

5 章：多変量時系列モデル

教科書 5 章 10 節の実証分析（実質為替レートと名目為替レート）を再現することで、VAR モデルの推定方法について学んでいこう。

1. データの読み込みと単位根検定

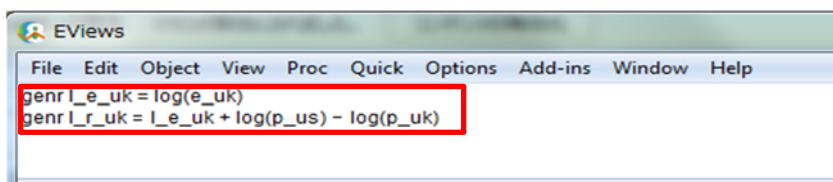
データとしてホームページの EXRATES.XLS を用いる。エクセルファイルを開くと、1973 年 Q1 から 2008 年 Q2 までの四半期データであることを確認できる。計 7 系列あり、それぞれ 3 カ国の対ドル為替レート（カナダ e_{can} 、日本 e_{ja} 、イギリス e_{uk} ）、4 カ国の卸売物価指数（カナダ p_{ca} 、日本 p_{ja} 、イギリス p_{uk} 、アメリカ p_{us} ）に該当する。たとえば、 e_{uk} はポンド/ドル名目為替レート、 p_{uk} はイギリスの物価、 p_{us} はアメリカの物価である。

まずは、Workfile を新規作成し、データを読み込む。本章では、イギリスのデータを分析する。データからポンド/ドル名目為替レート（対数表示）と実質為替レート（対数表示）の系列を作成し、各系列に l_e_{uk} と l_r_{uk} と名付けよう。これはコマンドウィンドウに、

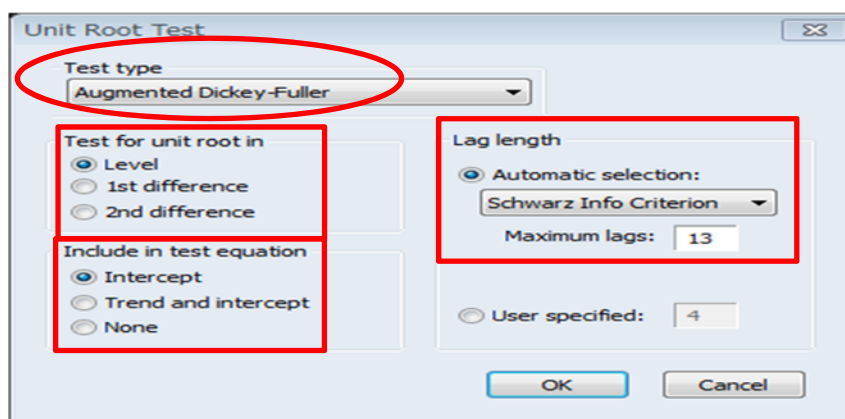
$$\text{genr } l_e_{uk} = \log(e_{uk})$$

$$\text{genr } l_r_{uk} = l_e_{uk} + \log(p_{us}) - \log(p_{uk})$$

と入力すればよい（実質為替レートの定義は教科書を参照されたい）。



第 1 段階として、英国・米国間実質為替レートと名目為替レートの単位根検定を行う。まず名目為替レートの分析をしよう。4 章で学んだ通り、ADF 検定を行うには、Workfile ウィンドウから系列 l_e_{uk} をダブルクリックして、Series ウィンドウを表示し、「View」→「Unit Root Test...」を選択する。すると Unit Root Test ウィンドウが表示される。



Test type (検定の種類) では Augmented Dickey-Fuller (ADF 検定) を、Test for unit root in で level を選択しよう。ラグの次数の選択 (Lag length) では Akaike Info Criterion か Schwarz Info Criterion を選ぶ。ここでは Schwarz Info Criterion を選んで OK をすると、以下の画面が表示される。

Null Hypothesis: L_E_UK has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=13)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.825045	0.0573
Test critical values: 1% level	-3.477487	
5% level	-2.882127	
10% level	-2.577827	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(L_E_UK)
 Method: Least Squares
 Date: 11/22/17 Time: 13:33
 Sample (adjusted): 1973Q3 2008Q2
 Included observations: 140 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
L_E_UK(-1)	-0.067729	0.023975	-2.825045	0.0054
D(L_E_UK(-1))	0.237693	0.081379	2.920823	0.0041
C	-0.035709	0.013654	-2.615266	0.0099

