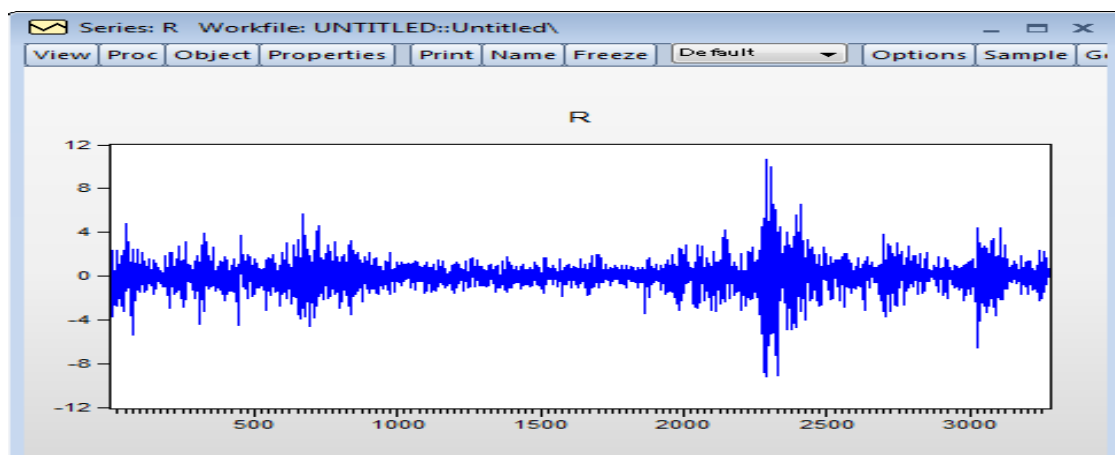


### 3 章：ボラティリティ

ここでは、条件付き不均一分散のモデルを紹介する。具体的には、ARCH、GARCH、IGARCH、EGARCH、TGARCH、多変量 GARCH モデルである。

#### 1. 分散不均一のモデル

標準的な回帰分析において、「分散は一定」と仮定される。しかし、実際のデータを見ると分散が一定でないことがある。ファイル NYSE.XLS では、2000 年 1 月 4 日～2012 年 7 月 16 日における NYSE 指数の日次収益率  $r$  が含まれる。下図は、日次収益率の動きを示す。これをみると、平穏な時期もあれば、激しく動く時期もあることが見て取れる。つまり、このデータを見る限り、分散一定の仮定は妥当ではないかもしれない。



#### 残差 2 乗のコレログラム

ここで AR(2) とし

$$\text{ls } r \text{ c } r(-1 \text{ to } -2)$$

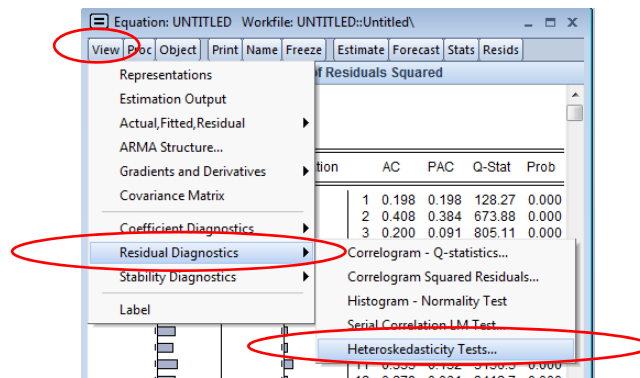
と入力すると推定結果が得られる。それらをまとめると

$$r_t = 0.0046 - 0.0946r_{t-1} - 0.0575r_{t-2}$$

(0.209)    (-5.416)    (-3.293)

となる（教科書は RATS で推定しており推定値は多少異なる）。また、残差(residuals)のコレログラムを確認すると、自己相関 AC と偏自己相関 PAC は 0 に近い値を取り、修正 Q 統計量も全て有意とはならない。つまり、残差はホワイトノイズである。

ここで、残差 2 乗(squared residuals)のコレログラムを確認しよう。Equation ウィンドウの「View」→「Residual Diagnostics」→「Correlogram Squared Residuals」を選択する。

