2019/11/05

新谷元嗣、藪友良

第 3 章の解答

[1]　別の解法として、2 章で AR(1)過程の条件なし平均を導出した方法で、(3.5)式を導出できる。まず、

$$E[\varepsilon_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E[\varepsilon_{t-1}^2]$$

に、$E[\varepsilon_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E[\varepsilon_{t-2}^2]$を代入すると、

$$E[\varepsilon_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 E[\varepsilon_{t-2}^2])$$

$$= \alpha_0(1 + \alpha_1) + \alpha_1^2\, E[\varepsilon_{t-2}^2]$$

となる。さらに代入を繰り返すと、

$$E[\varepsilon_t^2] = \alpha_0(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 \ldots + \alpha_1^{t-1}) + \alpha_1^t\, E[\varepsilon_0^2]$$

を得る。ここで$|\alpha_1| < 1$であるから、tが十分に大きくなると、$\alpha_0(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 \ldots + \alpha_1^{t-1})$は$\alpha_0/(1-\alpha_1)$に、$\alpha_1^t\, E[\varepsilon_0^2]$は 0 に収束していく。したがって、$t$が十分に大きいと、

$$E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

[2] ARCH(1)過程において、ε_tの条件なし平均は、

$$E[\varepsilon_t] = E\left[v_t\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= E[v_t]E\left[\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = 0$$

となり（v_tとε_{t-j}の独立性に注意）、自己共分散は（$i \neq 0$に対し）

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-i}] = E\left[v_t v_{t-i}\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-i-j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= E[v_t]E\left[v_{t-i}\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-i-j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = 0$$

となる。また、ε_tの条件なし分散は

$$E[\varepsilon_t^2] = E\left[v_t^2\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2\right)\right]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j E[\varepsilon_{t-j}^2]$$

となる。ここで$E[\varepsilon_t^2] = E[\varepsilon_{t-j}^2]$を用いて、上式を$E[\varepsilon_t^2]$について解けば

$$E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j}$$

を得る。以上から、条件なし平均、分散、自己共分散は時点に依存していないため、$\{\varepsilon_t\}$は定常である。

次に、条件付き平均と分散を求めてみよう。$t-1$期までの情報を所与とすると、ε_tの条件付き平均は、

$$E[\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\dots] = E_{t-1}v_t\, E_{t-1}\left[\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\varepsilon_{t-j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = 0$$

となる。$t-1$期までの情報を所与とすると、ε_tの条件付き分散は、

$$E[\varepsilon_t^2|\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\dots] = E_{t-1}v_t^2\, E_{t-1}\left[\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\varepsilon_{t-j}^2\right)\right]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\varepsilon_{t-j}^2$$

式展開では、$\sigma_v{}^2$=1、v_tとε_{t-j}は互いに独立であることに注意。以上から、条件付き分散は、ε_{t-j}^2の実現値に依存する。

[3] GARCH(1,1)過程

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

を考える。このとき、この式に 1 期前の条件付き分散$h_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2}$を代入すると、

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2})$$
$$= \alpha_0(1+\beta_1) + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1\beta_1\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 h_{t-2}$$

となる。さらに 2 期前の条件付き分散$h_{t-2} = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 h_{t-3}$を代入すると、

$$h_t = \alpha_0(1+\beta_1) + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1\beta_1\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 h_{t-3})$$
$$= \alpha_0(1+\beta_1+\beta_1^2) + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1\beta_1\varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_1\beta_1^2\varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1^3 h_{t-3}$$

となる。こうした代入を繰り返していくと、h_tは ARCH(∞)過程として表せる。

$$h_t = \alpha_0(1+\beta_1+\beta_1^2+\dots) + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1\beta_1\varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_1\beta_1^2\varepsilon_{t-3}^2+\dots$$

ここで$|\beta_1| < 1$であるから($\alpha_1 > 0, \beta_1 \geq 0$、$\alpha_1+\beta_1 < 1$から、$1 > \beta_1 \geq 0$)、$j$が非常に大きいなら$\beta_1^j h_{t-j}$は 0 となることに注意。

[4] 予測誤差を

$$u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}\varepsilon_t^2 = \varepsilon_t^2 - h_t$$

