y の標準偏差 80、X と Y の相関係数 0.8 から（相関係数の定義を用いて）、共分散は $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{V(X)V(Y)}=0.8\times100\times80=6400$。分散は

---

[1] 測定単位が 1 円なら、10000X から、期待値は $10000\times0.25=2500$、分散は $10000^2\times0.5625=56250000$、標準偏差は $10000\times0.75=7500$。どちらの測定単位で答えても正解。

[2] 測定単位が 1 円なら、期待値 71000、分散 189000000、標準偏差 13748。どちらの測定単位で答えても正解。

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X+Y)=100^2+80^2+2\times 6400=29200$、標準偏差は 170.88。X と Y に強い正の相関があり、夫婦の年収の標準偏差も高くなっています。

8　X+Y と X－Y の共分散は、

$$Cov(X+Y, X-Y) = E[(X+Y-E[X+Y])(X-Y-E[X-Y])]$$
$$= E[\{(X-E[X])+(Y-E[Y])\}\{(X-E[X])-(Y-E[Y])\}]$$
$$= E[(X-E[X])^2]-E[(Y-E[Y])^2]+E[(X-E[X])(Y-E[Y])]-E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$
$$= E[(X-E[X])^2]-E[(Y-E[Y])^2]$$
$$= V(X)-V(Y)$$

となります。ここで V(X)=V(Y)なら Cov(X+Y,X-Y)=0 となります。

9　練習問題 8 において、X*=X+Y、Y*=X－Y と定義すると、X*と Y*はともに X と Y の関数ですから独立ではありませんが、両者の共分散は 0 となります。

別の例として、確率変数 Z_1 と Z_2 の期待値はともに 0（$E[Z_1]=E[Z_2]=0$）、互いに独立としましょう（$E[Z_1Z_2]=0$）。ここで $X=Z_1Z_2$、$Y=Z_2$ と定義すると、X と Y はともに Z_2 の関数ですから両者は独立ではありません。しかし、$E[X]=E[Z_1]E[Z_2]=0$、$E[Y]=E[Z_2]=0$ から、共分散は 0 となります。

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[XY]-E[X]E[Y] \\ &= E[XY]-0 \\ &= E[Z_1Z_2^2] \\ &= E[Z_1]E[Z_2^2]=0\times E[Z_2^2]=0 \end{aligned}$$

式展開で、Z_1 と Z_2 は独立ですから、Z_1 と Z_2^2 も独立であることを用いました。

独立なら共分散は 0 となりますが、共分散が 0 でも独立を意味しないことを覚えておいてください。独立は共分散よりも、両変数が無関係であることを示す強い概念となります。

10　1) 期待収益率は、$E[\omega r_s+(1-\omega) r_b]= \omega E[r_s]+(1-\omega)E[r_b]=\omega 0.08+(1-\omega)0.03$ です。よって、全てを株式で運用することで（ω=1）、収益率は最大の 8%となります。

2) $\omega r_s+(1-\omega)r_b$ の分散を考えましょう。株式の標準偏差は 0.07、債券の標準

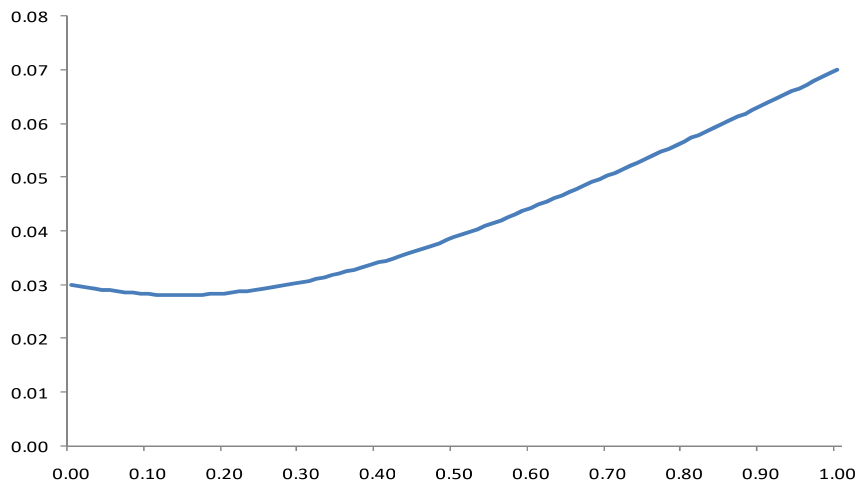
偏差 0.03、相関係数は 0.05 ですから、相関係数の定義から共分散 $Cov(r_s,r_b)=\rho_{rs,rb}\sqrt{V(r_s)V(r_b)}=0.05\times0.07\times0.03=0.000105$ です。この資産の分散は、