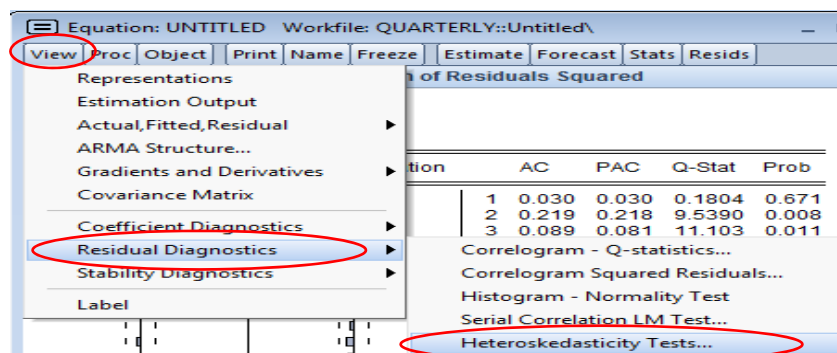


そうすると、以下の表が表示される。これを見ると、AC と PAC は大きな値をとり、修正 Q 統計量は有意となっている。つまり、残差 2 乗には系列相関がある。以下では、より厳密に LM 検定によって、調べてみよう。

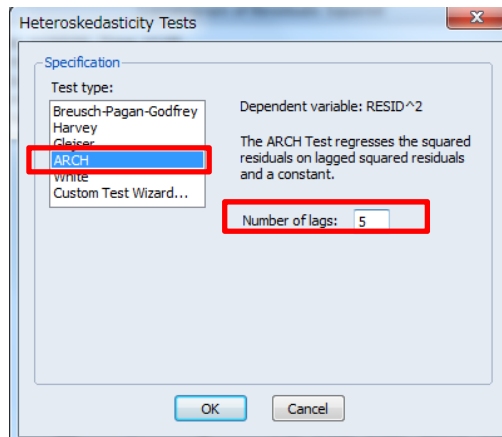
	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.198	0.198	128.27	0.000		
2	0.408	0.384	673.88	0.000		
3	0.200	0.091	805.11	0.000		
4	0.287	0.122	1074.5	0.000		
5	0.331	0.234	1434.2	0.000		
6	0.289	0.126	1708.8	0.000		
7	0.342	0.143	2091.9	0.000		
8	0.256	0.066	2307.6	0.000		
9	0.287	0.057	2577.3	0.000		
10	0.253	0.045	2788.1	0.000		
11	0.335	0.132	3156.5	0.000		
12	0.279	0.061	3412.7	0.000		
13	0.251	-0.021	3619.7	0.000		
14	0.155	-0.121	3699.0	0.000		
15	0.203	-0.037	3835.0	0.000		
16	0.236	0.042	4017.9	0.000		
17	0.252	0.038	4226.9	0.000		
18	0.248	0.021	4428.5	0.000		
19	0.177	-0.037	4531.9	0.000		
20	0.222	0.033	4694.2	0.000		

## LM 検定

マクラウド=リーの LM 検定を用いて、ARCH/GARCH 効果の存在を調べよう。Equation ウィンドウの「View」→「Residual Diagnostics」→「Heteroskedasticity Tests」を選択する。



Specification ボックスの Test type で ARCH を選択する。LM 検定は、残差 2 乗を、残差 2 乗のラグで回帰し、その係数が有意に 0 と異なるかを調べる。このため、Number of lags で何期分のラグを説明変数として含めるかを指定する。ここでは 5 としよう。



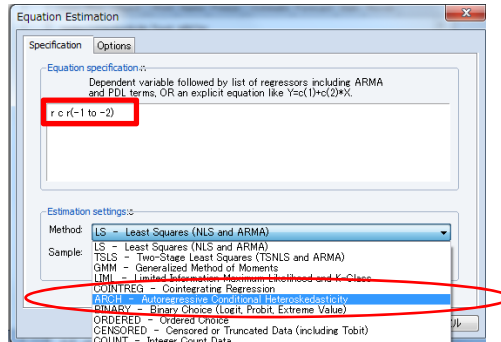
OK を押すと、検定結果が表示される。

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::untitled\									
View	Proc	Object	Print	Name	Freeze	Estimate	Forecast	Stats	Resids
Heteroskedasticity Test: ARCH									
F-statistic	209.9818	Prob. F(5,3257)	0.0000						
Obs*R-squared	795.4319	Prob. Chi-Square(5)	0.0000						
Test Equation:									
Dependent Variable: RESID^2									
Method: Least Squares									
Date: 11/10/16 Time: 11:07									
Sample (adjusted): 8 3270									
Included observations: 3263 after adjustments									
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.					
C	0.487352	0.086506	5.633749	0.0000					
RESID^2(-1)	0.047466	0.017036	2.786240	0.0054					
RESID^2(-2)	0.309012	0.016958	18.22222	0.0000					
RESID^2(-3)	0.003580	0.017801	0.201112	0.8406					
RESID^2(-4)	0.104148	0.016956	6.142279	0.0000					
RESID^2(-5)	0.233878	0.017034	13.73037	0.0000					
R-squared	0.243773	Mean dependent var	1.615212						
Adjusted R-squared	0.242612	S.D. dependent var	5.094026						
S.E. of regression	4.433230	Akaike info criterion	5.817971						
Sum squared resid	64011.55	Schwarz criterion	5.829170						