と定義する。GARCH(1, 2)過程$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-1}$の両辺に、予測誤差$u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$を加えると

$$h_t + (\varepsilon_t^2 - h_t) = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-1} + (\varepsilon_t^2 - h_t)$$

となる。左辺を整理すると、

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-1} + (\varepsilon_t^2 - h_t)$$

となる。ここで右辺に$\beta_1\varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1\varepsilon_{t-1}^2$を加えると

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 - \beta_1(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}) + (\varepsilon_t^2 - h_t)$$

となる。ここで$u_t = \varepsilon_t^2 - h_t, u_{t-1} = \varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}$を用いると

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 - \beta_1 u_{t-1} + u_t$$

となる。

(a) まずはu_tに系列相関がないことを示す。つまり、$t \neq s$のとき

$$cov(u_t, u_s) = 0$$

が成立することを示せばよい。定義により、$u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$、$\varepsilon_t = v_t h_t^{1/2}$であるため、

$$u_t = \varepsilon_t^2 - h_t = v_t^2 h_t - h_t = (v_t^2 - 1)h_t$$

である。ここで、v_tとh_t は独立なので、

$$E[u_t] = E[(v_t^2 - 1)h_t] = E[v_t^2 - 1]E[h_t] = (1 - 1)E[h_t] = 0$$

となる。ここで$t > s$とすると、

$$cov(u_t, u_s) = E[u_t u_s]$$
$$= E[(v_t^2 - 1)h_t(v_s^2 - 1)h_s]$$
$$= E[(v_t^2 - 1)]E[h_t(v_s^2 - 1)h_s] = 0$$

となる。次に、$\{\varepsilon_t^2\}$が ARMA(2,1) 過程となることを示す。既に示したとおり、

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 - \beta_1 u_{t-1} + u_t$$

となる。u_tはホワイトノイズ（$E[u_t] = 0$、$cov(u_t, u_s) = 0$）であるから、ε_t^2は ARMA(2,1) 過程となる。ここで自己回帰部分の係数は$\alpha_1 + \beta_1$とα_2、MA 部分の係数は$-\beta_1$となる。

(b) GARCH(2, 1)過程

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2 h_{t-2}$$

とする。ここで両辺に予測誤差$u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$を加えると

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2 h_{t-2} + u_t$$

となる。ここで$u_{t-1} = \varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}$から、$h_{t-1} = \varepsilon_{t-1}^2 - u_{t-1}$となる。同様に、$h_{t-2} = \varepsilon_{t-2}^2 - u_{t-2}$となる。これらを上式に代入すると、

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1(\varepsilon_{t-1}^2 - u_{t-1}) + \beta_2(\varepsilon_{t-2}^2 - u_{t-2}) + u_t$$
$$= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + (\alpha_2 + \beta_2)\varepsilon_{t-2}^2 + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2}$$

となる。これはまさに ARMA(2,2)過程である。

(c) GARCH(*p*, *q*)過程

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_p h_{t-p}$$

とする。このとき、$u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$は$h_t = \varepsilon_t^2 - u_t$であり、これを左辺に代入して整理すると

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i} + u_t$$

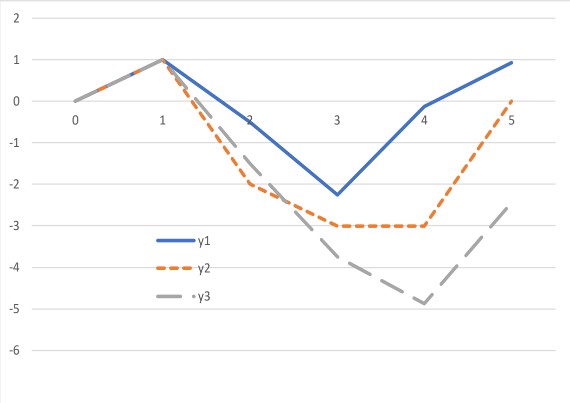
をとなる。上式に$h_{t-i} = \varepsilon_{t-i}^2 - u_{t-i}$を代入すると