$$
\begin{aligned}
V(\omega r_s+(1-\omega)r_b)&=E[\{(\omega r_s+(1-\omega)r_b)-(\omega 0.08+(1-\omega)0.03)\}^2]\\
&=E[\{(\omega(r_s-0.08)+(1-\omega)(r_b-0.03)\}^2]\\
&= E[\omega^2(r_s-0.08)^2+(1-\omega)^2(r_b-0.03)^2+2\omega(1-\omega)(r_s-0.08)(r_b-0.03)]\\
&=\omega^2E[(r_s-0.08)^2]+(1-\omega)^2E[(r_b-0.03)^2]+2\omega(1-\omega)E[(r_s-0.08)(r_b-0.03)]
\end{aligned}
$$

ここで $E[(r_s-0.08)^2]=V(r_s)=0.07^2$、$E[(r_b-0.03)^2]=V(r_b)=0.03^2$、$E[(r_s-0.08)(r_b-0.03)]=0.000105$ となるため、上式に、これらの値を代入することで

$$
\begin{aligned}
&\omega^2 0.07^2 +(1-\omega)^2 0.03^2+2\omega(1-\omega)0.000105\\
&=0.0049\omega^2+(0.0009+0.0009\omega^2-0.0018\omega)+(0.00021\omega-0.00021\omega^2)\\
&=0.00559\omega^2-0.00159\omega+0.0009
\end{aligned}
$$

下図では、上式の平方根を取った標準偏差を縦軸、横軸を ω として示しています。ω が 0.14 で標準偏差が 0.028 となり最小となっています。つまり、株で資産の 14%、債権で 86%を運用することで、標準偏差を最小化できます[3]。このとき期待収益率は、0.14×0.08+(1-0.14)0.03=0.037 です。もっとも安全な資産運用は、すべてを債券だけで運用することではありません（債権だけだと、期待収益率 3%、標準偏差 3%）。



[3] 分散の式を ω で微分して 0 と置くと、2×0.00559ω-0.00159=0 ですから ω=-0.14 が得られます。

11 確率変数 X は、$x_1, x_2, \ldots, x_m$ という実現値を取るとしましょう。

ここで m 個の実現値がありますが、これらを 2 つのグループ、

$$A = \{x_i :| x_i - \mu | \geq \kappa\sigma\}$$

$$\overline{A} = \{x_i :| x_i - \mu | < \kappa\sigma\}$$

に分けます。グループ A は、実現値のうち$|x_i-\mu| \geq \kappa\sigma$ を満たす x_i の集まりです。これに対し、グループ $\overline{A}$ は実現値のうち$|x_i-\mu| < \kappa\sigma$ を満たす x_i の集まりとなります。

1) X の分散を σ^2 と表記すると、

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P\{x_i\}$$
$$= \sum_{x\in A} (x_i - \mu)^2 P\{x_i\} + \sum_{x\in \overline{A}} (x_i - \mu)^2 P\{x_i\}$$

と分解できます。ここで、$\sum_{x\in A}$ とは、x_i のうちグループ A に属するものだけで和をとることを意味します。同様に、$\sum_{x\in \bar{A}}$ とは、x_i のうちグループ $\overline{A}$ に属するものだけで和をとることを意味します。上式の右辺 2 項目は、2 乗和ですから必ず 0 以上です。したがって、

$$\sum_{x\in A} (x_i - \mu)^2 P\{x_i\} + \sum_{x\in \overline{A}} (x_i - \mu)^2 P\{x_i\} \geq \sum_{x\in A} (x_i - \mu)^2 P\{x_i\}$$