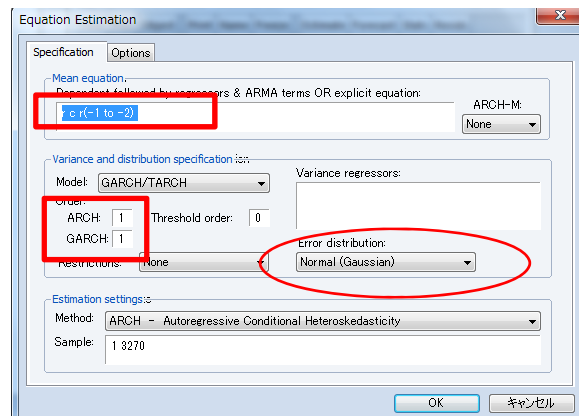
残差 2 乗のラグは、3 期前以外は有意に 0 と異なる。また、 $TR^2$  (Obs\*R-squared) は 795.432 と高い値となり、有意水準 1% で帰無仮説  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$  は棄却される（対応する p 値は 0.000）。小標本では、 $\chi^2$  検定ではなく、F 検定を行う方がよいため、帰無仮説  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$  とした F 値を求めると、209.982 と高い値となり、やはり有意水準 1% で帰無仮説は棄却される（対応する p 値は 0.000）。以上から、ARCH/GARCH 効果が存在するといえる。

### ARCH/GARCH モデルの推定

平均のモデルは AR(2) とし、誤差項は GARCH(1,1) としよう。「Quick」→「Estimate Equation」を選択して、Equation Estimation ウィンドウを表示する（下図）。そして平均の式を AR(2) としよう。そして、推定法 Method として、LS ではなく、ARCH-Autoregressive Conditional Heteroskedasticity を選ぶ。



推定法 Method を選択すると、ウィンドウが切り替わり、Specification の画面が表示される（下図）。平均の式（Mean equation）には、先ほど定義した AR(2)モデルが書かれている。分散の式（Variance and distribution specification）をみると、規定値として GARCH(1,1)が選択されている。もし ARCH(2)が推定したいなら、Order ボックスにおいて、ARCH の次数を 2 とし、GARCH の次数を 0 に変更すればよい。また Error distribution が Normal(正規分布)になっているが、これを t 分布に変更することも可能である。



そして、OK とすると、以下の推定結果が得られる。

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.043589	0.015510	2.810456	0.0049
R(-1)	-0.057988	0.020047	-2.892610	0.0038
R(-2)	-0.038039	0.018295	-2.079193	0.0376

平均の式

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.013753	0.001812	7.590604	0.0000
RESID(-1)^2	0.084006	0.006466	12.99157	0.0000
GARCH(-1)	0.906260	0.006882	131.6852	0.0000

分散の式

R-squared	0.008757	Mean dependent var	0.004093
Adjusted R-squared	0.008150	S.D. dependent var	1.278381
S.E. of regression	1.273161	Akaike info criterion	2.844324
Sum squared resid	5292.366	Schwarz criterion	2.855509
Log likelihood	-4641.626	Hannan-Quinn criter.	2.848330
Durbin-Watson stat	2.069276		

これをまとめると、以下となる。

$$s_t = 0.044 - 0.058s_{t-1} - 0.038s_{t-2}$$

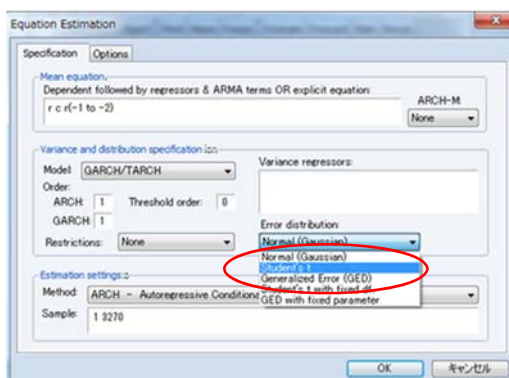
$$(2.81) \quad (-2.89) \quad (-2.08)$$

$$h_t = 0.014 + 0.084 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.906h_{t-1}$$

$$(7.59) \quad (12.99) \quad (131.67)$$

## t 分布

次に、Error distribution を Student's t(t 分布)に変更しよう。



そうすると、以下の結果が得られる。ここで t 分布の自由度は T-DIST.DOF であり、6.14 となっている。自由度は小さいため、誤差項の分布は正規分布ではなく t 分布の方が適当であるといえる。ただし、その他のパラメータの推定値は、正規分布を仮定しても、t 分布を仮定しても、あまり変化はない。以下では、t 分布を仮定して推定する。

