2019/11/05

新谷元嗣、藪友良

第 4 章の解答

[1]　(a)　初期条件をy_0とし、y_tの解、s期先予測$E_t y_{t+s}$を求める。

①$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$

初期条件y_0から前向きに反復すると、

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_0 \\
y_2 &= y_1 + \varepsilon_2 + 0.5\varepsilon_1 \\
&= (y_0 + \varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_0) + \varepsilon_2 + 0.5\varepsilon_1 \\
&= y_0 + \varepsilon_2 + 1.5\varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_0 \\
y_3 &= y_2 + \varepsilon_3 + 0.5\varepsilon_2 \\
&= (y_0 + \varepsilon_2 + 1.5\varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_0) + \varepsilon_3 + 0.5\varepsilon_2 \\
&= y_0 + \varepsilon_3 + 1.5(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + 0.5\varepsilon_0 \\
y_4 &= y_3 + \varepsilon_4 + 0.5\varepsilon_3 \\
&= (y_0 + \varepsilon_3 + 1.5\varepsilon_2 + 1.5\varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_0) + \varepsilon_4 + 0.5\varepsilon_3 \\
&= y_0 + \varepsilon_4 + 1.5(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1) + 0.5\varepsilon_0 \\
&\cdots \\
y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\
&= y_0 + \varepsilon_t + 1.5(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots + \varepsilon_1) + 0.5\varepsilon_0
\end{aligned}$$

となる。s期先に進めると、y_{t+s}は

$$\begin{aligned}
y_{t+s} &= y_0 + \varepsilon_{t+s} + 1.5(\varepsilon_{t+s-1} + \varepsilon_{t+s-2} + \cdots + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1) + 0.5\varepsilon_0 \\
&= [y_0 + \varepsilon_t + 1.5(\varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1) + 0.5\varepsilon_0] \\
&\quad +0.5\varepsilon_t + 1.5(\varepsilon_{t+s-1} + \varepsilon_{t+s-2} + \cdots + \varepsilon_{t+1}) \\
&= y_t + 0.5\varepsilon_t + 1.5(\varepsilon_{t+s-1} + \varepsilon_{t+s-2} + \cdots + \varepsilon_{t+1})
\end{aligned}$$

となり、t期までの情報を所与とした期待値をとると予測関数

$$E_t y_{t+s} = y_t + \varepsilon_t$$

が得られる。ここで予測関数はsに依存せず、$y_t + \varepsilon_t$で一定となる。つまり、y_{t+s}に対し、$y_t + \varepsilon_t$は不偏推定量である。

②　$y_t = 1.1y_{t-1} + \varepsilon_t$

①と同様に、前向きに反復すると、

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1.1y_0 + \varepsilon_1 \\
y_2 &= 1.1y_1 + \varepsilon_2 \\
&= 1.1(1.1y_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \\
&= 1.1^2 y_0 + \varepsilon_2 + 1.1\varepsilon_1 \\
y_3 &= 1.1y_2 + \varepsilon_3
\end{aligned}$$

$$= 1.1(1.1^2 y_0 + \varepsilon_2 + 1.1\varepsilon_1) + \varepsilon_3$$
$$= 1.1^3 y_0 + \varepsilon_3 + 1.1\varepsilon_2 + 1.1^2\varepsilon_1$$
$$\cdots$$
$$y_t = 1.1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$= 1.1^t y_0 + \varepsilon_t + 1.1\varepsilon_{t-1} + \cdots + 1.1^{t-1}\varepsilon_1$$

となる。s期先に進めると、y_{t+s}は

$$y_{t+s} = 1.1^{t+s} y_0 + \varepsilon_{t+s} + 1.1\varepsilon_{t+s-1} + \cdots + 1.1^{s-1}\varepsilon_{t+1} + 1.1^s\varepsilon_t + \cdots + 1.1^{t+s-1}\varepsilon_1$$
$$= 1.1^s[1.1^t y_0 + \varepsilon_t + 1.1\varepsilon_{t-1} + \cdots + 1.1^{t-1}\varepsilon_1] + \varepsilon_{t+s} + 1.1\varepsilon_{t+s-1} + \cdots + 1.1^{s-1}\varepsilon_{t+1}$$
$$= 1.1^s y_t + \varepsilon_{t+s} + 1.1\varepsilon_{t+s-1} + \cdots + 1.1^{s-1}\varepsilon_{t+1}$$

となり、その期待値をとると予測関数を得る。

$$E_t y_{t+s} = 1.1^s y_t$$

ここで①と異なり、予測関数は一定ではない。そもそも、y_tは平均的に 10%の率で成長するため、予測関数も 10%の率で成長していることがわかる。

③　$y_t = y_{t-1} + 1 + \varepsilon_t$

前向きに反復すると、

$$y_1 = y_0 + 1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = y_1 + 1 + \varepsilon_2$$
$$= (y_0 + 1 + \varepsilon_1) + 1 + \varepsilon_2$$
$$= y_0 + 2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$
$$y_3 = y_2 + 1 + \varepsilon_3$$
$$= (y_0 + 2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1) + 1 + \varepsilon_3$$
$$= y_0 + 3 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$
$$\cdots$$
$$y_t = y_{t-1} + 1 + \varepsilon_t$$
$$= y_0 + t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

となる。s期先に進めると、y_{t+s}は

$$y_{t+s} = y_0 + (t+s) + \sum_{i=1}^{t+s} \varepsilon_i$$
$$= y_t + s + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i}$$

となり、期待値をとると予測関数を得る。

$$E_t y_{t+s} = y_t + s$$

ここで y_t の平均変化は 1 であることから（$y_t - y_{t-1} = 1 + \varepsilon_t$に注意）、そうした変化が$s$回生じると$s$だけ増加することになる。

④　$y_t = y_{t-1} + t + \varepsilon_t$

前向きに反復すると、

$$y_1 = y_0 + 1 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = y_1 + 2 + \varepsilon_2$$

$$= (y_0 + 1 + \varepsilon_1) + 2 + \varepsilon_2$$

$$= y_0 + (1 + 2) + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

$$y_3 = y_2 + 3 + \varepsilon_3$$

$$= (y_0 + (1 + 2) + \varepsilon_2 + \varepsilon_1) + 3 + \varepsilon_3$$

$$= y_0 + (1 + 2 + 3) + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

$$\cdots$$

$$y_t = y_{t-1} + t + \varepsilon_t$$

$$= y_0 + \sum_{i=1}^{t} i + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

となる。このとき、

$$y_{t+s} = y_0 + \sum_{i=1}^{t+s} i + \sum_{i=1}^{t+s} \varepsilon_i$$

$$= y_t + \sum_{i=1}^{s} (t + i) + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i}$$

$$= y_t + st + \sum_{i=1}^{s} i + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i}$$

$$= y_t + ts + \frac{s(s+1)}{2} + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i}$$

となる。そして、予測関数は

$$E_t y_{t+s} = y_t + ts + \frac{s(s+1)}{2}$$

となる。y_t の変化は t と正の関係があるため（$y_t - y_{t-1} = t + \varepsilon_t$に注意）、予測関数の傾きも t と正の関係があることが理解できる。

⑤　$y_t = \mu_t + \eta_t + 0.5\eta_{t-1}$, $\mu_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t$

ここでμ_tはランダムウォークとなっている。前向きに反復していくと、

$$y_1 = \mu_1 + \eta_1 + 0.5\eta_0$$

$$= \mu_0 + \varepsilon_1 + \eta_1 + 0.5\eta_0$$

$$y_2 = \mu_2 + \eta_2 + 0.5\eta_1$$

$$= \mu_1 + \varepsilon_2 + \eta_2 + 0.5\eta_1$$

$$= \mu_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \eta_2 + 0.5\eta_1$$

$$\cdots$$

$$y_t = \mu_0 + \varepsilon_t + \cdots + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \eta_t + 0.5\eta_{t-1}$$

となる。0 期において

$$y_0 = \mu_0 + \eta_0 + 0.5\eta_{-1}$$

であるから、y_tの式は

$$y_t = (y_0 - \eta_0 - 0.5\eta_{-1}) + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i + \eta_t + 0.5\eta_{t-1}$$

と書き換えられる。したがって、y_{t+s}は

$$\begin{aligned} y_{t+s} &= (y_0 - \eta_0 - 0.5\eta_{-1}) + \sum_{i=1}^{t+s} \varepsilon_i + \eta_{t+s} + 0.5\eta_{t+s-1} \\ &= (y_0 - \eta_0 - 0.5\eta_{-1}) + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i} + \eta_{t+s} + 0.5\eta_{t+s-1} \\ &= (y_t - \eta_t - 0.5\eta_{t-1}) + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i} + \eta_{t+s} + 0.5\eta_{t+s-1} \end{aligned}$$

となる。ここで、予測関数は、$s = 1$の場合、

$$E_t y_{t+s} = y_t - 0.5\eta_t - 0.5\eta_{t-1}$$

となり、$s > 1$の場合、

$$E_t y_{t+s} = y_t - \eta_t - 0.5\eta_{t-1}$$

⑥　$y_t = \mu_t + \eta_t + 0.5\eta_{t-1}$, $\mu_t = 0.5 + \mu_{t-1} + \varepsilon_t$

ここでμ_tはドリフト付きランダムウォークとなっている。これまでと同様、

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu_1 + \eta_1 + 0.5\eta_0 \\ &= 0.5 + \mu_0 + \varepsilon_1 + \eta_1 + 0.5\eta_0 \\ y_2 &= \mu_2 + \eta_2 + 0.5\eta_1 \\ &= 0.5 + \mu_1 + \varepsilon_2 + \eta_2 + 0.5\eta_1 \\ &= \mu_0 + 2 \times 0.5 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \eta_2 + 0.5\eta_1 \end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$y_t = \mu_0 + 0.5t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i + \eta_t + 0.5\eta_{t-1}$$