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i + \beta_i)\varepsilon_{t-i}^2 + u_t - \sum_{i=1}^{p}\beta_i u_{t-i}$$

となる。したがって、ε_t^2は ARMA(m, p)となる。ここで、ε_{t-i}^2の係数は$\alpha_i + \beta_i$となる。

[5] a)b) 左下の表では、各モデルからデータを発生させた結果をまとめている。右下図では、これらの動きを示している。

時点	y1	y2	y3	epsiron
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	-0.5	-2	-1.5	-1
3	-2.25	-3	-3.75	-2
4	-0.125	-3	-4.875	1
5	0.9375	0	-2.4375	1
平均	-0.1875	-1.4	-2.3125	0
分散	1.757813	3.3	5.070313	2



モデル 1 は単なる AR(1)モデルであり、2 期と 3 期の負のショックの影響を受けて、y1 の値は低下しているが、その影響はすぐに消える。モデル 2 はホワイトノイズ+ARCH-M 効果であり、負のショックの影響を受けて、ARCH-M 効果のため、*y2* の水準が大きく低下している。モデル 3 は、AR(1)に ARCH-M 効果があるモデルである。負のショックの影響を受けて、ARCH-M 効果により y3 の水準が低下し、AR(1)効果のため影響がさらに拡大している。平均を比較すると、y3 が最も小さくなっている。また、分散も y3 が最も大きい。

[6] 条件付き期待値は

$$E_{t-1}y_t = E_{t-1}(a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t) = a_0 + a_1 y_{t-1}$$

となる。また、条件付き分散は

$$E_{t-1}[(y_t - E_{t-1}y_t)^2] = E_{t-1}\varepsilon_t^2$$

となる。

次に、条件なし分散を求める。ここでy_tの特殊解は、

$$y_t = \frac{a_0}{1 - a_1} + \varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \cdots$$

であるから、$E[y_t] = a_0/(1 - a_1)$となり、また

$$var(y_t) = E[(\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \cdots)^2] = \frac{E[\varepsilon_t^2]}{1 - a_1^2}$$

となる。ここで

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2}$$

であり、また$E[\varepsilon_t] = 0$、$E[v_t] = 0$から

$$E[\varepsilon_t^2] = E[v_t^2]E[\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2]$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 E[\varepsilon_{t-1}^2] + \alpha_2 E[\varepsilon_{t-2}^2]$$

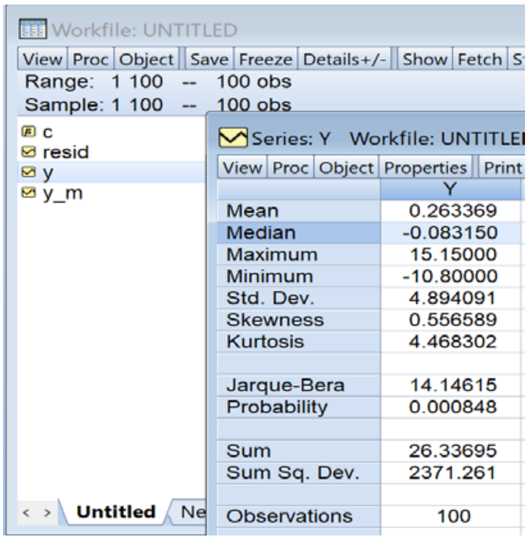
となる。条件なし分散が、時間を通じて一定であるなら$(E[\varepsilon_t^2] = E[\varepsilon_{t-1}^2] = E[\varepsilon_{t-2}^2])$

$$E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}$$

となる。したがって、y_tの条件なし分散は、

$$var(y_t) = \frac{E[\varepsilon_t^2]}{1 - a_1^2} = \frac{1}{1 - a_1^2}\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}$$

[7] 基本統計量を確認しよう。Workfile Window から y を選択し、View→Descriptive Statistics&Tables→Stats Table とすると、以下の画面が表示される。



標本平均は 0.263、標本標準偏差は 4.894、最大値、最小値は–10.8、15.15 となる。

(a) AR(1)モデルを推定するため、ls y y(-1)と command window に入力すると以下の推定結果が出力される。

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 11/06/17 Time: 10:25
Sample (adjusted): 2 100
Included observations: 99 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y(-1)	0.944405	0.035629	26.50647	0.0000

