2019/12/02

新谷元嗣、藪友良

第 1 章の解答

[1]　貨幣供給量M_tは

$$M_t = M + \rho M_{t-1} + \varepsilon_t$$

より決定される。ただし、Mは定数であり、$0 < \rho < 1$となる。

(a) 反復法を用いて解を導出する。$t+2$期の貨幣供給量は、

$$M_{t+2} = M + \rho M_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$$

となる。これに$t+1$期の貨幣供給量$M_{t+1} = M + \rho M_t + \varepsilon_{t+1}$を代入すると

$$M_{t+2} = M + \rho(M + \rho M_t + \varepsilon_{t+1}) + \varepsilon_{t+2}$$
$$= M(1+\rho) + \varepsilon_{t+2} + \rho\varepsilon_{t+1} + \rho^2 M_t$$

となる。同様に、$t+3$期の貨幣供給量は

$$M_{t+3} = M + \rho M_{t+2} + \varepsilon_{t+3}$$
$$= M + \rho[M(1+\rho) + \varepsilon_{t+2} + \rho\varepsilon_{t+1} + \rho^2 M_t] + \varepsilon_{t+3}$$
$$= M(1+\rho+\rho^2) + \varepsilon_{t+3} + \rho\varepsilon_{t+2} + \rho^2\varepsilon_{t+1} + \rho^3 M_t$$

と表せる。これを繰り返すことで、$t+\mathrm{n}$期の貨幣供給量は

$$M_{t+n} = M(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{n-1}) + \varepsilon_{t+n} + \rho\varepsilon_{t+n-1} + \cdots + \rho^{n-1}\varepsilon_{t+1} + \rho^n M_t$$

(b) 将来のショックの期待値は 0 であるため（$E[\varepsilon_{t+i}]=0$）、$t+\mathrm{n}$期の貨幣供給量の期待値は

$$\mathrm{E}[M_{t+n}] = M(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{n-1}) + \rho^n M_t$$

となる。ここで$0 < \rho < 1$であるため、nを大きくすると、$1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{n-1}$ は$1/(1-\rho)$に、$\rho^n M_t$は 0 に収束していく。したがって、将来のM_{t+n}の予測は、nを大きくすると$\mathrm{M}/(1-\rho)$に収束していく。

[2]　まずは最初の式である

$$\frac{1-a_1^t}{1-a_1} = 1 + a_1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{t-1}$$

が正しいことを確認しよう。上式の両辺を$1-a_1$で掛けると

$$1-a_1^t = (1 + a_1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{t-1})(1-a_1)$$
$$= (1 + a_1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{t-1}) - (a_1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{t-1} + a_1^t)$$

であり、上式が正しいことが確認できる。

次に、Σ記号を地道に展開してまとめれば

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} - a_1^t \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{-i} = \varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + a_1^{t-1}\varepsilon_1$$

を確認できる。Σ記号の展開では、

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} = \varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + a_1^{t-1}\varepsilon_{t-(t-1)} + a_1^t\varepsilon_{t-t} + a_1^{t+1}\varepsilon_{t-(t+1)} + \cdots$$

$$= \varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + a_1^{t-1}\varepsilon_1 + a_1^t\varepsilon_0 + a_1^{t+1}\varepsilon_{-1} + a_1^{t+2}\varepsilon_{-2} + \cdots$$

$$= \varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + a_1^{t-1}\varepsilon_1 + a_1^t(\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_{-1} + a_1^2\varepsilon_{-2} + a_1^3\varepsilon_{-3} + \ldots)$$

また

$$a_1^t \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{-i} = a_1^t(\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_{-1} + a_1^2\varepsilon_{-2} + a_1^3\varepsilon_{-3} + \ldots)$$

が成立することに注意してほしい。

[3]*　ここでは(A1.6)式である

$$\alpha_1^t = r^t[\cos(t\theta) + i\sin(t\theta)]$$

を帰納法より証明する。教科書で確認したとおり、$t=1$で上式が成立する（(A1.5)参照）

以下では、任意のtで成立していると仮定したうえで、$t+1$についても成立することを確認しよう。(A.1.3)を用いると、$\theta_1=\theta$、$\theta_2=t\theta$のとき、

$$\sin(\theta + t\theta) = \sin(\theta)\,cos(t\theta) + \cos(\theta)\sin(t\theta)$$

$$\cos(\theta + t\theta) = \cos(\theta)\,cos(t\theta) - \sin(\theta)\sin(t\theta)$$