上画面をみると、教科書とほぼ同じ結果が得られていることが分かる。たとえば、 Δl_{e_uk} の次数として1が選ばれている(AICを用いても同じ次数が選ばれる)。また、1期前の l_{e_uk} の係数は-0.067729であり、そのt値は-2.82505となる。したがって、単位根仮説は棄却できず、名目為替レートは $I(1)$ であると確認できる。同様に、名目為替レート l_{r_uk} についても分析すると、BICとAICは1次のラグを選択し、単位根仮説は棄却できない。以上から、両系列 (l_{e_uk} と l_{r_uk}) とも $I(1)$ 過程であるといえる。興味のある読者は、DF-GLS 検定をしても同様の結果が得られることを確認してもらいたい。

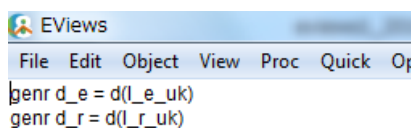
2. VAR モデルの推定

l_{e_uk} と l_{r_uk} がどちらも $I(1)$ 過程であると分かったので、階差系列を用いて VAR モデルを推定しよう。まず、階差系列を作るには、階差をとる関数 $d(X)$ を用いて、コマンドウインドウに

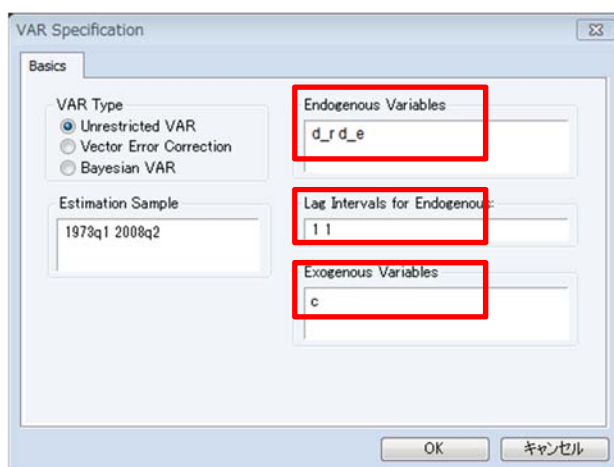
```
genr d_e = d(l_e_uk)
```

```
genr d_r = d(l_r_uk)
```

と入力すればよい(下画面参照)。ここで Δl_{e_uk} は d_e 、 Δl_{r_uk} は d_r と名付けた。



次に、1次のVARモデルを推定する。メインメニューから「Quick」→「Estimate VAR」を選択すると、以下の画面が表示される。

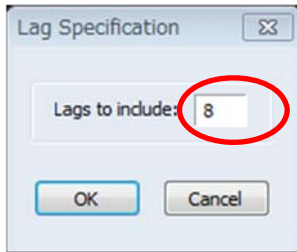


ここで Endogenous Variables には分析に用いる系列として、d_r と d_e を入力する。そして、Lag Intervals for Endogenous には、ラグ次数の最初と最後の値を入力する。この場合、1次のラグのみを用いるので 1 1 とした。もし1次から5次までのラグを用いるなら 1 5 と入力すればよい。そして、定数項を含めるので、Exogenous Variables には c とだけ入力する。最後に、OK ボタンを押すと、以下の Var Window が表示され、1次のVARモデルの推定結果が得られる。

	D_R	D_E
D_R(-1)	-0.200808 (0.19104) [-1.05113]	-0.259551 (0.17529) [-1.48072]
D_E(-1)	0.355421 (0.20455) [1.73753]	0.465030 (0.18769) [2.47768]
C	-0.002192 (0.00418) [-0.52417]	0.000647 (0.00384) [0.16847]
R-squared	0.030798	0.061579
Adj. R-squared	0.016649	0.047879
Sum sq. resids	0.329270	0.277208
S.E. equation	0.049025	0.044982
F-statistic	2.176706	4.494944