R-squared	0.877263	Mean dependent var	0.253171
Adjusted R-squared	0.877263	S.D. dependent var	4.917930
S.E. of regression	1.722939	Akaike info criterion	3.935990
Sum squared resid	290.9150	Schwarz criterion	3.962204
Log likelihood	-193.8315	Hannan-Quinn criter.	3.946596
Durbin-Watson stat	1.696187		

(b) Equation Window において View→Residual Diagnostics→Correlogram Q-statistics と選択

すると以下の画面が出力される。これをみると、残差の ACF と PACF はともに小さな値をとっている。また、Q-Stat をみると、どれも小さな値であり、p 値は 10%を超えているため、系列相関は存在しない。この結果から、残差はホワイトノイズであり、AR(1)は良いモデルであるといえよう。

Date: 11/06/17 Time: 10:27
Sample: 1 100
Included observations: 99
Q-statistic probabilities adjusted for 1 dynamic regressor

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.149	0.149	2.2626	0.133
		2	0.004	-0.018	2.2646	0.322
		3	-0.018	-0.016	2.2978	0.513
		4	-0.012	-0.007	2.3142	0.678
		5	0.068	0.073	2.8100	0.729
		6	0.003	-0.019	2.8109	0.832
		7	-0.099	-0.100	3.8852	0.793
		8	-0.151	-0.123	6.3861	0.604
		9	0.064	0.112	6.8467	0.653
		10	0.101	0.073	7.9980	0.629
		11	0.090	0.061	8.9143	0.630
		12	-0.038	-0.057	9.0795	0.696
		13	0.128	0.176	10.982	0.612
		14	-0.063	-0.135	11.454	0.650
		15	-0.038	-0.049	11.628	0.707
		16	-0.056	-0.070	12.004	0.744
		17	0.013	0.105	12.024	0.799
		18	-0.004	-0.025	12.026	0.846
		19	-0.028	-0.015	12.126	0.880
		20	0.055	0.062	12.516	0.897
		21	-0.052	-0.028	12.864	0.913
		22	0.066	0.009	13.427	0.921
		23	0.035	-0.009	13.590	0.938
		24	-0.192	-0.233	18.491	0.779
		25	-0.262	-0.172	27.753	0.319

(c)残差の 2 乗の ACF と PACF をみてみよう。Equation Window において View→Residual Diagnostics→Correlogram Squared Residuals を選択すると以下の画面が出力される。これをみると、ACF と PACF は高い値をとっており、残差の 2 乗には系列相関があることを確認できる。したがって、ARCH 効果はあるといえる。

Date: 11/06/17 Time: 10:30
Sample: 1 100
Included observations: 99

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.473	0.473	22.832	0.000
		2	0.127	-0.125	24.491	0.000
		3	-0.057	-0.086	24.833	0.000
		4	-0.078	0.004	25.470	0.000
		5	0.057	0.135	25.817	0.000
		6	0.242	0.198	32.134	0.000
		7	0.273	0.070	40.219	0.000
		8	0.214	0.062	45.253	0.000
		9	0.137	0.068	47.335	0.000
		10	-0.005	-0.066	47.338	0.000
		11	-0.066	-0.038	47.833	0.000
		12	-0.094	-0.103	48.854	0.000
		13	-0.065	-0.064	49.346	0.000
		14	0.028	0.013	49.439	0.000
		15	-0.013	-0.143	49.458	0.000
		16	0.014	0.049	49.483	0.000
		17	0.019	0.030	49.528	0.000
		18	-0.018	0.003	49.569	0.000
		19	0.016	0.112	49.603	0.000
		20	0.007	0.004	49.608	0.000
		21	-0.023	0.022	49.676	0.000
		22	-0.064	-0.048	50.201	0.001
		23	-0.033	0.006	50.345	0.001
		24	0.044	0.083	50.603	0.001
		25	0.155	0.086	53.848	0.001