となる。0 期において

$$y_0 = \mu_0 + \eta_0 + 0.5\eta_{-1}$$

であるから、y_tの式は

$$y_t = (y_0 - \eta_0 - 0.5\eta_{-1}) + 0.5t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i + \eta_t + 0.5\eta_{t-1}$$

と書き換えらえる。したがって、y_{t+s}は

$$y_{t+s} = (y_t - \eta_t - 0.5\eta_{t-1}) + 0.5s + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i} + \eta_{t+s} + 0.5\eta_{t+s-1}$$

となる。ここで、予測関数は、$s = 1$の場合、

$$E_t y_{t+s} = y_t - 0.5\eta_t - 0.5\eta_{t-1} + 0.5$$

となり、$s > 1$の場合、

$$E_t y_{t+s} = y_t - \eta_t - 0.5\eta_{t-1} + 0.5s$$

となる。系列$\{y_t\}$は、一般的トレンドと不規則項を含んだ過程である。トレンドの変化$\Delta\mu_t$は、確率要素ε_tと確定要素 0.5 からなる。不規則項は、MA(1)過程$\eta_t + 0.5\eta_{t-1}$となる。

(b)　ここで②と④を定常確率過程に変換してみよう。

②　$y_t = 1.1y_{t-1} + \varepsilon_t$

　階差の性質を考えよう。まず、両辺からy_{t-1}を引くと、

$$\Delta y_t = 0.1y_{t-1} + \varepsilon_t$$

となる。右辺に$0.1y_{t-2} - 0.1y_{t-2}$を加えると、

$$\Delta y_t = 0.1\Delta y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$$

とする。さらに$0.1y_{t-3} - 0.1y_{t-3}$を加えると、

$$\Delta y_t = 0.1\Delta y_{t-1} + 0.1\Delta y_{t-2} + 0.1y_{t-3} + \varepsilon_t$$

となる。これを続けると、

$$\Delta y_t = 0.1(\Delta y_{t-1} + \Delta y_{t-2} + \Delta y_{t-3} + \cdots) + \varepsilon_t$$

となる。この式から、階差Δy_tは過去の階差Δy_{t-j}の無限和となっており、定常ではないと分かる。定常に変換するには、$y_t - 1.1y_{t-1}$という変換を考えればよい。

④　$y_t = y_{t-1} + t + \varepsilon_t$を考えよう。

この差分方程式は

$$\Delta y_t = t + \varepsilon_t$$

と書き換えられる。したがって、Δy_tをディトレンドすれば定常過程に変換できる。

(c)　ここで、⑤は

$$y_t = \mu_t + \eta_t + 0.5\eta_{t-1},\ \mu_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

である。y_tの階差をとると、

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= (\mu_t - \mu_{t-1}) + (\eta_t + 0.5\eta_{t-1}) - (\eta_{t-1} + 0.5\eta_{t-2}) \\ &= \varepsilon_t + \eta_t - 0.5\eta_{t-1} - 0.5\eta_{t-2}\end{aligned}$$

となる。ここで、Δy_tの期待値は

$$E[\Delta y_t] = 0$$

であり、分散は

$$var(\Delta y_t) = E[\varepsilon_t^2] + E[\eta_t^2] + 0.25E[\eta_{t-1}^2] + 0.25E[\eta_{t-2}^2] = \sigma^2 + 1.5\sigma_\eta^2$$

となる（$E[\varepsilon_t^2]=\sigma^2$, $E[\eta_t^2]=\sigma_\eta^2$に注意）。また、自己共分散は

$$cov(\Delta y_t,\Delta y_{t-1})=E[(\varepsilon_t+\eta_t-0.5\eta_{t-1}-0.5\eta_{t-2})(\varepsilon_{t-1}+\eta_{t-1}-0.5\eta_{t-2}-0.5\eta_{t-3})]$$
$$=-0.5\,E[\eta_{t-1}^2]+0.25E[\eta_{t-2}^2]=-0.25\sigma_\eta^2$$
$$cov(\Delta y_t,\Delta y_{t-2})=E[(\varepsilon_t+\eta_t-0.5\eta_{t-1}-0.5\eta_{t-2})(\varepsilon_{t-2}+\eta_{t-2}-0.5\eta_{t-3}-0.5\eta_{t-4})]$$
$$=-0.5\,E[\eta_{t-2}^2]=-0.5\sigma_\eta^2$$
$$cov(\Delta y_t,\Delta y_{t-3})=E[(\varepsilon_t+\eta_t-0.5\eta_{t-1}-0.5\eta_{t-2})(\varepsilon_{t-3}+\eta_{t-3}-0.5\eta_{t-4}-0.5\eta_{t-5})]=0$$

となる（$s>3$に対し、$cov(\Delta y_t,\Delta y_{t-s})=0$となる）。したがって、自己相関は

$$\rho_1=\frac{cov(\Delta y_t,\Delta y_{t-1})}{\sqrt{var(\Delta y_t)var(\Delta y_{t-1})}}=\frac{-0.25\sigma_\eta^2}{\sigma^2+1.5\sigma_\eta^2}$$
$$\rho_2=\frac{cov(\Delta y_t,\Delta y_{t-2})}{\sqrt{var(\Delta y_t)var(\Delta y_{t-2})}}=\frac{-0.5\sigma_\eta^2}{\sigma^2+1.5\sigma_\eta^2}$$
$$\rho_3=\frac{cov(\Delta y_t,\Delta y_{t-3})}{\sqrt{var(\Delta y_t)var(\Delta y_{t-2})}}=\frac{0}{\sigma^2+1.5\sigma_\eta^2}=0$$

となり、それ以降は 0 である。したがって、Δy_t の自己相関は、MA(2)の自己相関と同じである。Δy_tは MA(2) 過程であるから、y_t は ARIMA(0,1,2)過程といえる。

[2] まずはy_tの解を求めよう。

$$y_1=\mu_1+v_1$$
$$=\mu_0+\varepsilon_1+\eta_1+\beta_1\eta_0$$
$$y_2=\mu_2+v_2$$
$$=\mu_1+\varepsilon_2+\eta_2+\beta_1\eta_1$$
$$=\mu_0+\varepsilon_2+\varepsilon_1+\eta_2+\beta_1\eta_1$$
$$\cdots$$
$$y_t=\mu_0+\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i+\eta_t+\beta_1\eta_{t-1}$$

となる。0 期において

$$y_0=\mu_0+v_0=\mu_0+\eta_0+\beta_1\eta_{-1}$$

であるから、y_tの式は

$$y_t=(y_0-\eta_0-\beta_1\eta_{-1})+\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i+\eta_t+\beta_1\eta_{t-1}$$

である。

さらにs期先に進めると、解が得られる。

$$y_{t+s}=(y_t-\eta_t-\beta_1\eta_{t-1})+\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_{t+i}+\eta_{t+s}+\beta_1\eta_{t+s-1}$$

この期待値をとると予測関数が得られる。予測関数は、$s=1$の場合、

$$E_t y_{t+s}=y_t-\eta_t-\beta_1\eta_{t-1}+\beta_1\eta_t$$

となり、$s>1$の場合、

$$E_t y_{t+s} = y_t - \eta_t - \beta_1 \eta_{t-1}$$

となる。ここでy_tの解と予測関数は誤差項の相関に関係がないことがわかる（相関が①でも②でも同じ解と予測関数になる）。

最後に、ARMA 表現を求めよう。階差をとると、

$$\Delta y_t = \varepsilon_t + [1 + (\beta_1 - 1)L - \beta_1 L^2]\eta_t$$

となる。以下では、誤差項の相関として①と②を仮定することで、分散や自己相関を導出する。

① $E[\varepsilon_t \eta_t] = 0$

このとき、$E[\Delta y_t] = 0$から

$$var(\Delta y_t) = \sigma^2 + (1 + (\beta_1 - 1)^2 + \beta_1^2)\sigma_\eta^2$$
$$= \sigma^2 + 2(\beta_1^2 - \beta_1 + 1)\,\sigma_\eta^2$$

となる（ただし、$E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2,\ E[\eta_t^2] = \sigma_\eta^2$に注意）。$\Delta y_t$の自己相関は

$$\rho_1 = \frac{cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1})}{\sqrt{var(\Delta y_t) var(\Delta y_{t-1})}} = \frac{-(1-\beta_1)^2\sigma_\eta^2}{\sigma^2 + 2(\beta_1^2 - \beta_1 + 1)\,\sigma_\eta^2}$$

$$\rho_2 = \frac{cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-2})}{\sqrt{var(\Delta y_t) var(\Delta y_{t-2})}} = \frac{-\beta_1\sigma_\eta^2}{\sigma^2 + 2(\beta_1^2 - \beta_1 + 1)\sigma_\eta^2}$$

$$\rho_3 = \frac{cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-3})}{\sqrt{var(\Delta y_t) var(\Delta y_{t-2})}} = \frac{0}{\sigma^2 + 2(\beta_1^2 - \beta_1 + 1)\sigma_\eta^2} = 0$$

となり、これより高次の自己相関は全て 0 となる。以上から、Δy_tはMA(2)過程、y_tはARIMA(0, 1, 2)過程となる。

② ε_tとη_tの相関が 1 である。つまり、

$$\frac{E[\varepsilon_t \eta_t]}{\sigma\sigma_\eta} = 1$$

が成立している。このとき、$E[\varepsilon_t \eta_t] = \sigma\sigma_\eta$となる。したがって、$E[\Delta y_t] = 0$から

$$var(\Delta y_t) = \sigma^2 + 2(\beta_1^2 - \beta_1 + 1)\sigma_\eta^2 + 2\,\sigma\sigma_\eta$$