となる。この結果を用いると、特性根の$t+1$乗は

$$\begin{aligned}\alpha_1^{t+1} &= \alpha_1\alpha_1^t \\ &= r^{t+1}[\cos(\theta) + i\sin(\theta)][\cos(t\theta) + i\sin(t\theta)] \\ &= r^{t+1}\{[\cos(\theta)\cos(t\theta) - \sin(\theta)\sin(t\theta)] + i[\sin(\theta)\cos(t\theta) + \cos(\theta)\sin(t\theta)]\} \\ &= r^{t+1}\{\cos(\theta + t\theta) + i\sin(\theta + t\theta)\} \\ &= r^{t+1}\{\cos((t+1)\theta) + i\sin((t+1)\theta)\}\end{aligned}$$

となる（式展開では(A1.5)が成立することに注意）。

教科書で確認したとおり、$t=1$のケースで、この式が成立する。また、$t=1$で成立したら$t=2$で成立する。同様に、$t=2$で成立したら$t=3$でも成立する。これを繰り返すことで、任意のtについて(A1.6)式は成立することを確認できる。

[4]* 2 つの特性根は

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{a_1 \pm \sqrt{d}}{2}$$

となり、判別式は$d = a_1^2 + 4a_2$と定義される。以下では、各ケースについて、安定性を調べる。また、図 1 は、エクセルを用いてインパルス応答関数を描いている。

ケース① $y_t = 0.75y_{t-1} - 0.125y_{t-2}$

判別式$d = (0.75)^2 - 4 \times 0.125 = 0.0625$（$\sqrt{d} = 0.25$）となる。特性根は

$$\alpha_1 = \frac{0.75 + 0.25}{2} = 0.5、\alpha_2 = \frac{0.75 - 0.25}{2} = 0.25$$

であり、異なる実数となる。両方の根は正で 1 より小さいため単調に減衰していく。

ケース② $y_t = 1.5y_{t-1} - 0.75y_{t-2}$

判別式$d = (1.5)^2 - 4 \times 0.75 = -0.75$（$\sqrt{d} = 0.866i$）となる。特性根は

$$\alpha_1 = \frac{1.5 + 0.866i}{2}、\alpha_2 = \frac{1.5 - 0.866i}{2}$$

であり、複素数となる。ただし、$|a_2| < 1$であるため、波を描きながらも収束していく。

ケース ③ $y_t = 1.8y_{t-1} - 0.81y_{t-2}$

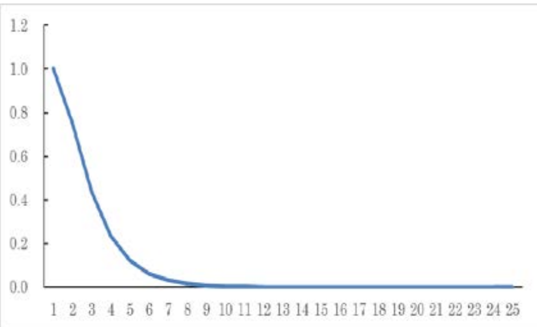
判別式$d = (1.8)^2 - 4 \times 0.81 = 0$となる。特性根は(1.8+0)/2=0.9 であり、重根となる。ここで$|a_1| < 2$であるから、徐々に収束していく。