ここで被説明変数を実質為替レート d_r としたとき、1期前の d_r の係数は-0.200808となり、その標準誤差は 0.19104、t 値は-1.05113 となっている。同様に、被説明変数を名目為替レート d_e とすると、1期前の d_r の係数は-0.259551、その標準誤差は 0.17529、t 値は-1.48072 となる。また、各式ごとに、決定係数などの情報もみてとれる。

1次のラグでVARモデルを推定したが、ラグの次数の選択が本当に妥当であったかどうかを確認してみよう。Var Window から、「View」→「Lag Structure」→「Lag Length Criteria」を選択する。すると、以下の Lag Specification Window が表示される。



ここで最大の次数を選択して、OK ボタンを押す（ここで最大の次数は 8 としている）。そうすると、0 から 8 次までの VAR について、それぞれ尤度比(LR)、情報量基準として AIC、SBC(SC と表記)の値が計算される。ここで、*印は最適な次数を表している。

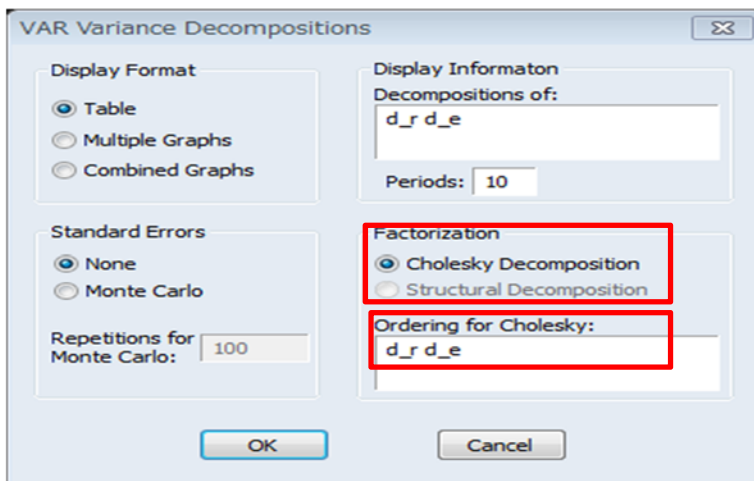
Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	603.9835	NA	4.01e-07	-9.052384	-9.008920	-9.034722
1	629.5757	50.02977	2.90e-07	-9.377078	-9.246686*	-9.324092*
2	631.1640	3.057265	3.01e-07	-9.340813	-9.123493	-9.252502
3	637.9773	12.90944	2.88e-07	-9.383118	-9.078871	-9.259484
4	639.4909	2.822235	3.00e-07	-9.345728	-8.954553	-9.186769
5	646.1084	12.14034*	2.88e-07*	-9.385088*	-8.906985	-9.190806
6	649.8900	6.823992	2.89e-07	-9.381804	-8.816774	-9.152198
7	653.7163	6.789598	2.90e-07	-9.379193	-8.727235	-9.114262
8	655.6169	3.315199	3.00e-07	-9.347622	-8.608736	-9.047367

尤度比検定 LR では、次数が 5 で最大となるため、次数は 5 が選択される。同様に、AIC では、次数が 5 で値が最小になるため、次数は 5 となる。しかし、SBC(SC)では 1 次のラグが選ばれる¹。ここでは、SBC の結果にしたがって、1 次の VAR として分析を進めよう。

3. コレスキー分解を用いた推定

次に、コレスキー分解を用いた分散分解の結果を求める。これを行うためには、Var Window において、「View」→「Variance Decomposition」を選択し、次のように入力する。

¹ AIC と SBC の値は教科書の値と異なるが、これは情報量基準として異なる定義を用いているからである（この問題は教科書 2 章を参照されたい）。



ここでは、コレスキー分解を用いるので、Factorization として Cholesky Decomposition を選択する。また、実質為替レートが名目為替レートに対して因果関係で先行しているような順序付けを行いたいので、Ordering for Cholesky に d_r d_e の順に入力した（名目為替レートが実質為替レートに対して因果関係で先行しているような順序付けを行いたければ、d_e d_r とすればよい）。OK ボタンを押せば、下記の結果が得られる。

Var: UNTITLED Workfile: EXRATES::Untitled\

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Stats Impulse Resids

Variance Decomposition

Variance Decomposition of D_R:

Period	S.E.	D_R	D_E
1	0.049025	<u>100.0000</u>	0.000000
2	0.049732	97.99762	2.002380
3	0.049783	97.86216	2.137839
4	0.049786	<u>97.85242</u>	2.147584
5	0.049787	97.85171	2.148286
6	0.049787	97.85166	2.148337
7	0.049787	97.85166	2.148340
8	0.049787	<u>97.85166</u>	2.148341
9	0.049787	97.85166	2.148341
10	0.049787	97.85166	2.148341

Variance Decomposition of D_E:

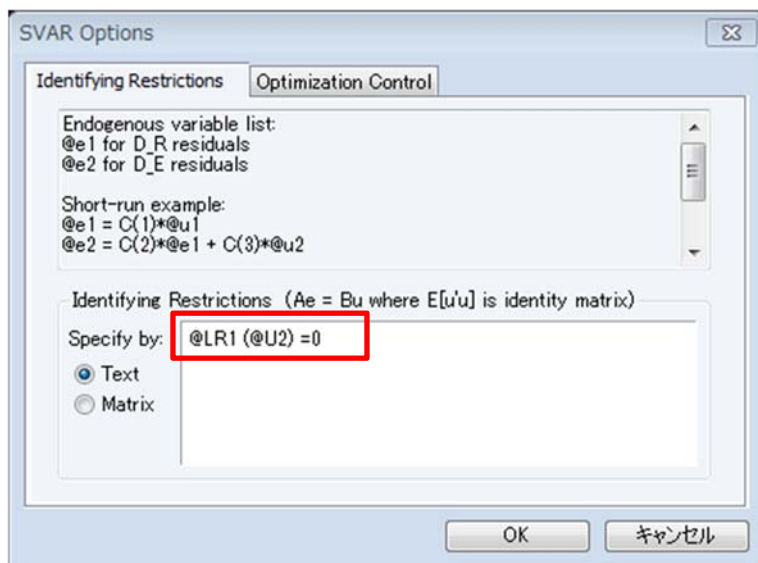
Period	S.E.	D_R	D_E
1	0.044982	<u>80.62442</u>	19.37558
2	0.046313	77.76910	22.23090
3	0.046407	77.57939	22.42061
4	0.046414	<u>77.56578</u>	22.43422
5	0.046415	77.56480	22.43520
6	0.046415	77.56473	22.43527
7	0.046415	77.56472	22.43528
8	0.046415	<u>77.56472</u>	22.43528
9	0.046415	77.56472	22.43528
10	0.046415	77.56472	22.43528

この 1, 4, 8 四半期の結果を見れば、教科書の結果と同じ結果が得られたことが確認できる。実質為替レートの予測誤差分散のほとんどが、その実質ショックで説明できること

が明白である。これに対し、名目為替レートの予測誤差分散のうち、名目ショックは約 20% を説明している。

4. ブランシャール・クア分解

ブランシャール＝クア分解を用いて、構造 VAR を推定してみよう。まず、教科書(5.76) 式の制約を明示しよう。そのためには、Var Window から「Proc」→「Estimate Structural Factorization」を選択し、次のように入力すればよい。



ここで@LR1(@U2)=0 は、2 番目の構造的誤差が 1 番目の変数に長期的に影響を与えないということを意味している。VAR モデルを推定するとき、Endogenous Variables として d_r d_e の順に入力したので、1 番目の変数は d_r、2 番目の変数は d_e となっている。したがって、@LR1(@U2)=0 は、名目ショックは実質為替レートに長期的影響を持たないといえる。ここで OK ボタンを押せば、下記の結果が得られる。

Model: Ae = Bu where E[uu]=I
Restriction Type: long-run text form
Long-run response pattern:

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0			
C(2)	C(3)			
C(1)	0.056065	0.003351	16.73320	0.0000
C(2)	0.053512	0.003768	14.20351	0.0000
C(3)	0.023568	0.001408	16.73320	0.0000

Log likelihood 573.9460

Estimated A matrix:

1.000000	0.000000
0.000000	1.000000

Estimated B matrix:

0.048304	-0.008376
0.043179	0.012608

教科書 5 章 10 節で説明した通り、実質為替レートの階差 Δr と名目レートの階差 Δe は、それぞれの構造ショック (ε_{rt} , ε_{nt}) を用いて、

$$\begin{bmatrix} \Delta r_t \\ \Delta e_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rt} \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}$$

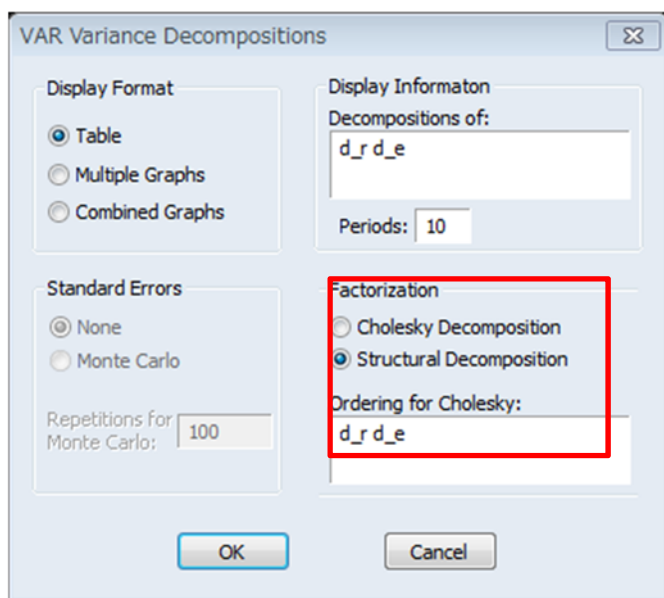
と書ける（実質ショックは ε_{rt} 、名目ショックは ε_{nt} ）。ショックの長期効果は、 $L=1$ でラグ多項式を評価することで求められる。たとえば、実質ショック ε_{rt} の実質為替レートへの長期効果は $C_{11}(1)$ である。推定結果をみると、 $C_{11}(1)=0.056$ 、 $C_{12}(1)=0$ 、 $C_{21}(1)=0.053$ 、 $C_{22}(1)=0.023$ となる。 $C_{12}(1)=0$ は、名目ショックは実質為替レートに長期的効果を持たないという制約を反映している。

また、実質為替レートの式の残差と構造ショックの関係を思い出してもらいたい。

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rt} \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}$$

推定結果をみると、これらの係数は、それぞれ $c_{11}(0)=0.048$ 、 $c_{12}(0)=-0.008$ 、 $c_{21}(0)=0.043$ 、 $c_{22}(0)=0.012$ となっている。

このモデルの分散分析を求めるには、Var Window を用いて、「View」→「Variance Decomposition」を選択し、Factorization の項目で Structural Decomposition を選択すればよい。



順序付けは依然と同様で実質為替レートが名目為替レートに対して因果関係で先行しているような順序付けを行っている。OK ボタンを押せば、教科書と同じ結果が得られる。

Variance Decomposition of D_R:			
Period	S.E.	Shock1	Shock2
1	0.049025	<u>97.08066</u>	2.919336
2	0.049732	95.62735	4.372653
3	0.049783	95.53043	4.469566
4	0.049786	<u>95.52346</u>	4.476540
5	0.049787	95.52296	4.477042
6	0.049787	95.52292	4.477078
7	0.049787	95.52292	4.477081
8	0.049787	<u>95.52292</u>	4.477081
9	0.049787	95.52292	4.477081
10	0.049787	95.52292	4.477081

Variance Decomposition of D_E:			
Period	S.E.	Shock1	Shock2
1	0.044982	<u>92.14394</u>	7.856060
2	0.046313	89.57726	10.42274
3	0.046407	89.40733	10.59267
4	0.046414	<u>89.39513</u>	10.60487
5	0.046415	89.39425	10.60575
6	0.046415	89.39419	10.60581
7	0.046415	89.39419	10.60581
8	0.046415	<u>89.39419</u>	10.60581
9	0.046415	89.39419	10.60581
10	0.046415	89.39419	10.60581

次に、この構造 VAR でのインパルス応答関数を見てみよう。インパルス応答関数を見るためには、Var Window を用いて、「View」→「Impulse Response」を選択する。そうすると、Impulse Responses Window が表示されるので、次のように入力すればよい。