となる。また、相関係数は

$$\rho_1 = \frac{cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1})}{\sqrt{var(\Delta y_t) var(\Delta y_{t-1})}} = \frac{(\beta_1 - 1)\,\sigma\sigma_\eta - (1-\beta_1)^2\sigma_\eta^2}{\sigma^2 + 2(\beta_1^2 - \beta_1 + 1)\sigma_\eta^2 + 2\,\sigma\sigma_\eta}$$

$$\rho_2 = \frac{cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-2})}{\sqrt{var(\Delta y_t) var(\Delta y_{t-2})}} = \frac{-\beta_1\,\sigma\sigma_\eta - \beta_1\sigma_\eta^2}{\sigma^2 + 2(\beta_1^2 - \beta_1 + 1)\sigma_\eta^2 + 2\,\sigma\sigma_\eta}$$

$$\rho_3 = \frac{cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-3})}{\sqrt{var(\Delta y_t) var(\Delta y_{t-2})}} = \frac{0}{\sigma^2 + 2(\beta_1^2 - \beta_1 + 1)\sigma_\eta^2 + 2\,\sigma\sigma_\eta} = 0$$

となり、より高次の自己相関は 0 である。したがって、Δy_tはMA(2)過程であり、y_tはARMA(0, 1, 2)過程である。以上から、どちらの仮定（①、②）のもとでも、y_tは ARMA(0, 1, 2)過程と

なる。ただし、1、2 次の自己相関係数は、誤差項の仮定に依存して変わる。

[3]　計量経済学の入門書をみると、定数項ありの回帰モデル

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

では、説明変数X_tの係数βの最小 2 乗推定量は

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$$

となる。この問題では、被説明変数はy_t、説明変数はy_{t-1}である。また、サンプルサイズは 1 減るため、tは 2 からスタートする。したがって、係数の推定量は

$$\frac{\sum_{t=2}^{T}(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})(y_t - \bar{y}_t)}{\sum_{t=2}^{T}(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})^2}$$

となる。ここで$\bar{y}_t$はy_tの平均、$\bar{y}_{t-1}$はy_{t-1}の平均である。第 2 章の(2.31)式と比較することで両式の類似性が分かる。

[4](a) Δy_tをy_{t-1}だけで回帰することを考えよう。このとき、残差 2 乗和は、

$$\sum_{t=1}^{T} \tilde{\varepsilon}_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (\Delta y_t - \tilde{\gamma} y_{t-1})^2$$

となる。これを$\tilde{\gamma}$で微分して 0 と置くと、

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^{T} \tilde{\varepsilon}_t^2}{\partial \tilde{\gamma}} = -2 \sum_{t=1}^{T} (\Delta y_t - \tilde{\gamma} y_{t-1}) y_{t-1} = 0$$

となる。これを解くことで、γの OLS 推定量を得る。

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum \Delta y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2}$$

(b) 真のモデル$\Delta y_t = \varepsilon_t$から、$y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots + \varepsilon_1 + y_0$である（以後、初期条件として$y_0 = 0$とする）。ここで

$$\sum_{t=1}^{T} y_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (y_{t-1} + \Delta y_t) = \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 + \sum_{t=1}^{T} \Delta y_t^2 + 2 \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \Delta y_t$$

という関係から、

$$\sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \Delta y_t = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{t=1}^{T} y_t^2 - \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 \right) - \sum_{t=1}^{T} \Delta y_t^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[y_T - \sum_{t=1}^{T} \Delta y_t^2 \right]$$

となる。ここで両辺をTで割ると

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \Delta y_t = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y_T}{\sqrt{T}} \right)^2 - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \Delta y_t^2 \right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\left[\left(\frac{y_T}{\sqrt{T\sigma^2}}\right)^2-\frac{1}{\sigma^2 T}\sum_{t=1}^{T}\Delta y_t^2\right]$$

(c) T が非常に大きい場合を考えよう。中心極限定理によって、

$$\frac{y_T}{\sqrt{T\sigma^2}}=\frac{\varepsilon_T+\varepsilon_{T-1}+\cdots+\varepsilon_1}{\sqrt{T\sigma^2}}$$

は標準正規分布に従う（$\varepsilon_T+\varepsilon_{T-1}+\cdots+\varepsilon_1$は相互に独立な確率変数の和であり、期待値は 0、分散は$T\sigma^2$となることに注意）。したがって、

$$\left(\frac{y_T}{\sqrt{T\sigma^2}}\right)^2\sim\chi^2(1)$$

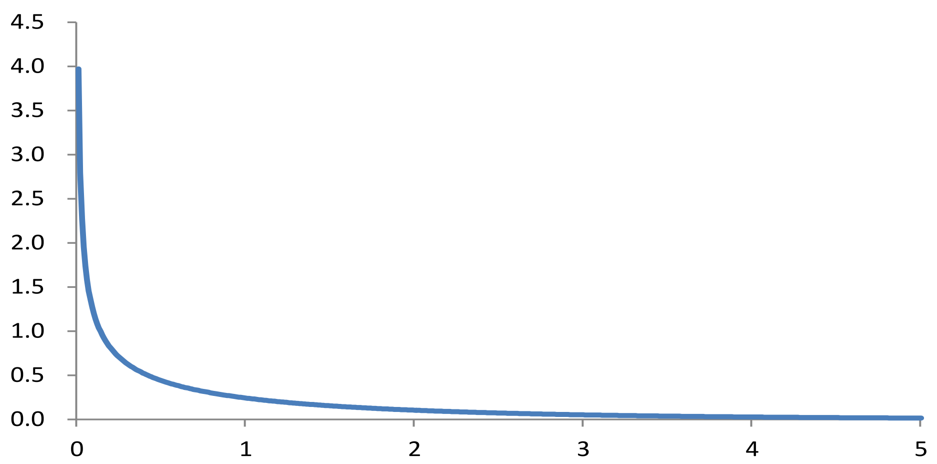
となる。次に、

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta y_t^2=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2$$

となり、これは大数の法則によって σ^2 に収束する。以上から、分子は

$$\frac{\sigma^2}{2}[\chi^2(1)-1]$$

となる。ここで $\chi^2(1)$は自由度 1 の χ^2 確率変数であり、下図ではその分布を描いている。これをみると、正規分布とはかなり違う形状であると分かる。



以上から、y_t に単位根があるとき、OLS 推定量は正規分布ではなく、非標準的な分布に従うといえる。

[5]

(a) RGDP.XLS から系列 rgdp を用いる。トレンド変数を作成するため、

genr trend=@trend+1

を入力しよう。@trend とすると 0、1、2、…という系列が作られる。これで問題ないのだが、教科書では trend 変数は 1 から始まる系列としている。そして、rgdp を trend、trend の 2 乗、3 乗で回帰する。これは

```
ls rgdp c trend trend^2 trend^3
```

と入力すればよい。推定結果は以下の通り。

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: LOG(RGDP)
Method: Least Squares
Date: 11/10/17 Time: 11:43
Sample: 1947Q1 2012Q4
Included observations: 264

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	7.464333	0.008258	903.8671	0.0000
TREND	0.009774	0.000269	36.28466	0.0000
TREND^2	-3.58E-06	2.36E-06	-1.515908	0.1308
TREND^3	-1.23E-08	5.85E-09	-2.103649	0.0364

R-squared	0.997160	Mean dependent var	8.618741
Adjusted R-squared	0.997128	S.D. dependent var	0.617032
S.E. of regression	0.033070	Akaike info criterion	-3.965364
Sum squared resid	0.284337	Schwarz criterion	-3.911183
Log likelihood	527.4280	Hannan-Quinn criter.	-3.943592
F-statistic	30433.74	Durbin-Watson stat	0.087191
Prob(F-statistic)	0.000000		

(b) ここで y を rgdp の対数とする。そして、Δy_t を、定数、trend、y_{t-1}、Δy_{t-1} で回帰する。具体的には、以下の command を入力し、実行すればよい。

```
genr y=log(rgdp)
ls d(y) c trend y(-1) d(y(-1))
```

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: D(Y)
Method: Least Squares
Date: 11/10/17 Time: 11:40
Sample (adjusted): 1947Q3 2012Q4
Included observations: 262 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.124770	0.079107	1.577222	0.1160
TREND	0.000112	8.51E-05	1.312702	0.1904
Y(-1)	-0.015630	0.010496	-1.489117	0.1377
D(Y(-1))	0.366262	0.058479	6.263169	0.0000

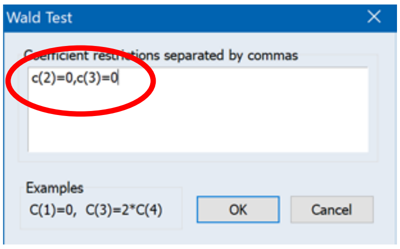
R-squared	0.156877	Mean dependent var	0.007803
Adjusted R-squared	0.147073	S.D. dependent var	0.009859
S.E. of regression	0.009106	Akaike info criterion	-6.544720
Sum squared resid	0.021391	Schwarz criterion	-6.490242
Log likelihood	861.3584	Hannan-Quinn criter.	-6.522824
F-statistic	16.00167	Durbin-Watson stat	2.073593
Prob(F-statistic)	0.000000		

推定結果をみると、結果が再現できていることが確認できる（Prob は p 値だが、定常性を仮定したうえで計算された値であるので、検定では用いることができない）。

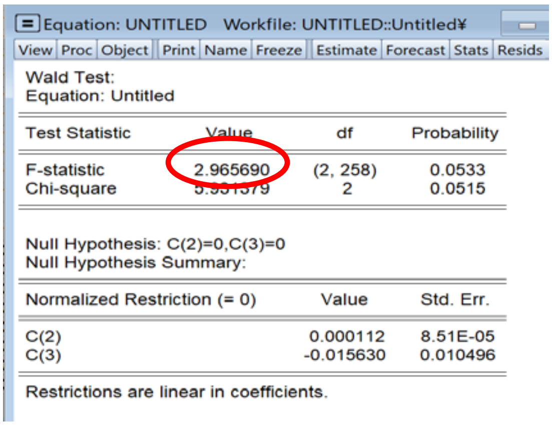
さらに F 統計量を求めたいなら View→Coefficient Diagnostics→Wald Test-Coefficient Restrictions とする。そうすると、以下の画面が現れるので、

c(2)=0,c(3)=0

と入力しよう。これは 2 番目と 3 番目の係数が 0 であるという帰無仮説の検定であり、仮説 $a_2=\gamma=0$ としたϕ_3統計量に当たる。



そして OK すると以下の画面が現れる。


Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Wald Test:
Equation: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	2.965690	(2, 258)	0.0533
Chi-square	5.931379	2	0.0515