(d)残差 2 乗を残差 2 乗のラグで回帰してみよう。Equation Window において View→Residual Diagnostics→Heteroskedasticity Test とし、Heteroskedasticity Window において ARCH を選び、Number of Lags は 1 とする。そして、OK とすると、以下の画面が出力される。これをみると、残差 2 乗のラグは係数が 0.47 であり、その t 値は 5.27 と高い。また、TR^2 は 22.02777 と大きく、対応する p 値は 0.000 となっている。以上から、残差 2 乗には系列相関が残っており、ARCH 効果があることが分かる。

Heteroskedasticity Test: ARCH

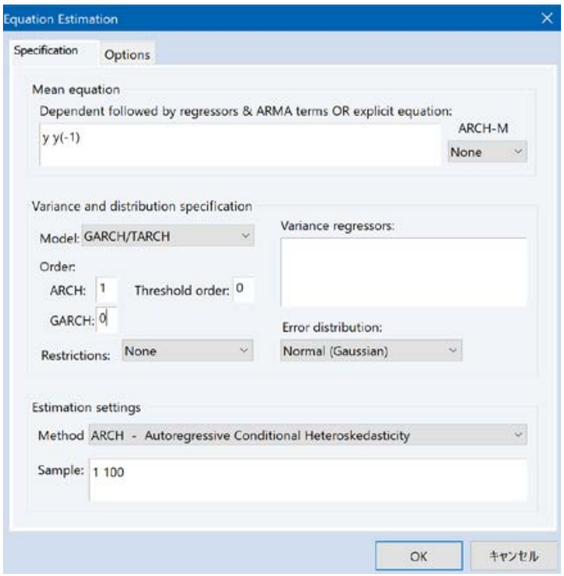
F-statistic	27.83472	Prob. F(1,96)	0.0000
Obs*R-squared	22.02777	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 11/06/17 Time: 10:34
Sample (adjusted): 3 100
Included observations: 98 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.550108	0.548491	2.826133	0.0057
RESID^2(-1)	0.474510	0.089940	5.275862	0.0000

R-squared	0.224773	Mean dependent var	2.958698
Adjusted R-squared	0.216698	S.D. dependent var	5.359152
S.E. of regression	4.743083	Akaike info criterion	5.971449
Sum squared resid	2159.696	Schwarz criterion	6.024203
Log likelihood	-290.6010	Hannan-Quinn criter.	5.992787
F-statistic	27.83472	Durbin-Watson stat	1.879492
Prob(F-statistic)	0.000001		

(e)平均の式は AR(1)として、誤差項は ARCH(1)として推定をしよう。Equation Estimation ウィンドウにおいて、推定法 Method として ARCH-Autoregressive Conditional Heteroskedasticity を選択すると左下の図のような画面に切り替わる。図の通りに入力すると推計結果が得られる（右下の図）。



Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 11/06/17 Time: 10:41
Sample (adjusted): 2 100
Included observations: 99 after adjustments
Convergence achieved after 12 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Y(-1)	0.886045	0.026849	33.00074	0.0000
	Variance Equation			
C	1.166381	0.267084	4.367091	0.0000
RESID(-1)^2	0.662690	0.219629	3.017321	0.0026

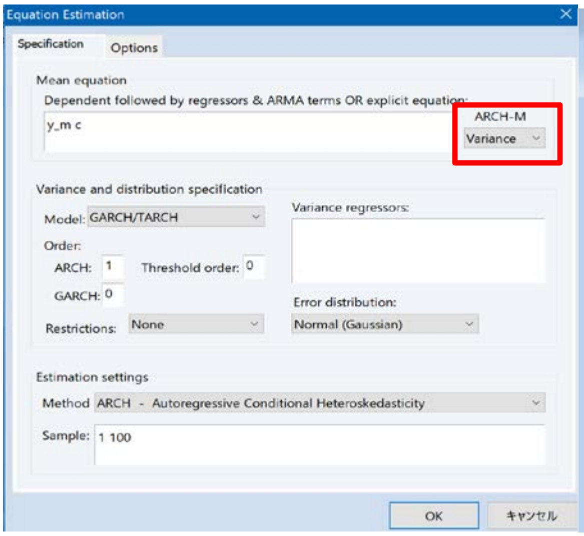
R-squared	0.873903	Mean dependent var	0.253171
Adjusted R-squared	0.873903	S.D. dependent var	4.917930
S.E. of regression	1.746366	Akaike info criterion	3.730021
Sum squared resid	298.8797	Schwarz criterion	3.808661
Log likelihood	-181.6360	Hannan-Quinn criter.	3.761839
Durbin-Watson stat	1.558816		