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.060919	0.013990	4.354372	0.0000
R(-1)	-0.062357	0.019105	-3.263890	0.0011
R(-2)	-0.045252	0.017450	-2.593277	0.0095
Variance Equation				
C	0.009259	0.002827	3.275823	0.0011
RESID(-1)^2	0.088681	0.010589	8.374457	0.0000
GARCH(-1)	0.909323	0.009657	94.16403	0.0000
T-DIST. DOF	6.140989	0.717042	8.564341	0.0000
R-squared	0.008218	Mean dependent var	0.004093	
Adjusted R-squared	0.007611	S.D. dependent var	1.278381	
S.E. of regression	1.273507	Akaike info criterion	2.803757	
Sum squared resid	5295.244	Schwarz criterion	2.816806	
Log likelihood	-4574.338	Hannan-Quinn criter.	2.808430	
Durbin-Watson stat	2.058884			

平均の式

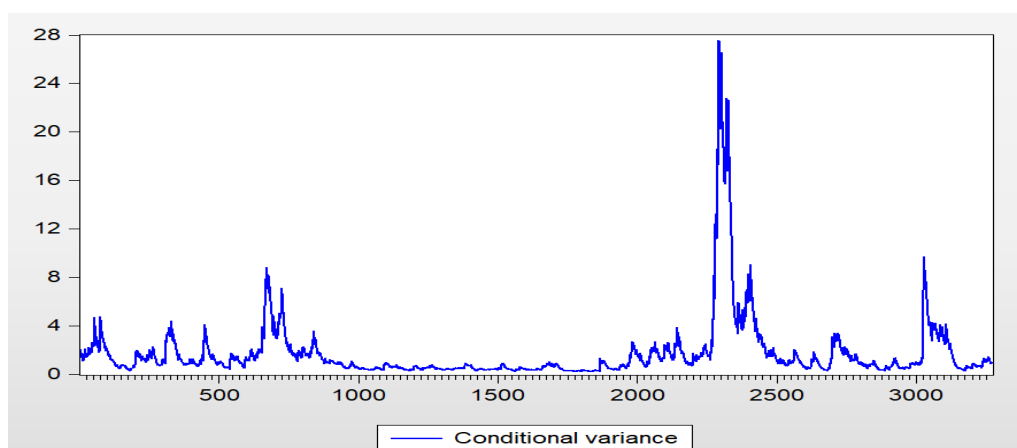
分散の式

最後に、IGARCH を推定するには、Variance and distribution specification にある Restriction を None から IGARCH に変更すればよい。EViews では、IGARCH を推定すると分散の式か

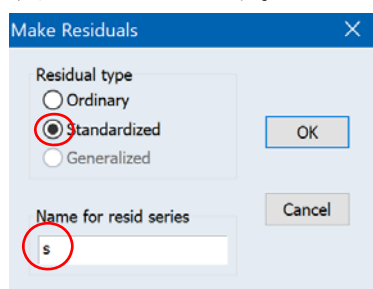
ら定数項が外される。また、定数項を外した影響からか、係数は上手く推定できなかったため、以下では IGARCH ではなく、 $t$  分布を仮定した GARCH モデルに基づいて分析を進める。以下では、GARCH を用いているため、教科書と推定結果が多少異なる。

## 診断テスト

条件付き分散、標準化残差の動きをみたいのであれば、Equation Window から View→Garch Graph→Conditional Variance とすると以下の図が出力される。教科書では  $h_t$  に該当する。



また、標準化残差を診断分析に使いたいなら、Equation Window において、Proc→Make Residual Series とし Standardized とすると標準化残差が新しい系列として作成される。Make Residual Window において Name for Resid ボックスで名前を決めることができる。ここでは教科書と同様に s と名前を付けておこう。



いくつかの診断テストをしてみよう。まず、 $s^2$  の系列を作成し、 $s^2$  という名前を付けておこう (`genr s2 = s^2`)。そして、 $s^2$  を、1 次と 2 次のラグで回帰すると以下となる。