Null Hypothesis: C(2)=0,C(3)=0
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(2)	0.000112	8.51E-05
C(3)	-0.015630	0.010496

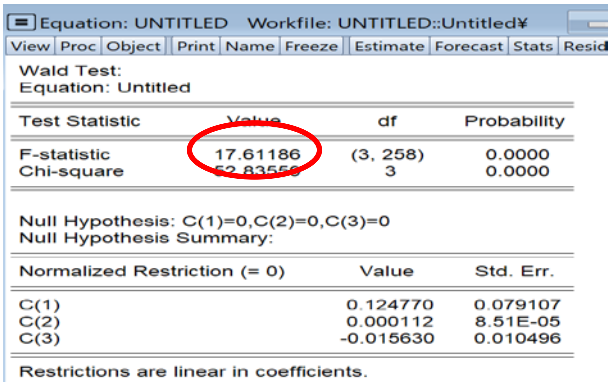
Restrictions are linear in coefficients.

ここで F 値は 2.97 となっている。やはり Probability は定常性を仮定しているため、参考にならないので注意が必要である。

ϕ_2統計量を求めるためには、

c(1)=0,c(2)=0,c(3)=0

とすればよい。そうすると以下の画面が表示される。ここで F 値は 17.61 となり、付表 B から（有意水準 5%の臨界値は 4.75）、仮説 $a_0=a_2=\gamma=0$ は棄却される。


Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resid

Wald Test:
Equation: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	17.61186	(3, 258)	0.0000
Chi-square	52.83558	3	0.0000

Null Hypothesis: C(1)=0,C(2)=0,C(3)=0
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(1)	0.124770	0.079107
C(2)	0.000112	8.51E-05
C(3)	-0.015630	0.010496

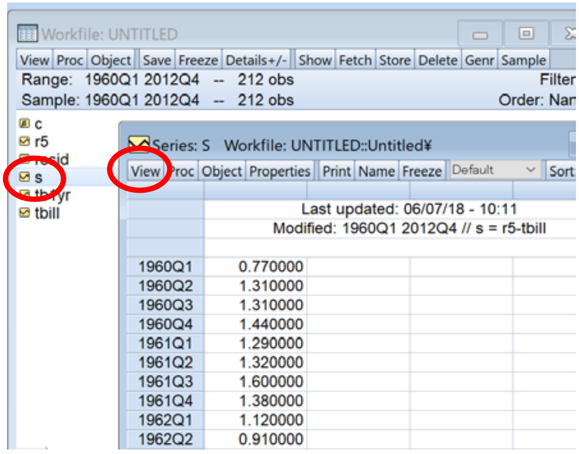
Restrictions are linear in coefficients.

[6]

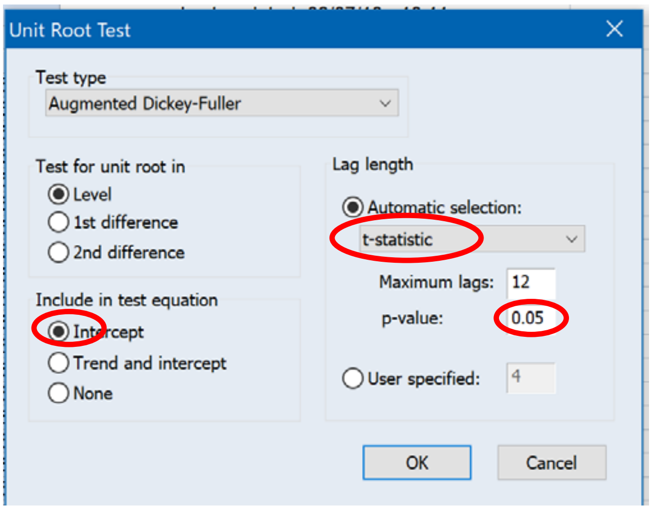
QUARTERLY.XLS は、2 章 10 節で用いた米国の金利データが含まれている。ここで金利スプレッド *s* を、5 年物の国債金利 r5 から 3 カ月物の政府証券金利 tbill を引いたものと定義します。

genr s =r5-tbill

(a)(b)ここで単位根をしますが、一般化からの特定法を使ってみましょう(AIC、BIC も簡単なので初略します)。まず、系列 s をクリックし、それから View をクリックし、Unit Root Test を選択します。



そうすると以下の画面が開かれますから、ここでラグ次数の選択方法として、t-statistic を選びます。これが一般からの特定法となります(AIC なら Akaike Info criterion、BIC なら Schwarz Info criterion を選びます)。ただし、ここで有意水準として 0.05 を選びましょう。ここでは確定項として定数項を含めますから Intercept にチェックをいれておきます。



そして OK を押すと以下の画面が出力されます。ADF 検定の t 値は-4.3657 であり、その p 値は 0.0005 ですから、有意水準 1%で単位根の仮説を棄却できます。また定数項の推定値は 0.2549、s_{t-1} の係数は-0.211 であることも確認できます。

Null Hypothesis: S has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 8 (Automatic - based on t-statistic, lagpval=0.05, maxlag=12)

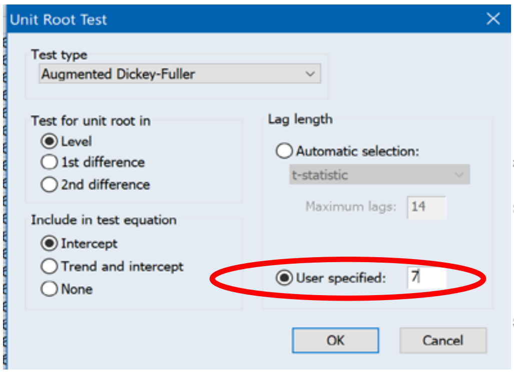
		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.365749	0.0005
Test critical values:	1% level	-3.462574	
	5% level	-2.875608	
	10% level	-2.574346	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(S)
Method: Least Squares
Date: 06/07/18 Time: 10:43
Sample (adjusted): 1962Q2 2012Q4
Included observations: 203 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
S(-1)	-0.211336	0.048408	-4.365749	0.0000
D(S(-1))	0.324048	0.074575	4.345259	0.0000
D(S(-2))	-0.100357	0.076193	-1.317140	0.1894
D(S(-3))	0.239529	0.073711	3.249575	0.0014
D(S(-4))	-0.013940	0.075569	-0.184471	0.8538
D(S(-5))	0.148151	0.073806	2.007296	0.0461
D(S(-6))	-0.074641	0.074620	-1.000292	0.3184
D(S(-7))	-0.026308	0.071455	-0.368177	0.7131
D(S(-8))	0.179743	0.071045	2.529984	0.0122
C	0.254958	0.067461	3.779331	0.0002

(c) 5 年物の国債金利 r5 に ADF 検定をしてみましょう。まず、r5 をクリックして、View をクリックして、Unit Root test を選択します。そして以下の画面で User specific をチェックして 7 とします。これで次数を 7 として ADF 検定を行うことができます。推定結果をみてみると t 値は-0.78 であり、その p 値は 0.82 ですから、単位根仮説を棄却できません。



Null Hypothesis: R5 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 7 (Fixed)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-0.784895	0.8209
Test critical values:	1% level	-3.462412	
	5% level	-2.875538	
	10% level	-2.574309	

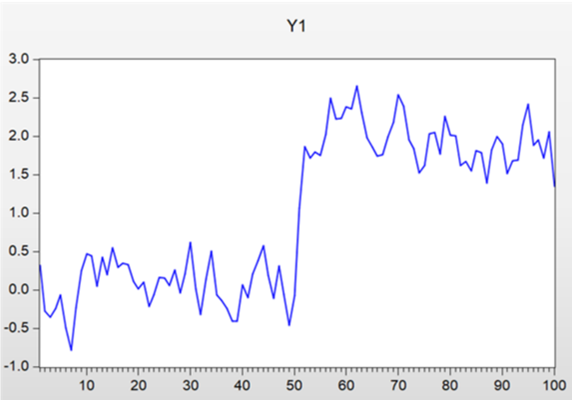
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

(d) 政府証券金利 tbill に ADF 検定をしてみよう（ラグ次数は 11 とする）。(c)と同じようにすれば、単位根仮説を棄却できないことを確認できます。

(e) 理由としては、両者が無関係に動いているのではなく、強い関係性をもって動いているためと考えられます。つまり、短期金利に生じたショックは長期金利にも影響をあたえるため、両者が似た動きをするのです。このため、スプレッドは発散することなく、むしろ収束する動きがみられるのです。このような変数間の関係は、共和分関係と呼ばれています（詳しくは 6 章を参照してください）。

[7]

(a) 図をみることで、この系列は水準が 50 期前後で高くなっていることが分かる。したがって、通常の定常過程とみなすことはできなそうである。



(b) 以下の command で結果が再現できる。

```
ls d(y1) y1(-1)
ls d(y1) c y1(-1)
ls d(y1) c (@trend+1) y1(-1)
genr dl = @date > @dateval("50")
genr dp=d(dl)
ls y1 c y1(-1) (@trend+1) dp dl
```

ここで、genr dl = @date > @dateval("50")はダミー変数DLであり、genr dp=d(dl) はDPに該当する[1]。 ペロン検定の結果だけ掲載しておくと以下となる。Y1のラグの係数は0.479であり、帰無仮説a_1=1を検定するためのt値は-6.01(=(0.479-1)/0.0867)となる。