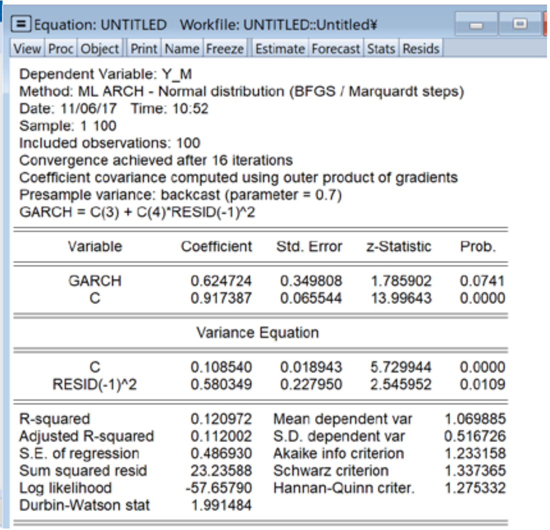
よって、推定結果は以下となる。教科書とほぼ同じ結果が得られている。

$$y_t = 0.886y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad h_t = 1.17 + 0.663\varepsilon_{t-1}^2$$

$$(33.00) \qquad\qquad (4.37) \quad (3.01)$$

[8](a)ARCH-M 過程を推定するため、Equation Window を左下のように選択する。ARCH 過程との違いは項目 ARCH-M において Variance を選択することである。こうすることで平均の式に条件付き分散を説明変数として加えることができる。そして OK とすると、右下の画面が得られる。




Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: Y_M
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 11/06/17 Time: 10:52
Sample: 1 100
Included observations: 100
Convergence achieved after 16 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	0.624724	0.349808	1.785902	0.0741
C	0.917387	0.065544	13.99643	0.0000
Variance Equation				
C	0.108540	0.018943	5.729944	0.0000
RESID(-1)^2	0.580349	0.227950	2.545952	0.0109

R-squared	0.120972	Mean dependent var	1.069885
Adjusted R-squared	0.112002	S.D. dependent var	0.516726
S.E. of regression	0.486930	Akaike info criterion	1.233158
Sum squared resid	23.23588	Schwarz criterion	1.337365
Log likelihood	-57.65790	Hannan-Quinn criter.	1.275332
Durbin-Watson stat	1.991484		

推定結果をまとめると以下となる。

$$y_t = 0.917 + 0.625h_t + \varepsilon_t \qquad h_t = 0.108 + 0.580\varepsilon_{t-1}^2$$

$$(13.99)\ (1.79) \qquad\qquad (5.73) \quad (2.55)$$

(b)このため、現在のモデルは不適当といえる。残差と残差 2 乗の ACF、PACF を調べてみると、系列相関が残っていることが分かる。これは View→Residual Diangnostics→Correlogram Q-statistics もしくは Correlogram Squared Residuals として確認できる。別のモデルとして、GARCH(1,1)を試してみよう。そうすると、残差にはいまだ系列相関が残るが、残差 2 乗は系列相関が消えることが確認できる。GARCH の次数をかえることで、系列相関がどうなるかを確認してもらいたい。

[9] (a)RGDP.XLS を開き、Eviews にデータを入力しよう。GDP の成長率を y と定義する。

```
genr y=log(rgdp/rgdp(-1))
```

そして、定数項を含めた AR(1)で推定するため、ls y c y(-1)と入力すると左下の画面の結果が得られ、教科書とほぼ同じ結果が得られる。次に、ラグを 4 つ（1 年分）まで用いて、残差 2 乗の LM 検定を行う。残差 2 乗を残差の 2 乗のラグで回帰すると右下の画面が得

られ、ここでも教科書とほぼ同じ結果が再現できる。

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 11/06/17 Time: 11:17
Sample (adjusted): 1947Q3 2012Q4
Included observations: 262 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.004914	0.000723	6.797467	0.0000
Y(-1)	0.370575	0.057561	6.437928	0.0000