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.998386	0.042272	23.61811	0.0000
S2(-1)	-0.045179	0.017494	-2.582587	0.0098
S2(-2)	0.032927	0.017496	1.881931	0.0599
R-squared	0.003265	Mean dependent var	0.986265	
Adjusted R-squared	0.002654	S.D. dependent var	1.951456	
S.E. of regression	1.948864	Akaike info criterion	4.173289	
Sum squared resid	12393.11	Schwarz criterion	4.178884	
Log likelihood	-6811.981	Hannan-Quinn criter.	4.175293	
F-statistic	5.344041	Durbin-Watson stat	1.999142	
Prob(F-statistic)	0.004818			

$s^2$  のラグは有意であるが、0 に近い値をとっている。

次に、s2 を、1 次と 2 次の s のラグで回帰してみよう。s のラグは、両方とも有意になっており、何らかの非対称性が存在すると考えられる。

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.969305	0.034106	28.42071	0.0000
S(-1)	-0.096157	0.034259	-2.806771	0.0050
S(-2)	-0.178760	0.034273	-5.215819	0.0000
R-squared	0.010657	Mean dependent var	0.986265	
Adjusted R-squared	0.010051	S.D. dependent var	1.951456	
S.E. of regression	1.941624	Akaike info criterion	4.165844	
Sum squared resid	12301.19	Schwarz criterion	4.171440	
Log likelihood	-6799.824	Hannan-Quinn criter.	4.167848	
F-statistic	17.57497	Durbin-Watson stat	2.138108	
Prob(F-statistic)	0.000000			

エンゲルらの符号バイアス検定をしてみよう。まずは、 $s < 0$  なら 1 となるダミー変数を作成する ( $\text{genr dummy} = s < 0$ )。そして、s2 を、1 から 3 次までの dummy のラグで回帰すると以下となる。やはり dummy の係数は有意となっており、非対称性の存在が疑われる。

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.620248	0.069683	8.900978	0.0000
DUMMY(-1)	0.292166	0.067962	4.298939	0.0000
DUMMY(-2)	0.281908	0.067964	4.147911	0.0000
DUMMY(-3)	0.140728	0.067961	2.070711	0.0385
R-squared	0.011917	Mean dependent var	0.986472	
Adjusted R-squared	0.011008	S.D. dependent var	1.951719	
S.E. of regression	1.940946	Akaike info criterion	4.165453	
Sum squared resid	12285.08	Schwarz criterion	4.172915	
Log likelihood	-6796.102	Hannan-Quinn criter.	4.168125	
F-statistic	13.11050	Durbin-Watson stat	2.127521	
Prob(F-statistic)	0.000000			

さらに一般化した推定を行ってみよう。これは

$$\text{ls s2 c dummy(-1) dummy(-1)*s(-1) (1-dummy(-1))*s(-1)}$$

と入力すればよい。

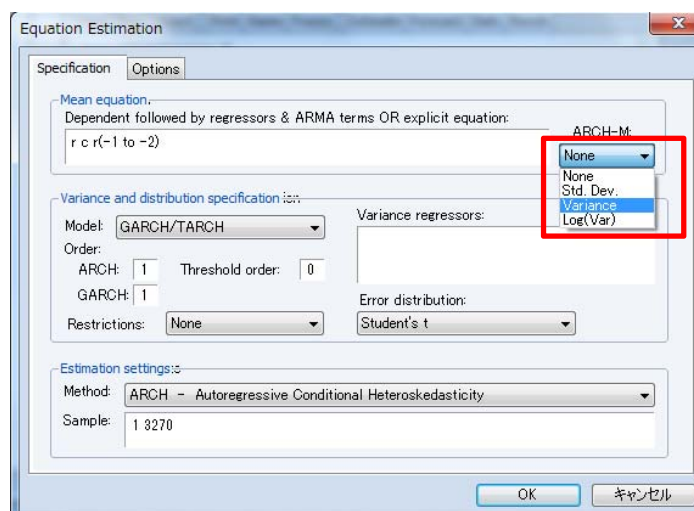
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.006964	0.077014	13.07508	0.0000
DUMMY(-1)	0.260663	0.103680	2.514108	0.0120
DUMMY(-1)*S(-1)	0.179254	0.064557	2.776695	0.0055
(1-DUMMY(-1))*S(-1)	-0.239446	0.085585	-2.797746	0.0052
R-squared	0.010123	Mean dependent var	0.986973	
Adjusted R-squared	0.009213	S.D. dependent var	1.951576	
S.E. of regression	1.942565	Akaike info criterion	4.167119	
Sum squared resid	12313.13	Schwarz criterion	4.174578	
Log likelihood	-6802.990	Hannan-Quinn criter.	4.169791	
F-statistic	11.12298	Durbin-Watson stat	1.999531	
Prob(F-statistic)	0.000000			