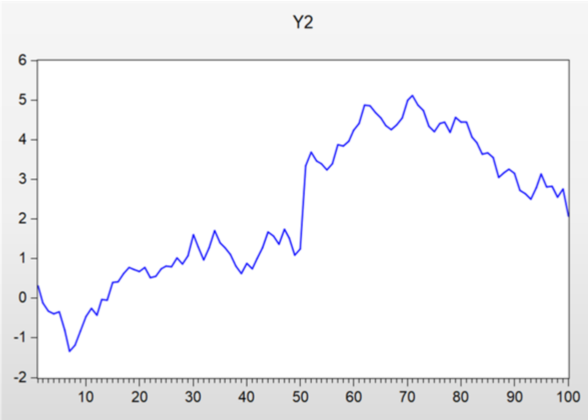
Dependent Variable: Y1
Method: Least Squares
Date: 11/17/17 Time: 09:47
Sample (adjusted): 2 100
Included observations: 99 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.082569	0.063395	1.302460	0.1959
Y1(-1)	0.478737	0.086670	5.523646	0.0000
@TREND+1	-0.002409	0.001922	-1.253819	0.2130
DP	0.025028	0.327715	0.076372	0.9393
DL	1.115841	0.202110	5.520965	0.0000

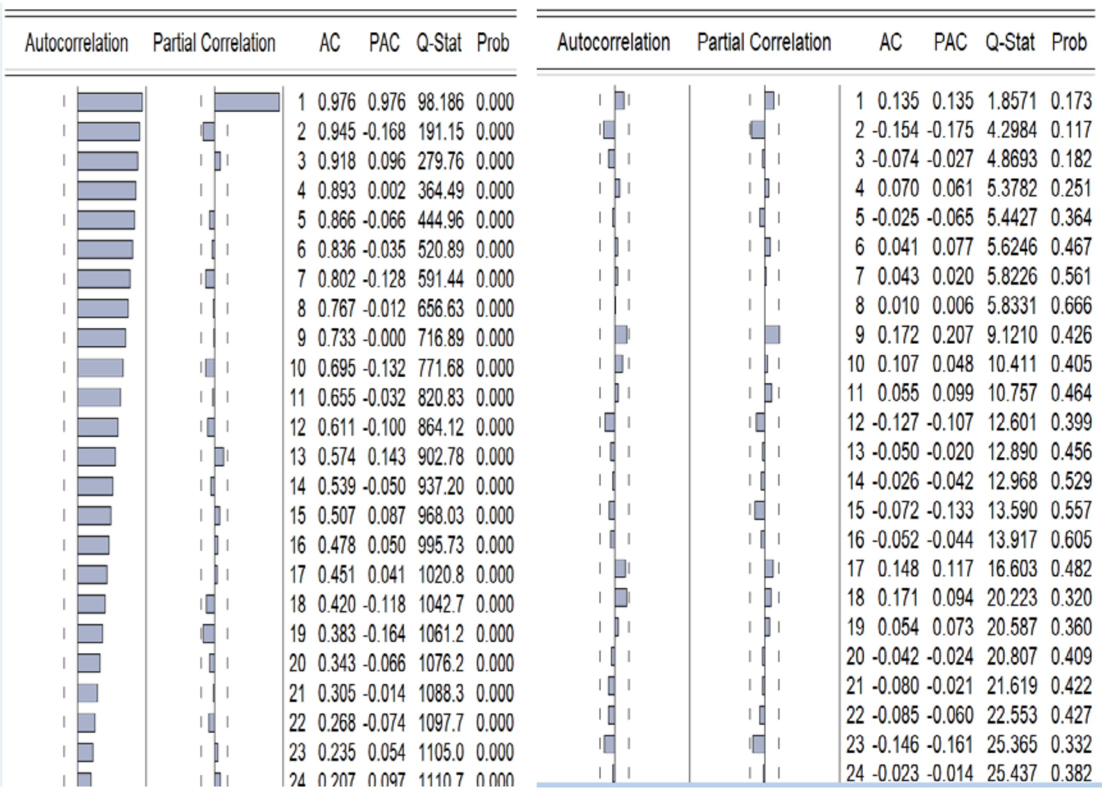
R-squared	0.930388	Mean dependent var	0.994771
Adjusted R-squared	0.927426	S.D. dependent var	0.996485
S.E. of regression	0.268449	Akaike info criterion	0.256872
Sum squared resid	6.774086	Schwarz criterion	0.387938
Log likelihood	-7.715153	Hannan-Quinn criter.	0.309902
F-statistic	314.0864	Durbin-Watson stat	1.751218
Prob(F-statistic)	0.000000		

[1] Dl は 50 期まで 0、51 期以降は 1 となる変数である。したがって、その階差 dp=d(dl)は、51 期だけ 1 となり、それ以外は 0 となる。

(c) y2 を図示すると、50 期前後で構造変化が生じているのが分かる。また、図 4.10(a)(b)と比べると、図 4.10(b)に近い動きをしていることが分かる。つまり、y2 は単位根をもっており、50 期で大きなショック（パルス）が発生している。



(d) 左下には水準、右下には階差の ACF と PACF を示している。水準でみると、ACF は非常にゆっくりと減衰しており、また、PACF は 1 次以外ほぼ 0 となっている。これに対し、階差では ACF はほぼ 0 となっており、PACF もほぼ 0 である。これらの結果から、y2 には単位根がある可能性を疑わせる。



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.976	0.976	98.186	0.000
2	0.945	-0.168	191.15	0.000
3	0.918	0.096	279.76	0.000
4	0.893	0.002	364.49	0.000
5	0.866	-0.066	444.96	0.000
6	0.836	-0.035	520.89	0.000
7	0.802	-0.128	591.44	0.000
8	0.767	-0.012	656.63	0.000
9	0.733	-0.000	716.89	0.000
10	0.695	-0.132	771.68	0.000
11	0.655	-0.032	820.83	0.000
12	0.611	-0.100	864.12	0.000
13	0.574	0.143	902.78	0.000
14	0.539	-0.050	937.20	0.000
15	0.507	0.087	968.03	0.000
16	0.478	0.050	995.73	0.000
17	0.451	0.041	1020.8	0.000
18	0.420	-0.118	1042.7	0.000
19	0.383	-0.164	1061.2	0.000
20	0.343	-0.066	1076.2	0.000
21	0.305	-0.014	1088.3	0.000
22	0.268	-0.074	1097.7	0.000
23	0.235	0.054	1105.0	0.000
24	0.207	0.097	1110.7	0.000

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.135	0.135	1.8571	0.173
2	-0.154	-0.175	4.2984	0.117
3	-0.074	-0.027	4.8693	0.182
4	0.070	0.061	5.3782	0.251
5	-0.025	-0.065	5.4427	0.364
6	0.041	0.077	5.6246	0.467
7	0.043	0.020	5.8226	0.561
8	0.010	0.006	5.8331	0.666
9	0.172	0.207	9.1210	0.426
10	0.107	0.048	10.411	0.405
11	0.055	0.099	10.757	0.464
12	-0.127	-0.107	12.601	0.399
13	-0.050	-0.020	12.890	0.456
14	-0.026	-0.042	12.968	0.529
15	-0.072	-0.133	13.590	0.557
16	-0.052	-0.044	13.917	0.605
17	0.148	0.117	16.603	0.482
18	0.171	0.094	20.223	0.320
19	0.054	0.073	20.587	0.360
20	-0.042	-0.024	20.807	0.409
21	-0.080	-0.021	21.619	0.422
22	-0.085	-0.060	22.553	0.427
23	-0.146	-0.161	25.365	0.332
24	-0.023	-0.014	25.437	0.382

(e) これは以下のコマンドを入力すればよい。

```
ls d(y2) c (@trend+1) y2(-1)
```

そうすると以下となる。この結果から、y2 のラグの係数は-0.022 と小さく、単位根仮説を棄却できないとわかる。

Dependent Variable: D(Y2)
Method: Least Squares
Date: 11/17/17 Time: 10:15
Sample (adjusted): 2 100
Included observations: 99 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.072446	0.071448	1.013964	0.3131
@TREND+1	-0.000101	0.002120	-0.047837	0.9619
Y2(-1)	-0.022398	0.034014	-0.658505	0.5118

R-squared	0.015658	Mean dependent var	0.017723
Adjusted R-squared	-0.004849	S.D. dependent var	0.339982
S.E. of regression	0.340805	Akaike info criterion	0.714822
Sum squared resid	11.15021	Schwarz criterion	0.793462
Log likelihood	-32.38367	Hannan-Quinn criter.	0.746640
F-statistic	0.763523	Durbin-Watson stat	1.658648

(f)　これは

ls y2 c y2(-1) (@trend+1) dp dl

と入力すれば推定できる。y2 のラグの係数は 0.973 と 1 に近く、単位根仮説を棄却できない。また、パルス DP の係数は 2 であり、t 値は 6.97 と大きい。したがって、y2 は単位根をもっており、51 期にパルスが発生した確率過程と分かる。

Dependent Variable: Y2
Method: Least Squares
Date: 11/17/17 Time: 10:22
Sample (adjusted): 2 100
Included observations: 99 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.089896	0.064046	1.403613	0.1637
Y2(-1)	0.973727	0.036408	26.74502	0.0000
@TREND+1	-0.002127	0.001944	-1.094121	0.2767
DP	2.006533	0.287863	6.970456	0.0000
DL	0.146854	0.148970	0.985797	0.3268

R-squared	0.978298	Mean dependent var	2.229899
Adjusted R-squared	0.977375	S.D. dependent var	1.780347
S.E. of regression	0.267794	Akaike info criterion	0.251989
Sum squared resid	6.741091	Schwarz criterion	0.383056
Log likelihood	-7.473459	Hannan-Quinn criter.	0.305019
F-statistic	1059.362	Durbin-Watson stat	1.752138
Prob(F-statistic)	0.000000		