となります。既に述べた通り、$\sum_{x\in A}$ は、x_i のうちグループ A に属するものだけで和をとるわけですから、A=｛x_i:$|x_i-\mu| \geq \kappa\sigma$｝に属する x_i なら$(x_i-\mu)^2 \geq (\kappa\sigma)^2$となりますから、

$$\sum_{x\in A} (x_i - \mu)^2 P\{x_i\} \geq \sum_{x\in A} (\kappa\sigma)^2 \; P\{x_i\}$$

$$= (\kappa\sigma)^2 \sum_{x\in A} P\{x_i\}$$
$$= \kappa^2\sigma^2 P\{| X - \mu | \geq \kappa\sigma\}$$

成立することになります。最後の式展開において、$\sum_{x\in A} P\{x_i\} = P\{|X-\mu| > \kappa\sigma\}$としました。$\sum_{x\in A} P\{x_i\}$とは、グループ A に属する x_i の確率の和となりますから、これはグループ A が生じる確率に他ならないためです。

以上から、$\sigma^2 \geq \kappa^2\sigma^2 P\{| X - \mu | \geq \kappa\sigma\}$が成立します。両辺を $\kappa^2\sigma^2$ で割れば証

明は終わりです。

2) 確率の和は 1 から、

$$P\{|X-\mu|<\kappa\sigma\}=1-P\{|X-\mu|\geq\kappa\sigma\}$$

となります。チェビチェフの不等式 $P\{|X-\mu|\geq\kappa\sigma\}\leq 1/\kappa^2$ を用いると、

$$\begin{aligned} P\{|X-\mu|<\kappa\sigma\} &= 1-P\{|X-\mu|\geq\kappa\sigma\} \\ &\geq 1-1/\kappa^2 \end{aligned}$$

となります。上式の左辺は

$$\begin{aligned} P\{|X-\mu|<\kappa\sigma\} &= P\{-\kappa\sigma<X-\mu<\kappa\sigma\} \\ &= P\{\mu-\kappa\sigma<X<\mu+\kappa\sigma\} \end{aligned}$$

と書けますから、これで証明は終わりです。

3) 2)の結果から、X が $\mu\pm\kappa\sigma$ の領域に留まる割合は $1-1/\kappa^2$ 以上といえます。この関係を使えば、確率変数 X がどのような分布に従っていても、期待値 μ から標準偏差の $\pm\kappa$ 倍以内に留まる割合が推測できることになります。たとえば、$\kappa=1$ なら 0%以上が期待値から $\pm\sigma$ 以内に留まるといえます。また、$\kappa=2$ なら 75%以上が期待値から $\pm2\sigma$ 以内に留まり、$\kappa=3$ なら X のうち 89%以上が期待値から $\pm3\sigma$ 以内に留まるといえるわけです。

教科書の第 2 章(p45)では、分布が釣鐘状のとき、平均と標本標準偏差を使って範囲と割合の関係を紹介しました。しかし、この関係は全ての分布に成立する訳ではありません。これに対し、チェビシェフの不等式は、確率変数に期待値と分散が存在しているなら、どのような分布にも成立します。

当たり前ですが、釣鐘状の分布に限定したときの方が、範囲と割合について、平均と標準偏差は多くの情報を持ちます。たとえば、$\mu\pm2\sigma$ であれば、釣鐘状分布では約 95%がその中に含まれると言えますが、チェビシェフの不等式では 75%以上が含まれるとしか言えません。チェビシェフの不等式は、その前提条件が一般的であるがゆえに、弱い含意しか持っていないのです。残念ながら、この世にフリーランチは存在しません（There's no such thing as a free lunch）。一般的であれば、その含意は弱くなるのは当たりまえのことでしょう。