ここでも、これらの変数は有意となっており、非対称性が生じているのが分かる。また、 $\text{dummy}(-1)$ 、 $\text{dummy}(-1)*s(-1)$ 、 $(1-\text{dummy}(-1))*s(-1)$ の係数が全て0であるかを検定するには、F-statistic (定数項以外の係数が全て0という帰無仮説を検定する) をみればよい。これは

11.12298となっており、帰無仮説が棄却される<sup>1</sup>。

## ARCH-M

もし ARCH-M モデルを推定したいなら、Equation Estimation ウィンドウの右上にある ARCH-M ボックスで、None と設定されているのを、Variance に変更すればよい。こうすると、平均の式に、新たに  $h_t$  が説明変数として追加される。



そして OK をおすと以下の結果が得られる。ここで平均の式に GARCH という項目が加わっているのが確認できる。その係数は 0.016 とプラスであるが t 値は 1.04 と低く有意ではない。

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	0.016628	0.016005	1.038958	0.2983
C	0.048797	0.018529	2.630060	0.0078
R(-1)	-0.062793	0.019206	-3.269363	0.0011
R(-2)	-0.045367	0.017519	-2.589534	0.0096

Variance Equation				
C	0.009432	0.002864	3.293668	0.0010
RESID(-1)^2	0.089281	0.010693	8.349419	0.0000
GARCH(-1)	0.908600	0.009759	93.09972	0.0000
T-DIST. DOF	6.150786	0.718304	8.562930	0.0000

R-squared	0.006198	Mean dependent var	0.004093
Adjusted R-squared	0.005284	S.D. dependent var	1.278381
S.E. of regression	1.274999	Akaike info criterion	2.804052
Sum squared resid	5306.033	Schwarz criterion	2.818965
Log likelihood	-4573.821	Hannan-Quinn criter.	2.809393
Durbin-Watson stat	2.050970		

<sup>1</sup> p 値の値が知りたいなら、View → Coefficient Diagnostic → Wald test - Coefficient Restrictions から、dummy(-1)、dummy(-1)\*s(-1)、(1-dummy(-1))\*s(-1)の係数がすべて 0 (c(2)=c(3)=c(4)=0) を帰無仮説とした F 検定を行えばよい。



## 2. 非対称のモデル

金融市場では、「悪いニュースは良いニュースよりボラティリティに大きな効果を持つ」といわれる。収益率の下落がボラティリティをより大きく増加させる傾向は、**レバレッジ効果**と呼ばれる。ここでは、こうした非対称性を捉えるモデル(TARCH, EGARCH)を推定しよう。

### TARCH モデル

分散の式は TARCH とする。TARCH では、ダミー変数

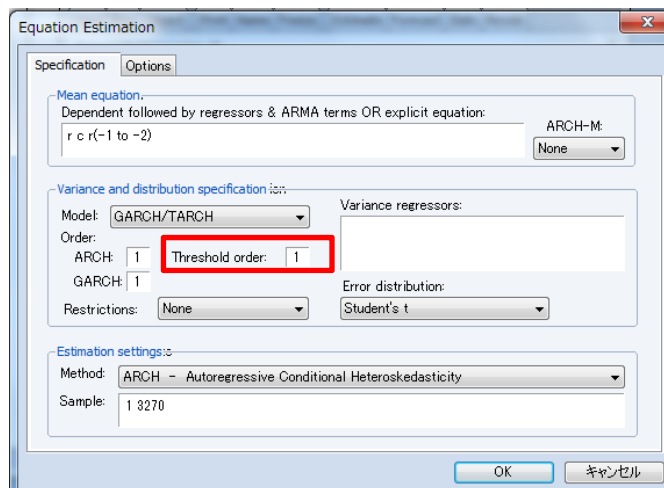
$$d_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{もし } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{もし } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

を導入し、条件付き分散を

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda_1 d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