[8]

(a)4 章の EViews マニュアルに解説があるため、ここでは結果だけを掲載する。ただし、y1～y8 は以下として定義している。

genr y1 = log(australia)

genr y2 = log(canada)

genr y3 = log(france)

```
genr y4 = log(germany)
genr y5 = log(japan)
genr y6 = log(netherlands)
genr y7 = log(uk)
genr y8 = log(us)
```

推定結果をみると、表 4.11 とほぼ同じ結果となっている。

Method	Statistic	Prob.**
Im, Pesaran and Shin W-stat	-2.99648	0.0014

** Probabilities are computed assuming asympotic normality

Intermediate ADF test results

Series	t-Stat	Prob.	E(t)	E(Var)	Lag	Max Lag	Obs
Y1	-1.6782	0.4399	-1.494	0.781	5	10	127
Y2	-1.8963	0.3332	-1.474	0.806	7	10	125
Y3	-2.9986	0.0376	-1.530	0.745	1	10	131
Y4	-2.6690	0.0822	-1.530	0.745	1	10	131
Y5	-2.2765	0.1812	-1.512	0.761	3	10	129
Y6	-3.4732	0.0102	-1.530	0.745	1	10	131
Y7	-2.7588	0.0671	-1.530	0.745	1	10	131
Y8	-1.7638	0.3970	-1.530	0.745	1	10	131
Average	-2.4393		-1.516	0.759			

(b)t 値が 0 に近い国、具体的には、オーストラリア y1、カナダ y2、米国 y8 を除くと、推定結果は改善する（IPS 統計量は-2.99 から-3.38 となっている）。しかし、こうした選択は恣意的である。もし t 値の小さい国だけを選ぶという検定を考えるなら、そうした選択が臨界値にも影響を与えてしまい、IPS 検定で用いている臨界値は不適当となる。

Cross-sections included: 5

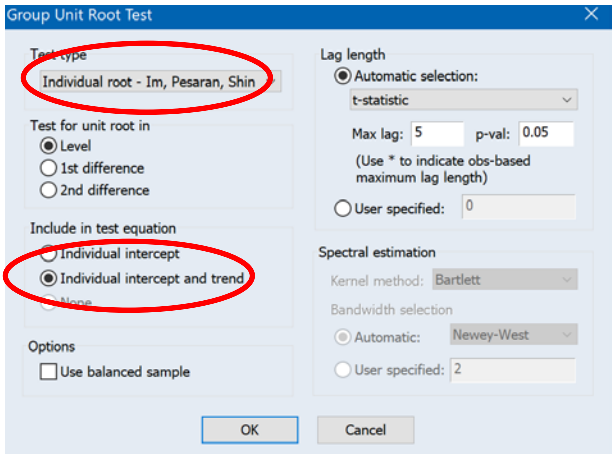
Method	Statistic	Prob.**
Im, Pesaran and Shin W-stat	-3.38339	0.0004

** Probabilities are computed assuming asympotic normality

Intermediate ADF test results

Series	t-Stat	Prob.	E(t)	E(Var)	Lag	Max Lag	Obs
Y3	-2.9986	0.0376	-1.530	0.745	1	5	131
Y4	-2.6690	0.0822	-1.530	0.745	1	5	131
Y5	-2.2765	0.1812	-1.512	0.761	3	5	129
Y6	-3.4732	0.0102	-1.530	0.745	1	5	131
Y7	-2.7588	0.0671	-1.530	0.745	1	5	131
Average	-2.8352		-1.526	0.748			

(d) 全ての国を用いて IPS 検定を行う。ただし、確定的トレンドとして、定数項とトレンド変数を含める。このとき、推定結果は以下となる。Group Unit Root Test Window において、Include in test equation の Individual intercept and trend を選択して OK としよう。



推定結果は以下の通りである。トレンドを含めた結果、IPS 統計量は-1.211 となり、p 値は10%より大きい。このため、帰無仮説（全ての系列に単位根がある）は採択されてしまう。ここで重要な点は、不必要な確定的要因（この場合、トレンド）を含めてしまうことで検出力が低下してしまうことである。ただし、必要な確定的要因を含めないと、定式化の誤りによって検出力が低下してしまう。単位根検定において、回帰式に確定的要因のどれを含めるかという問題が非常に大事なことが理解できるだろう。

Cross-sections included: 8

Method	Statistic	Prob.**
Im, Pesaran and Shin W-stat	-1.21193	0.1128

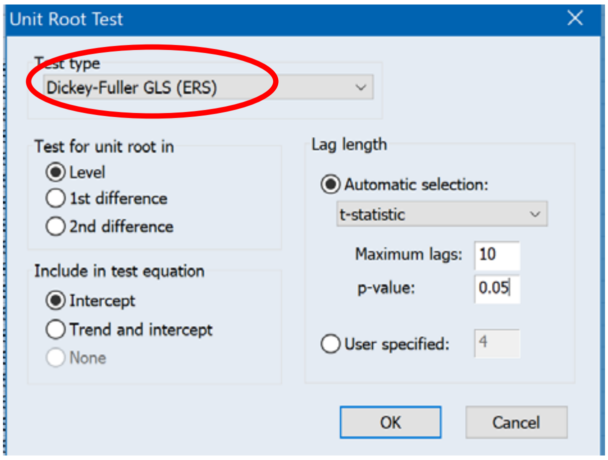
** Probabilities are computed assuming asympotic normality

Intermediate ADF test results

Series	t-Stat	Prob.	E(t)	E(Var)	Lag	Max Lag	Obs
Y1	-1.6224	0.7788	-2.135	0.638	5	5	127
Y2	-1.5716	0.7990	-2.179	0.605	1	5	131
Y3	-3.2067	0.0876	-2.179	0.605	1	5	131
Y4	-2.7379	0.2234	-2.179	0.605	1	5	131
Y5	-2.0628	0.5612	-2.158	0.625	3	5	129
Y6	-3.5808	0.0354	-2.179	0.605	1	5	131
Y7	-2.8175	0.1938	-2.179	0.605	1	5	131
Y8	-2.4482	0.3533	-2.179	0.605	1	5	131
Average	-2.5060		-2.171	0.612			

[9]

(a) 各系列で別々に単位根検定をしよう。ここで y1 はオーストリアの実質為替レートの対数とする。そして Unit Root Test Window を開いて、Dickey-Fuller GLS を選択する。また、Lag Selection は t-statistic、Maximum lags は 10、p-value は 0.05 としよう。



そして OK すると、以下の画面が表示される。t 値は-1.56 であり、10%の臨界値-1.61 よりわずかに大きい。このため、単位根仮説を棄却できない。

Null Hypothesis: Y1 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 5 (Automatic - based on t-statistic, lagpval=0.05, maxlag=10)

		t-Statistic
Elliott-Rothenberg-Stock DF-GLS test statistic		-1.566087
Test critical values:	1% level	-2.583298
	5% level	-1.943364
	10% level	-1.615050

*MacKinnon (1996)

DF-GLS Test Equation on GLS Detrended Residuals
Dependent Variable: D(GLSRESID)
Method: Least Squares
Date: 11/17/17 Time: 11:12
Sample (adjusted): 1981Q3 2013Q1
Included observations: 127 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GLSRESID(-1)	-0.039307	0.025099	-1.566087	0.1199
D(GLSRESID(-1))	0.203170	0.089825	2.261841	0.0255
D(GLSRESID(-2))	-0.116463	0.090301	-1.289713	0.1996
D(GLSRESID(-3))	0.125911	0.090937	1.384600	0.1687
D(GLSRESID(-4))	-0.135852	0.090756	-1.496891	0.1370
D(GLSRESID(-5))	0.197092	0.090599	2.175429	0.0315

同様に、y2～y8 系列について確認すると、y2、y7、y8 で単位根仮説を棄却できる。

(b) EViews のマニュアル 4 章を参照されたい。

[10]

(a) 1973 年半ばにトレンドの係数に構造変化があったとし、ペロン検定を行う。ここで log(rgdp)を y としよう。また、1973Q2 に定数項と AR の係数に構造変化があった可能性を考慮して推定を行う。被説明変数は y の階差である。また、1973Q2 においてトレンド変数は 105 になっているため、DT は DL*(@trend-105)とした。

```
genr y = log(rgdp)
genr dy=d(y)
genr DL = @date > @dateval("1973Q2")
genr DT=DL*(@trend-105)
```

推定は、以下のコマンドを入力すればよい。

```
ls dy c y(-1) dy(-1) @trend DL DT
```

推定結果は以下となる。

Equation: UNTITLED   Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

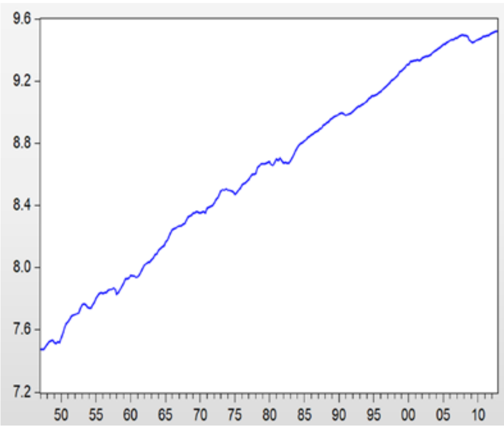
Dependent Variable: DY
Method: Least Squares
Date: 02/02/18   Time: 14:59
Sample (adjusted): 1947Q3 2012Q4
Included observations: 262 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.331221	0.121664	2.722424	0.0069
Y(-1)	-0.043608	0.016319	-2.672279	0.0080
DY(-1)	0.379033	0.058653	6.462245	0.0000
@TREND	0.000424	0.000159	2.662747	0.0082
DL	-0.001686	0.002284	-0.738347	0.4610
DT	-0.000119	5.07E-05	-2.338763	0.0201