R-squared	0.137493	Mean dependent var	0.007803
Adjusted R-squared	0.134176	S.D. dependent var	0.009859
S.E. of regression	0.009174	Akaike info criterion	-6.537258
Sum squared resid	0.021883	Schwarz criterion	-6.510019
Log likelihood	858.3808	Hannan-Quinn criter.	-6.526310
F-statistic	41.44692	Durbin-Watson stat	2.067235
Prob(F-statistic)	0.000000		

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	3.475271	Prob. F(4,253)	0.0087
Obs*R-squared	13.43749	Prob. Chi-Square(4)	0.0093

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 11/06/17 Time: 11:20
Sample (adjusted): 1948Q3 2012Q4
Included observations: 258 after adjustments

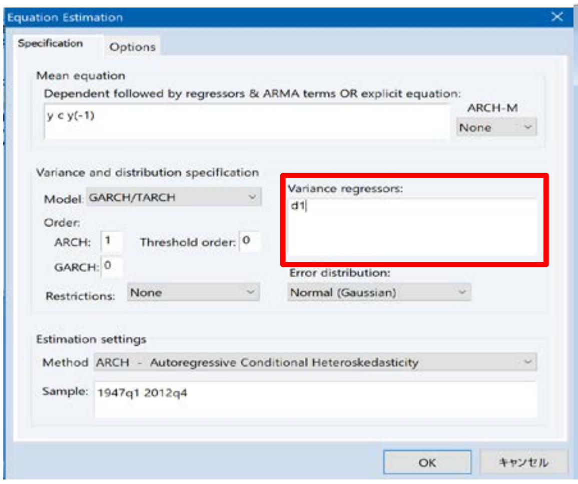
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.56E-05	1.34E-05	4.144685	0.0000
RESID^2(-1)	0.116424	0.062393	1.865978	0.0632
RESID^2(-2)	0.127371	0.062801	2.028160	0.0436
RESID^2(-3)	-0.029130	0.062809	-0.463786	0.6432
RESID^2(-4)	0.122585	0.062420	1.963888	0.0506

R-squared	0.052083	Mean dependent var	8.40E-05
Adjusted R-squared	0.037096	S.D. dependent var	0.000165
S.E. of regression	0.000162	Akaike info criterion	-14.60003
Sum squared resid	6.63E-06	Schwarz criterion	-14.53117
Log likelihood	1888.403	Hannan-Quinn criter.	-14.57234
F-statistic	3.475271	Durbin-Watson stat	1.995447
Prob(F-statistic)	0.008741		

1984 年以降のボラティィリティ低下を確かめるため、ダミー変数 d1 を導入してみる（1984Q1 以降は d1 =1、それ以前は d1 =0 とする）。

```
genr d1=@date>@dateval("1983Q4")
```

分散式に、ARCH(1)効果と *d1* を含めて回帰する。Equation Window ウィンドウの Variance regressors に *d1* と入力すると分散式にダミー変数を説明変数として追加できる。左下画面が推定のための入力であり、右下画面が推定結果となる。d1 の係数はマイナスで有意であることから、1984Q4 以降にボラティリティが恒常的に大きく減少したことが分かる。具体的には、1984Q4 以前は、分散式の定数項が 0.000110 であったのが、1984Q4 以降は 0.0000225(=0.000110-0.000085)に大きく低下している。



Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 11/06/17 Time: 11:24
Sample (adjusted): 1947Q3 2012Q4
Included observations: 262 after adjustments
Convergence achieved after 17 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*D1

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.004486	0.000687	6.529635	0.0000
Y(-1)	0.398080	0.075089	5.301462	0.0000
Variance Equation				
C	0.000110	1.44E-05	7.606642	0.0000
RESID(-1)^2	0.182515	0.057869	3.153948	0.0016
D1	-8.75E-05	1.47E-05	-5.971567	0.0000