ケース④ $y_t = 2.5y_{t-1} - 0.5625y_{t-2}$

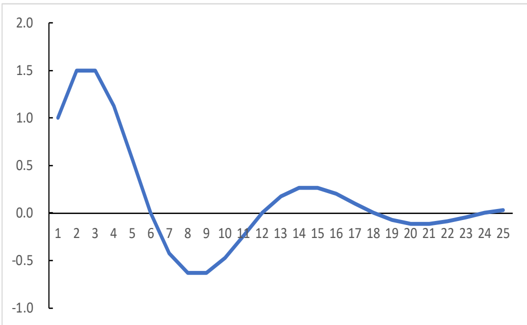
ここで$|a_1 + a_2| > 1$であるから、y_tは発散していく。

図 1：インパルス応答関数

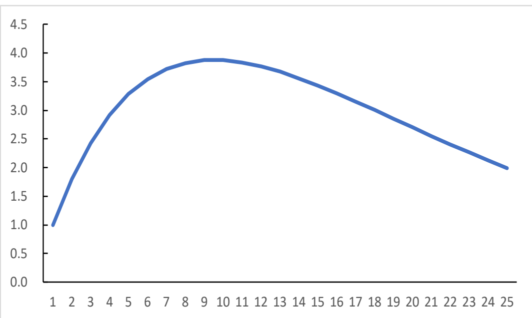
① $y_t = 0.75y_{t-1} - 0.125y_{t-2}$



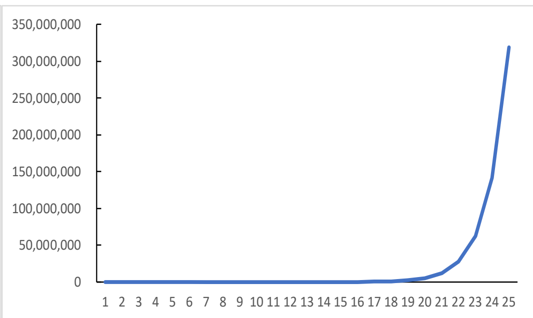
② $y_t = 1.5y_{t-1} - 0.75y_{t-2}$



③ $y_t = 1.8y_{t-1} - 0.81y_{t-2}$



④ $y_t = 2.5y_{t-1} - 0.5625y_{t-2}$



注）インパルス応答関数は、練習問題[8]の(c)をみてもらうと計算方法が理解できるだろう。

[5] インフレ率 π_t には

$$\pi_t = -0.05 + 0.7\pi_{t-1} + 0.6\pi_{t-2} + \varepsilon_t$$

という関係がある。

(a)同次方程式は$\pi_t - 0.7\pi_{t-1} - 0.6\pi_{t-2} = 0$である。これに試行解$\pi_t = A\alpha^t$を代入すると

$$A\alpha^t - 0.7A\alpha^{t-1} - 0.6A\alpha^{t-2} = 0$$

となる。両辺を$A\alpha^{t-2}$で割ると、特性方程式

$$\alpha^2 - 0.7A\alpha - 0.6 = 0$$

が得られる。したがって、特性根は$\alpha_1 = 1.2$、$\alpha_2 = -0.5$となり、同次解は

$$\pi_t = A_1(1.2)^t + A_2(-0.5)^t$$

となる。特性根α_1は絶対値で 1 を超えるため、インフレ率は発散していくことになる。また、α_2は負であるため、振幅が生じることになる。

(b)未定係数法を用いて、特殊解を求めてみよう。試行解を $\pi_t = b + \Sigma b_i\varepsilon_{t-i}$ としよう。これが解であるためには、試行解は、差分方程式$\pi_t = -0.05 + 0.7\pi_{t-1} + 0.6\pi_{t-2} + \varepsilon_t$を常に満たさなければならない。これは差分方程式に試行解を代入した式が常に成立していることを意味する。

$$(b + b_0\varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \cdots) = -0.05 + 0.7(b + b_0\varepsilon_{t-1} + b_1\varepsilon_{t-2} + b_2\varepsilon_{t-3} + \cdots)$$
$$+0.6(b + b_0\varepsilon_{t-2} + b_1\varepsilon_{t-3} + b_2\varepsilon_{t-4} + \cdots) + \varepsilon_t$$

両辺を一致させるためには、

$$\begin{aligned}
&b = -0.05 + 0.7b + 0.6b && \Rightarrow\ b = 0.05/0.3 = 1/6 \\
&b_0 = 1 && \Rightarrow\ b_0 = 1 \\
&b_1 = 0.7b_0 && \Rightarrow\ b_1 = 0.7b_0 = 0.7 \\
&b_2 = 0.7b_1 + 0.6b_0 && \Rightarrow\ b_3 = 0.7 \times 0.7 + 0.6 \times 1 = 1.09 \\
&\quad\cdots
\end{aligned}$$

を満たす必要がある。ここで、$2 \geq i$の範囲で、b_i は 2 次の差分方程式

$$b_i = 0.7b_{i-1} + 0.6b_{i-2}$$

となる。係数の和は 1 を超えるため、b_iは発散系列である。たとえば、b_3 =1.183、b_4 = 1.4821、b_5 = 1.74727、b_6 = 2.11235、b_7 = 2.527007 となる。

(c)一般解は、特殊解と同次解の和として表現できる。

$$\pi_t = \frac{1}{6} + \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1} + 1.09\varepsilon_{t-2} + \cdots + A_1(1.2)^t + A_2(-0.5)^t$$

となる。初期条件($\pi_0 = 0.1$、$\pi_1 = 0.11$)から

$$0.1=\frac{1}{6}+\varepsilon_0+0.7\varepsilon_{-1}+\cdots+A_1+A_2、0.11=\frac{1}{6}+\varepsilon_1+0.7\varepsilon_0+\cdots+A_1(1.2)+A_2(-0.5)$$