R-squared	0.174689	Mean dependent var	0.007803
Adjusted R-squared	0.158570	S.D. dependent var	0.009859
S.E. of regression	0.009044	Akaike info criterion	-6.550807
Sum squared resid	0.020939	Schwarz criterion	-6.469089
Log likelihood	864.1557	Hannan-Quinn criter.	-6.517962
F-statistic	10.83725	Durbin-Watson stat	2.088595
Prob(F-statistic)	0.000000		

これをみると、この結果をみると、DL は有意ではないが、DT は有意であり、トレンドの傾きに構造変化があった可能性を示唆している。また、y_{t-1} の係数は-0.0436 であり、その t 値は-2.672 となっている。ペロン検定では、モデル 2 の臨界値は-3.96 であるため(λ は約 0.4 である)、単位根仮説を棄却できない。

実質 GDP を図示すると、2008 年の金融危機において水準が大きく低下し、そこから回復していないようにみえる(左下図参照)。つまり、構造変化が 2008 年にも生じている可能性がある。ここで分析期間を 2007Q4 までとして同じ推定をしてみよう。ここで y_{t-1} の係数は-0.097 であり、その t 値は-4.346 であり、臨界値-3.96 よりも小さい。したがって、単位根仮説を棄却できる。



Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: DY
Method: Least Squares
Date: 02/02/18 Time: 15:03
Sample (adjusted): 1947Q3 2007Q4
Included observations: 242 after adjustments

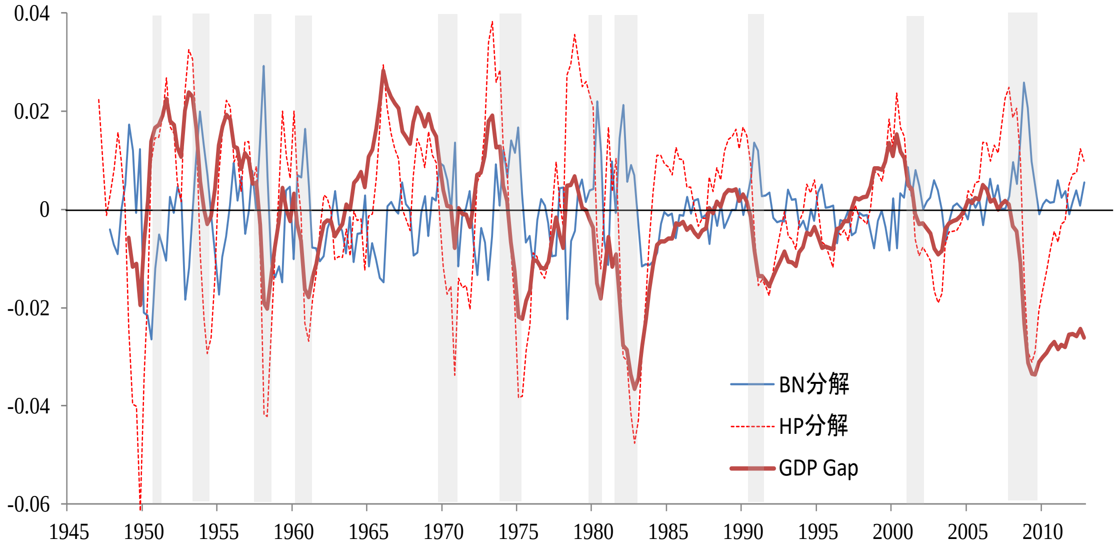
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.727550	0.165942	4.384349	0.0000
Y(-1)	-0.096714	0.022253	-4.346043	0.0000
DY(-1)	0.365295	0.060081	6.080075	0.0000
@TREND	0.000935	0.000216	4.335603	0.0000
DL	-0.004808	0.002380	-2.020178	0.0445
DT	-0.000183	5.49E-05	-3.342989	0.0010

R-squared	0.185616	Mean dependent var	0.008347
Adjusted R-squared	0.168362	S.D. dependent var	0.009797
S.E. of regression	0.008934	Akaike info criterion	-6.573324
Sum squared resid	0.018839	Schwarz criterion	-6.486821
Log likelihood	801.3721	Hannan-Quinn criter.	-6.538477
F-statistic	10.75791	Durbin-Watson stat	2.112979
Prob(F-statistic)	0.000000		

(b) EViews のマニュアルでは、BN 分解と HP 分解によって、実質 GDP の循環部分を求めているので、そちらを参照してもらいたい。GDP ギャップとは、実質 GDP から潜在 GDP（賃金・価格が伸縮的なときに達成される GDP）との差として定義される。GDP ギャップは、総需要（実質 GDP）が平均的供給力（潜在 GDP）をどれぐらい上回っているかを測っているため、需給ギャップとも呼ばれる。実質 GDP は rgdp、潜在 GDP は potential であるため、GDP ギャップは

genr gdpgap=log(rgdp/potential)

として求められる。下図では、BN 分解と HP 分解による循環項、GDP ギャップを示している。



教科書でも指摘した通り、BN 分解では、循環要素はぎざぎざの動きを示している。これに対し、HP 分解では、循環要素はなめらかに動いている。網掛け領域は、全米経済研究所

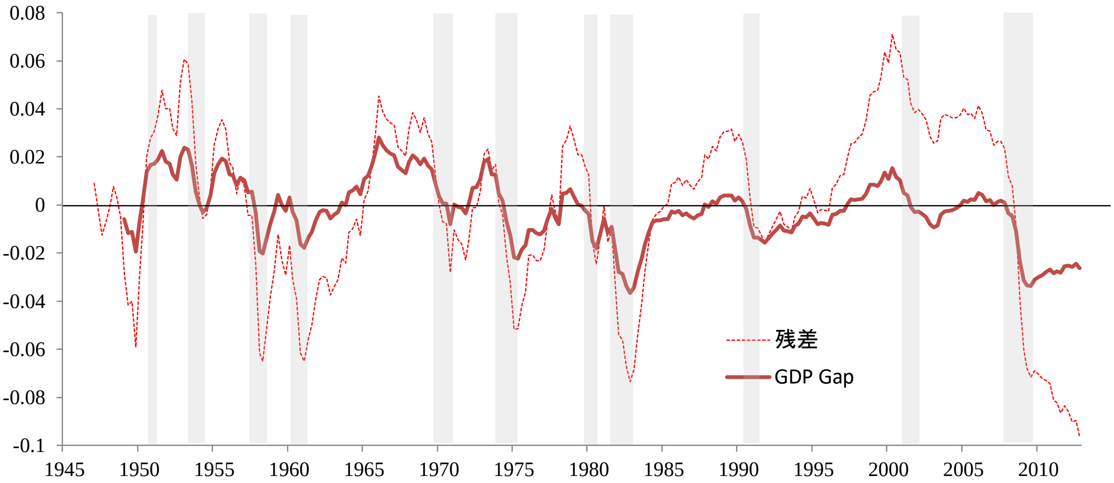
(National Bureau of Economic Research、NBER)が公表している景気後退期（ピークからボトムまで）を表している。NBER の景気後退期、また GDP ギャップと比較すると、BN 分解と HP 分解ともに景気循環を良く捉えているようにみえる。しかし、2008 年の金融危機では、BN 分解は循環要素をプラスと評価している。また、HP 分解では、2008 年において循環要素は大きなマイナスと評価されているが、2010 年には大きなプラスになっている。これは 2010 年においても、米景気が不況期にあったことを考えると問題であろう。

HP 分解の問題としては、データの最初と最後の期間において、景気循環が誤って評価されてしまっている。これに対し、BN 分解では、景気循環がかなり小刻みに変動しているだけでなく、金融危機時に好景気として推定されてしまっている。

(c) y を定数項、トレンド、DL、DT で回帰する

ls y c @trend DL DT

ここで回帰残差を循環要因としよう。以下では、残差を GDP ギャップと一緒に図示した。残差と GDP ギャップは似た動きをしているが、残差の変動は非常に大きい。また、残差をみると、金融危機によって、景気が後退していることを捉えているが、景気の悪化は収まるどころか深刻化している。これに対し、GDP ギャップでは、金融危機の影響は大きいが、景気の悪化は収まりつつあり、改善の兆しがみてとれる。



[11]この問題は、学生版の EViews では扱えないので注意されたい。

(a) EViews マニュアルの 4 章を参照されたい。念のため、以下が結果を再現するためのコードとなります。

!draws=5000	N:繰り返し回数を 5000 回に
!series =100	T:サンプルサイズは 100
!a=1	a: AR(1)の係数であり、単位根を仮定
workfile dftest u !draws	
vector(!draws) vec_a=0	
vector(!draws) vec_t=0	
smpl 1 1	
series y=0	
for !i=1 to !draws smpl 2 !series series y=!a*y(-1)+nrnd equation eq1.ls y c y(-1) vec_a(!i)=@coefs(2) vec_t(!i)=(@coefs(2)-1)/@stderrs(2) next	これは for 文と言われて、for から next まででひとまとまりになっている。ここで!i は 1 で始まって、!draws で終わる。まず、!i を 1 としてデータを AR(1)で生成する(rnmd は標準正規乱数)。そして OLS で推定して AR(1)の係数を得る。その結果を、ベクトル vec_a の第一要素に収納する。今度は、!i を 2 として同じことをする。
smpl 1 !draws mtos(vec_a,vec_ahat) mtos(vec_t,vec_that)	ベクトルのままだと計算しにくいので、vec_a、vec_t を時系列データに変換する。
vec_ahat.hist	
vec_that.hist	