R-squared	0.136263	Mean dependent var	0.007803
Adjusted R-squared	0.132941	S.D. dependent var	0.009859
S.E. of regression	0.009181	Akaike info criterion	-6.777605
Sum squared resid	0.021914	Schwarz criterion	-6.709507
Log likelihood	892.8662	Hannan-Quinn criter.	-6.750235
Durbin-Watson stat	2.125239		

(b)金融危機を表すダミー変数を d2 とする。これは 2007Q3 まで 0、それ以降は 1 となるダミー変数である。

```
genr d2=@date>@dateval("2007Q3")
```

下画面はd2を新たに分散式に加えた場合の推定結果である。これをみると、d2の係数はプラスであるが有意となっていない。金融危機がボラティリティを増加させた効果は一時的であることが分かる。これに対して、d1の係数はマイナスで有意であることから、1984Q4以降にボラティリティが恒常的に減少したことが分かる。

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Sample (adjusted): 1947Q3 2012Q4
Included observations: 262 after adjustments
Convergence achieved after 25 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*D1 + C(6)*D2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.004748	0.000691	6.867483	0.0000
Y(-1)	0.382808	0.073565	5.203672	0.0000
Variance Equation				
C	0.000110	1.47E-05	7.488746	0.0000
RESID(-1)^2	0.171308	0.067262	2.546882	0.0109
D1	-9.04E-05	1.48E-05	-6.094087	0.0000
D2	1.66E-05	1.11E-05	1.492060	0.1357

R-squared	0.137292	Mean dependent var	0.007803
Adjusted R-squared	0.133974	S.D. dependent var	0.009859
S.E. of regression	0.009175	Akaike info criterion	-6.779070
Sum squared resid	0.021888	Schwarz criterion	-6.697352

(c)実質消費rconsと実質投資roinvの変化率を、それぞれy2、y3と定義する。

```
genr y2=log(rcons/rcons(-1))
genr y3=log(rinv/rinv(-1))
```

これらの分散式に d1 を加えて推定した結果は以下となる（左下が y2、右下が y3）。

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: Y2
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 01/31/18 Time: 03:25
Sample (adjusted): 1947Q3 2012Q4
Included observations: 262 after adjustments
Convergence achieved after 16 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*D1

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.005632	0.000709	7.948931	0.0000
Y2(-1)	0.318543	0.077251	4.123493	0.0000
Variance Equation				
C	6.72E-05	7.07E-06	9.504803	0.0000
RESID(-1)^2	0.287593	0.089302	3.220460	0.0013
D1	-4.83E-05	7.07E-06	-6.835540	0.0000

R-squared	-0.040334	Mean dependent var	0.008128
Adjusted R-squared	-0.044335	S.D. dependent var	0.008381
S.E. of regression	0.008565	Akaike info criterion	-7.031994
Sum squared resid	0.019074	Schwarz criterion	-6.963896
Log likelihood	926.1912	Hannan-Quinn criter.	-7.004624
Durbin-Watson stat	2.600954		

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled¥
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: Y3
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 01/31/18 Time: 03:28
Sample (adjusted): 1947Q3 2012Q4
Included observations: 262 after adjustments
Convergence achieved after 14 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*D1

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.008596	0.002560	3.358351	0.0008
Y3(-1)	0.219678	0.072303	3.038286	0.0024
Variance Equation				
C	0.003330	0.000370	8.989445	0.0000
RESID(-1)^2	0.230791	0.079180	2.914753	0.0036
D1	-0.002550	0.000378	-6.747458	0.0000

R-squared	0.046852	Mean dependent var	0.009179
Adjusted R-squared	0.043186	S.D. dependent var	0.053728
S.E. of regression	0.052555	Akaike info criterion	-3.254368
Sum squared resid	0.718132	Schwarz criterion	-3.186270
Log likelihood	431.3222	Hannan-Quinn criter.	-3.226998
Durbin-Watson stat	2.040628		

これらをみると、d1 の係数は有意に負であり、1984Q4 以降にボラティリティが恒常的に減少したことが分かる。たとえば、実質消費をみると、分散式の定数項は 0.0000672 から 0.0000189(=0.0000672-0.0000483)に大きく低下している。

[10] EViews の 3 章の解説では、NYSE.XLS を用いて推定を行っている。そちらを確認してもらいたい。