が成立する。この連立方程式を解くことで、未定の定数A_1、A_2を特定できる。

[6] **(a)** 同次方程式$y_t-a_2y_{t-2}=0$に、試行解$y_t=A\alpha^t$を代入すると、

$$A\alpha^t-a_2A\alpha^{t-2}=0$$

となる。これを解くと$\alpha^2=a_2$となる。したがって、特性根は$\alpha_1=\sqrt{a_2}$、$\alpha_2=-\sqrt{a_2}$であり、安定条件は、$|a_2|<1$となる。

(b) 未定係数法で特殊解を求めよう。試行解を $y_t=b+\Sigma b_i\varepsilon_{t-i}$ としよう。これが解であるためには、

$$(b+b_0\varepsilon_t+b_1\varepsilon_{t-1}+b_2\varepsilon_{t-2}+\cdots)=a_0+a_2(b+b_0\varepsilon_{t-2}+b_1\varepsilon_{t-3}+b_2\varepsilon_{t-4}+\cdots)+\varepsilon_t$$

が成立しなければならない。両辺を一致させるには、係数は以下を満たす必要がある。

$b=a_0+a_2b$ $\Rightarrow$ $b=a_0/(1-a_2)$

$b_0=1$ $\Rightarrow$ $b_0=1$

$b_1=0$ $\Rightarrow$ $b_1=0$

$b_2=a_2b_0$ $\Rightarrow$ $b_2=a_2$

$b_3=a_2b_1$ $\Rightarrow$ $b_3=0$

$b_4=a_2b_2$ $\Rightarrow$ $b_4=a_2^2$

$\cdots$

まとめると、定数項は$b=a_0/(1-a_2)$となり、係数b_iは、jが偶数なら$b_j=a_2^{j/2}$、jが奇数なら$b_j=0$となる。

[7] 解を元の差分方程式に代入することで、正しい解であることを確認すればよい。

① $y_t=c$、$y_{t-1}=c$であるから、$y_t-y_{t-1}=\mathrm{c}-\mathrm{c}=0$となる。

② $y_{t-1}=c+a_0(t-1)$であるから、$y_t-y_{t-1}=(c+a_0t)-\big(c+a_0(t-1)\big)=a_0$

③ $y_{t-2}=c+c_0(-1)^{t-2}$であるから、$y_t-y_{t-2}=(c+c_0(-1)^t)-(c+c_0(-1)^{t-2})$となる。ここで、$(-1)^t=(-1)^{t-2}$から、$y_t-y_{t-2}=0$と確認できる。

④ ここで、$(-1)^t=(-1)^{t-2}$から、

$$y_t-y_{t-2}=(c+c_0(-1)^t+\varepsilon_t+\varepsilon_{t-2}+\cdots)-(c+c_0(-1)^{t-2}+\varepsilon_{t-2}+\varepsilon_{t-4}+\cdots)=\varepsilon_t$$

となることを確認できる。

[8] (a) 同次方程式$y_t-0.8y_{t-1}=0$の解を求めよう。試行解$y_t=A(0.8)^t$を同次方程式に代入すると、

$$A(0.8)^t-0.8A(0.8)^{t-1}=0$$

となり、この試行解が正しいことを確認できる。

未定係数法を用いても特殊解を導出できるが、ここではラグオペレータLを用いて、特殊

解を導出する。

$$y_t=\frac{\varepsilon_t-0.5\varepsilon_{t-1}}{1-0.8L}$$
$$=(\varepsilon_t+0.8\varepsilon_{t-1}+(0.8)^2\varepsilon_{t-2}+\cdots)-0.5(\varepsilon_{t-1}+0.8\varepsilon_{t-2}+(0.8)^2\varepsilon_{t-3}+\cdots)$$
$$=\varepsilon_t+0.3\varepsilon_{t-1}+0.8(0.3)\varepsilon_{t-2}+(0.8)^2(0.3)\varepsilon_{t-3}+\cdots$$
$$=\varepsilon_t+0.3(\varepsilon_{t-1}+0.8\varepsilon_{t-2}+(0.8)^2\varepsilon_{t-3}+\cdots)$$

(b) 一般解は、同次解と特殊解の和である。

$$y_t=\varepsilon_t+0.3(\varepsilon_{t-1}+0.8\varepsilon_{t-2}+(0.8)^2\varepsilon_{t-3}+\cdots)+\ A(0.8)^t$$

初期条件$y_0=0$を用いて、任意の定数Aを特定しよう。

0 期において（$y_0=0$に注意すると）

$$0=\varepsilon_0+0.3[\varepsilon_{-1}+0.8\varepsilon_{-2}+(0.8)^2\varepsilon_{-3}+\cdots]+\ A$$