(b)トレンド変数を含めるためには、

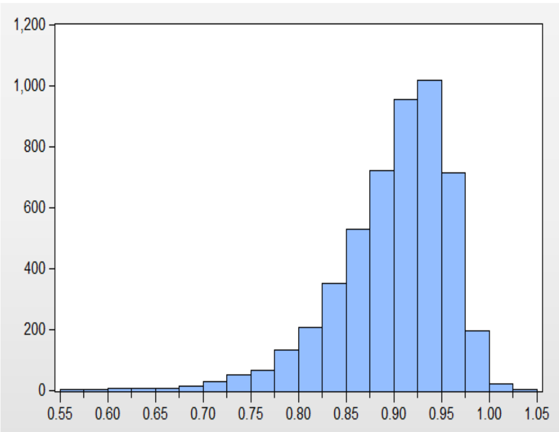
equation eq1.ls y c y(-1)

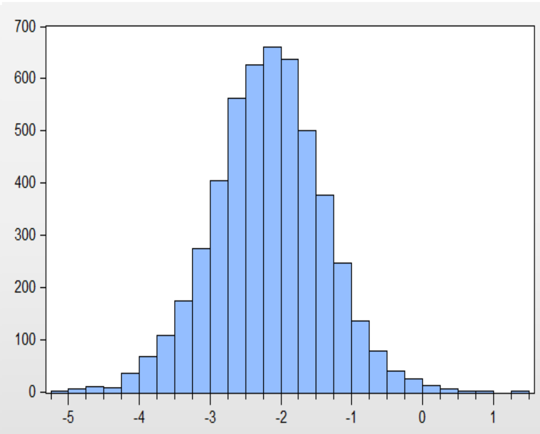
という行を

equation eq1.ls y c y(-1) @trend

に置き換えたらよい。ここで@trend はトレンド変数である。そして run をおすと、以下の

図が得られる。左下の図では、AR(1)の係数の分布を示しており、その平均は約 0.9 となっている。また、t 統計量の分布は中心がだいたい-2.1 になっている。





　(a)(b)の結果を比較すると、AR(1)の係数は、トレンドを含めたときの方が、より小さい値が生じやすいことが分かる。つまり、係数の分布は全体的に左にシフトしている。同様に、t 統計量についても、トレンド変数を含めたときの方が、より小さな値が生じやすくなっている。

(c)DGP を定常過程としたいなら、!a の値を変えればよい。たとえば、a=0.5 なら code は

!a=0.5

また、t 統計量は真の値を 0.5 とするため、

vec_t(!i)=(@coefs(2)-0.5)/@stderrs(2)

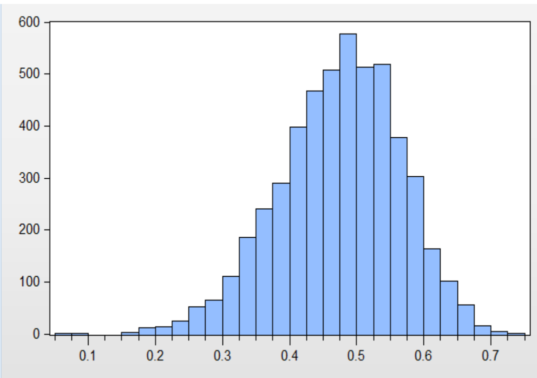
と変更する。a=0.95 なら

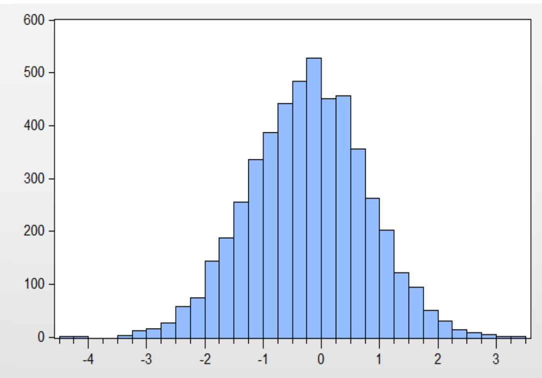
!a=0.95

vec_t(!i)=(@coefs(2)-0.95)/@stderrs(2)

とする。以下では、結果だけを示す。以下では結果だけを示す。

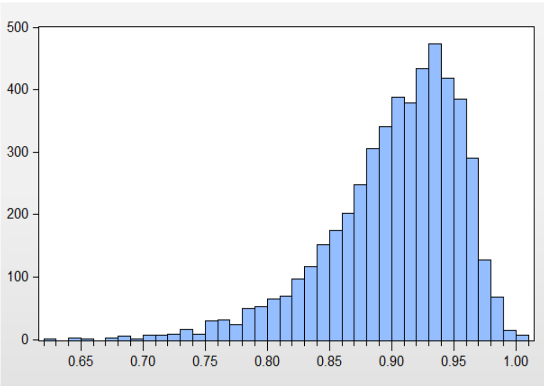
　下図では、a=0.5 の場合について、AR(1)の係数、t 統計量の分布を示している。AR(1)の係数は真の値 0.5 の周りで正規分布している。また、t 統計量も 0 を中心にした正規分布しである。したがって、定常過程であれば、通常の分布理論があてはまる。

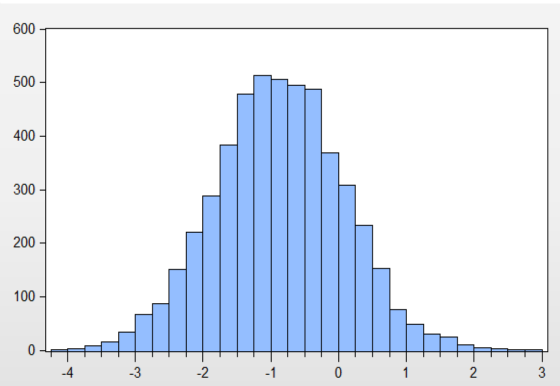




　下図では、a=0.95 の場合について、AR(1)の係数、t 統計量の分布を示している。左下の

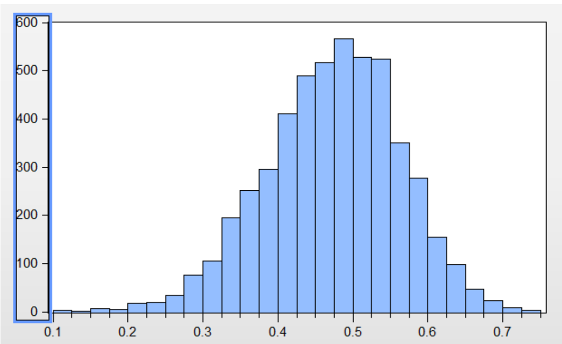
図をみると、AR(1)の係数は中心が 0.95 ではなく、左にひずんだ分布をしていることが分かる。また、t 値の分布も 0 ではなく、0 を下回った値が中心となっている。これらはランダムウォークからデータを生成した場合と同じである。したがって、AR(1)の係数が 1 に近い場合でも、単位根の場合と同様の問題が生じることが分かる。



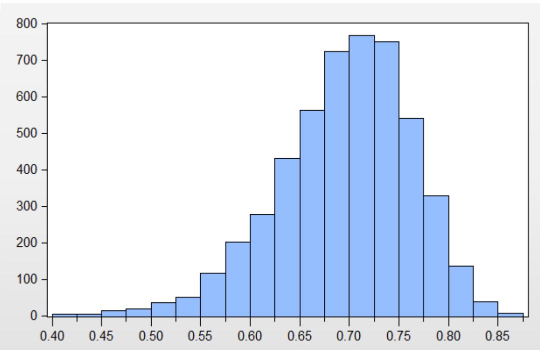


(d) 以下では、 δ =0,1,2,3についてa_1の分布を示す。これをみると、 δ =0の場合（構造変化なし）、a_1の係数は真の値0.5の近辺で推定されている。しかし、構造変化があるとき、a_1の係数は1の方向でバイアスがある。そして、これは δ の値が大きくなるほど、バイアスも大きくなっていることが確認できる。

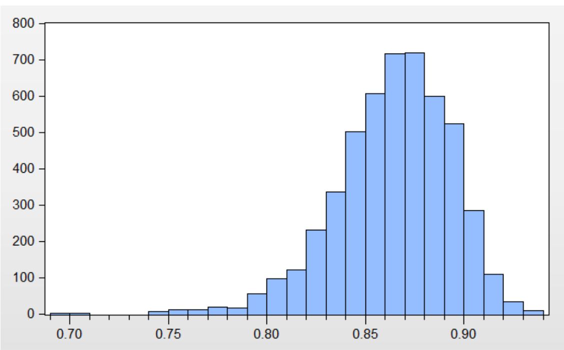
δ=0



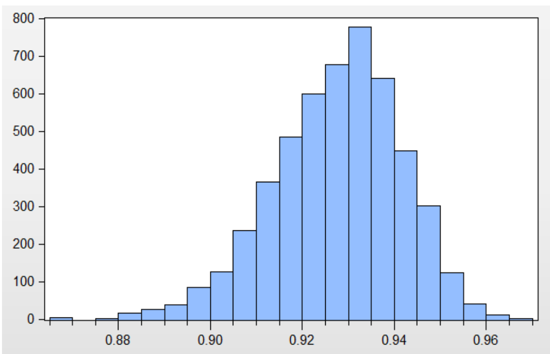
δ=1



δ=2



δ=3



以下のcodeをrunすれば、 δ =1、a_1=0.5の場合について、a_1の推定量の分布を計算でき

る。興味のある読者は、いろいろと設定を変えて、分布がどのように変化するかを調べてみてもらいたい。

```
!draws=5000
!series =100
!a=0.5
!delta=1
workfile monte u !draws
vector(!draws) vec_a=0
genr dummy = @date > @dateval("50")
smpl 1 1
series y=0
for !i=1 to !draws
    smpl 2 !series
    series y=!a*y(-1)+!delta*dummy+nrnd
    equation eq1.ls y c y(-1)
    vec_a(!i)=@coefs(2)
next
smpl 1 !draws
mtos(vec_a,vec_ahat)
    vec_ahat.hist
```