2017/12/29

藪友良

第 10 章の答え

1 最小 2 乗推定量の式は $\hat{\alpha}=\overline{Y}-\hat{\beta}\overline{X}$ ですから、これを書き換えると $\overline{Y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\overline{X}$ となります。よって、X= $\overline{X}$ のとき、回帰直線上の点は Y= $\overline{Y}$ となります。

2. Y の理論値の偏差 2 乗和

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2$$

を書き換えましょう。p252 から理論値は

$$\hat{Y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i$$

となり、練習問題 1 から

$$\overline{Y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\overline{X}$$

となりますから、これらを偏差 2 乗和の式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\overline{X}))^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta}X_i-\hat{\beta}\overline{X})^2$$

$$=\hat{\beta}^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

が得られます。この偏差 2 乗和を決定係数の式に代入すると、決定係数の別表現が得られます。

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}=\hat{\beta}^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}$$

この式は、決定係数を計算するので便利です (X と Y それぞれの偏差 2 乗和、$\hat{\beta}$だけで計算できる)。

ここでは、さらに上式を書き換えてみましょう。$\hat{\beta}$の式を上式に代入すると、

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}$$

$$=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}\right)^2=\left(\frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}}\right)^2=r_{XY}^2$$

となります。つまり、決定係数とは、X_i と Y_i との相関係数の r_{xy} を 2 乗したものに他ならないのです。

3　2 つのケースが考えられます。(1) 決定係数の別表現（練習問題 2 参照）から、$\hat{\beta}$=0 なら R^2=0 といえます。直観的には、$\hat{\beta}$=0 なら、X が変動しても Y の変動を全く説明できないため、R^2 は 0 となるわけです。(2) $\hat{\beta}$=0 でなくても R^2=0 となる場合があります。たとえば、X の変動に比べて Y の変動が非常に大きいなら、

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=0$$

となり、R^2=0 となります。これは Y の動きが大きすぎて、それを変動の小さい X の動きで説明することはできないためです。

4　最小 2 乗推定量の式に、表で計算された値を代入すると、

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})(X_i-\overline{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\frac{-13.2}{1.2}=-11$$

$$\hat{\alpha}=\overline{Y}-\hat{\beta}\overline{X}=11.6-11\times 0.4=16$$

となります。β の推定値は-11 ですから、雨が降ると（X が 1 になる）売り上げは 11 万円減ることになります。α の推定値は 16 ですから､天気が晴れ（X=0）であれば売り上げは 16 万円となります[1]。2) 決定係数は、練習問題 2 の別表現を用いると、簡単に求めることができます。別表現は

$$R^2=\hat{\beta}^2\frac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}=(-11)^2\frac{1.2}{153.2}$$

ですから、これを計算すると 0.947 となります。よって、Y の全変動のうち

[1]この結果は次のようにも推定できます。雨の日は 2 日あり平均は(6+4)/2=5 万円、晴れた日は 3 日あり平均は(18+15+15)/3=16 万円です。よって、α は 16、売り上げの差は 5-16=-11 から β は-11 と推定されます。

94.7%はモデルで説明できているといえます。

5. 残差の性質を用いて証明ができます（残差の性質は p263 参照）。まず、残差の和は 0 から、残差の平均も 0 となります。よって、残差と説明変数の標本共分散の分子は、

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})\hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n} X_i\hat{u}_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i$$

となります。残差と説明変数の積和は 0 ですから、第一項は 0 となります。また、残差の和は 0 ですから第二項も 0 となります。以上から、標本共分散は 0 となり、標本相関係数も 0 となります。

6. 1)X が 1 単位変化したとき、Y が何単位変化するか、
2) X が 1%変化したとき Y が何%変化するか、
3) X が 1%変化したとき、Y が何単位変化するか、
4) X が 1 単位変化したとき、Y が何%変化するか。