と定式化する。ここで、 $\lambda_1 > 0$  であれば、負のショックは、正のショックよりもボラティリティを増大させる（レバレッジ効果がある）。

先と同じように、ARCH の specification ウィンドウを開いて、Mean equation は  $r c r(-1 \text{ to } -2)$  とし、Variance and distribution specification の Order は ARCH を 1、GARCH を 1 とし、新たに Threshold order に 1 を入力しよう（下図参照）。これで分散式に、 $d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$  が追加される。



ここで、OK を押すと以下の推定結果が得られる（下図）。つまり  $d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$  の係数  $(\text{resid}(-1)^2 * (\text{resid}(-1) < 0))$  は 0.154 であり、有意水準 1% で帰無仮説（係数=0）が棄却される。この係数は有意に正であり、負のショックは正のショックよりもボラティリティを増大させることが分かる。

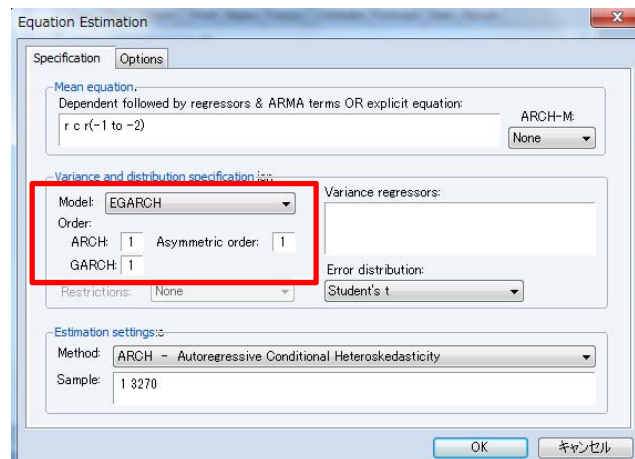
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.034712	0.013840	2.508126	0.0121
R(-1)	-0.060215	0.018665	-3.226108	0.0013
R(-2)	-0.037651	0.017275	-2.179501	0.0293
Variance Equation				
C	0.009803	0.001776	5.520851	0.0000
RESID(-1)^2	-0.021903	0.007605	-2.880210	0.0040
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.154186	0.014940	10.32045	0.0000
GARCH(-1)	0.933515	0.007443	125.4192	0.0000
T-DIST. DOF	7.103263	0.913464	7.776186	0.0000
R-squared	0.009273	Mean dependent var	0.004093	
Adjusted R-squared	0.008666	S.D. dependent var	1.278381	
S.E. of regression	1.272830	Akaike info criterion	2.769707	
Sum squared resid	5289.616	Schwarz criterion	2.784620	
Log likelihood	-4517.702	Hannan-Quinn criter.	2.775048	
Durbin-Watson stat	2.065665			

## EGARCH モデル

EGARCH では、被説明変数は  $\ln(h_t)$  となっており、係数に非負制約をかける必要がない。また、EGARCH ではショックのボラティリティへの非対称な効果を考慮することもできる。

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1} / h_{t-1}^{0.5}| + \lambda_1 (\varepsilon_{t-1} / h_{t-1}^{0.5}) + \beta_1 \ln(h_{t-1})$$

先と同じデータで EGARCH の推定を試みよう。ARCH の specification 画面を開いて、Variance and distribution specification の Model を、GARCH/TGARCH を変更して、EGARCH を選択しよう。Order は、ARCH を 1、GARCH を 1、Asymmetric order を 1 と指定する。



OK を押すと、推計結果が Equation ウィンドウとして表示される。

$$\text{LOG(GARCH)} = C(4) + C(5) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)}) + C(6) \cdot \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + C(7) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.038472	0.013419	2.867045	0.0041
R(-1)	-0.060611	0.018572	-3.263573	0.0011
R(-2)	-0.031376	0.017108	-1.833983	0.0667
Variance Equation				
C(4)	-0.086624	0.011146	-7.771739	0.0000
C(5)	0.107950	0.014677	7.355187	0.0000
C(6)	-0.129289	0.011147	-11.59813	0.0000
C(7)	0.986068	0.002344	420.5995	0.0000
T-DIST. DOF	6.877750	0.857400	8.021631	0.0000
R-squared	0.008899	Mean dependent var	0.004093	
Adjusted R-squared	0.008292	S.D. dependent var	1.278381	
S.E. of regression	1.273070	Akaike info criterion	2.770965	
Sum squared resid	5291.609	Schwarz criterion	2.785878	
Log likelihood	-4519.756	Hannan-Quinn criter.	2.776306	
Durbin-Watson stat	2.064298			