Impulses には、ショックを与える変数を入力する。この場合、1 は d_r、2 は d_e を示している（最初に VAR モデルを推定するときと同じ順番になっている）。Responses には、ショックの影響を見たい変数を入力している。Periods は 10 としているが、これは 10 期分の影響をみることを表している。もし 20 期分の影響をみたいなら 20 とすればよい。ここでは、Display Format で Table を選ぶことで、結果を表 (Table) で表示するようにした。OK を押すと、以下の結果が得られる。

Var: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untit

View Proc Object Print Name Freeze Esti

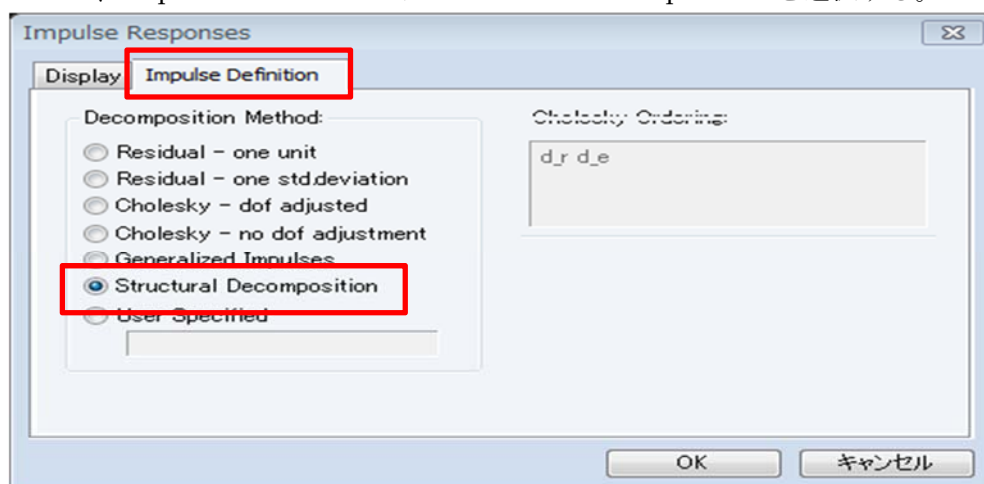
Impulse Respons

Response of D_R:		
Period	Shock1	Shock2
1	0.048304	-0.008376
2	0.005647	0.006163
3	0.001547	0.001619
4	0.000415	0.000435
5	0.000111	0.000117
6	2.99E-05	3.13E-05
7	8.03E-06	8.41E-06
8	2.16E-06	2.26E-06
9	5.79E-07	6.06E-07
10	1.55E-07	1.63E-07

Response of D_E:		
Period	Shock1	Shock2
1	0.043179	0.012608
2	0.007542	0.008037
3	0.002042	0.002138
4	0.000548	0.000574
5	0.000147	0.000154
6	3.95E-05	4.14E-05
7	1.06E-05	1.11E-05
8	2.85E-06	2.98E-06
9	7.64E-07	8.00E-07
10	2.05E-07	2.15E-07

ここで、上部分には、各ショックに反応して、どのように実質為替レート d_r が反応するかを示している。たとえば、shock 1 (d_r の構造ショック) が 1 単位 (構造ショックの 1 標準偏差) 変化すると、 d_r は 1 期に 0.048 となり、2 期には 0.005 となり、10 期には $1.55E-07$ となることを示している²。同様に、shock 2 (d_s の構造ショック) が 1 単位変化すると、 d_r は 1 期に -0.008376 になることが分かる。

結果をグラフで見たい場合には、Impulse Response Window の Display Format で Multiple Graphs を選択すればよい。また、構造 VAR モデルのインパルス応答関数を見たいので、Impulse Definition では Structural Decomposition を選択する。



ここで OK を押すと、以下の画面が表示される。この図をみることで、各ショックに反応して、どのように実質為替レートと名目為替レートが反応しているかをみることができる。これは先の表を図にしたものに該当する。綺麗な図を作るためには、表として結果を

² $1.55E-07$ とは、 1.55×10^{-7} を意味する。これは表記を簡潔にするために、よく行われるので覚えておくとよいだろう。