となり、これを A について解くと

$$A=-\varepsilon_0-0.3[\varepsilon_{-1}+0.8\varepsilon_{-2}+(0.8)^2\varepsilon_{-3}+\cdots]$$

となる。これを一般解に代入すると、

$$y_t=\varepsilon_t+0.3[\varepsilon_{t-1}+0.8\varepsilon_{t-2}+\cdots+(0.8)^{t-1}\varepsilon_0+(0.8)^t\varepsilon_{-1}+(0.8)^{t+1}\varepsilon_{-2}+\cdots]$$
$$-(0.8)^t\varepsilon_0-0.3[(0.8)^t\varepsilon_{-1}+(0.8)^{t+1}\varepsilon_{-2}+\cdots]$$
$$=\varepsilon_t+0.3[\varepsilon_{t-1}+0.8\varepsilon_{t-2}+(0.8)^2\varepsilon_{t-3}+\ldots+(0.8)^{t-2}\varepsilon_1]$$

となる（$\varepsilon_0=0$に注意）。

(c) ここで

$$y_t=0.8y_{t-1}+\varepsilon_t-0.5\varepsilon_{t-1}$$

となる。初期条件を$y_0=0$、$\varepsilon_0=\varepsilon_{-1}=0$とする。また、1 期以降のショックもすべて 0 とする($\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=0$)。このとき、前向きに反復することで、インパルス応答関数

$$y_1=0.8y_0+\varepsilon_1-0.5\varepsilon_0=0.8\times0+1-0.5\times0=1$$
$$y_2=0.8y_1+\varepsilon_2-0.5\varepsilon_1=0.8\times1+0-0.5\times1=0.3$$
$$y_3=0.8y_2+\varepsilon_3-0.5\varepsilon_2=0.8\times0.3+0-0.5\times0=0.24$$
$$y_4=0.8y_3+\varepsilon_4-0.5\varepsilon_3=0.8\times0.24+0-0.5\times0=0.192$$
$$y_5=0.8y_4+\varepsilon_5-0.5\varepsilon_4=0.8\times0.192+0-0.5\times0=0.1536$$

を得る。ショックの影響は、時間が経過するにつれて消えていることが分かる。

[9]* 帰納法を用いて証明しよう。1 次の差分方程式では、(1.49)式から、(1.54)式が成立することを確認できる。

以下では、*n* 次の差分方程式において、(1.54)式が成立するとしたうえで、*n*+1 次の差分方程式でも(1.54)式が成立することを示す。$A(L)=1-a_1L-a_2L^2-\cdots-a_{n+1}L^{n+1}$は、

$$1-a_1L-a_2L^2-\cdots-a_{n+1}L^{n+1}=(1-b_{n+1}L)(1-b_1L-b_2L^2-\cdots-b_nL^n)$$

と分解できる[1]。ここで$B(L)=1-b_1L-b_2L^2-\cdots-b_nL^n$と定義すると、

$$A(L)=(1-b_{n+1}L)\,B(L)$$

と表せる。$B(L)$は n 次の差分方程式のラグ多項式であるため、n 次の差分方程式において(1.54)式が成立するとした仮定によって、

$$\frac{a_0}{B(L)}=\frac{a_0}{B(1)}$$

となる。この結果を用いることで、

$$\frac{a_0}{A(L)}=\frac{a_0}{(1-b_{n+1}L)B(L)}=\frac{1}{(1-b_{n+1}L)}\left(\frac{a_0}{B(L)}\right)=\frac{1}{(1-b_{n+1}L)}\left(\frac{a_0}{B(1)}\right)$$

と展開できる。ここで $a_0/B(1)$は定数であるから、$a_0^*=a_0/B(1)$と定義することで、上式は(1.49)式から、

$$\frac{a_0*}{(1-b_{n+1}L)}=\frac{a_0*}{(1-b_{n+1})}$$

と表せる。以上をまとめると、

$$\frac{a_0}{A(L)}=\frac{a_0}{A(1)}$$

が証明される。

[1] $(1-b_{n+1}L)(1-b_1L-b_2L^2-\cdots-b_nL^n)$を展開すると以下となる。

$$1-(b_1+b_{n+1})L-(b_2-b_{n+1}b_1)L^2-(b_3-b_{n+1}b_2)L^3-\cdots-(b_n-b_{n+1}b_{n-1})L^n-(-b_nb_{n+1})L^{n+1}$$

このため、b_1、b_2、…、b_{n+1}は、$a_1=b_1+b_{n+1}$、$a_2=b_2-b_{n+1}b_1$、…、$a_{n+1}=-b_nb_{n+1}$を満たすよう決定される。