推定結果は読み取り難いかもしれないが、枠で囲った部分に分散の式に関する推定式が書かれている。これをもとに、推定結果をまとめると、

$$r_t = 0.038 - 0.061r_{t-1} - 0.031r_{t-2} \quad (2.87) \quad (-3.26) \quad (-1.83)$$

$$\ln(h_t) = -0.087 + 0.108 \left| \varepsilon_{t-1} / h_{t-1} \right| - 0.129 (\varepsilon_{t-1} / h_{t-1})^2 + 0.986 \ln(h_{t-1})$$

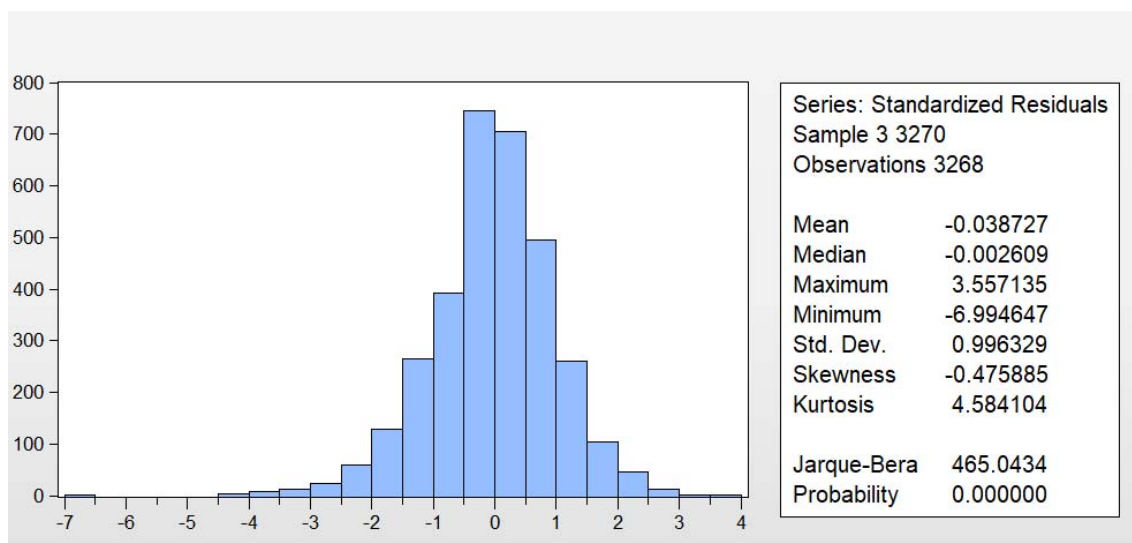
(-7.77) (7.36) (-11.60) (420.60)

となり、全ての係数は有意である。また、 $h_{t-1}$ の値を所与とすると、 $\varepsilon_{t-1}$ が1単位増えると、 $\ln(h_t)$ は-0.021 (=0.108-0.129)単位だけ増加する。これに対し、 $\varepsilon_{t-1}$ が1単位減少すると、 $\ln(h_t)$ は0.237 (=0.108+0.129)単位も増加する。これは、悪いニュースの方が良いニュースより条件付き分散を増大させる効果があることを意味する。

そして View→Residual Diagnostics→ARCH LM Test とし、Number of lags で1を選択しよう（左下画面参照）。そして OK をクリックすると右下の画面が表示される。これを見ると、 $s_{t-1}^2$ の係数は有意ではあるが、-0.054 と非常に小さい。

The image shows two screenshots from the EViews software interface. The left screenshot is the 'Heteroskedasticity Tests' dialog box. Under 'Test type:', 'ARCH' is selected. The 'Dependent variable' is 'RESID^2' and the 'Number of lags' is set to '1'. The right screenshot shows the 'Heteroskedasticity Test: ARCH' results. The F-statistic is 9.426602 (Prob. F(1,3265) = 0.0022) and the Obs\*R-squared is 9.405222 (Prob. Chi-Square(1) = 0.0022). The Test Equation is: WGT\_RESID^2 = C + WGT\_RESID^2(-1). The coefficient for WGT\_RESID^2(-1) is -0.053657 with a t-Statistic of -3.070277 and a probability of 0.0022. Other statistics include R-squared (0.002879), Adjusted R-squared (0.002573), S.E. of regression (1.897714), Sum squared resid (11758.30), Log likelihood (-6727.675), F-statistic (9.426602), and Durbin-Watson stat (1.996867).

最後に、標準化残差が正規分布に従っているかを確認してみよう。View→Residual Diagnostics→Histogram Normality Test と選択すると以下の画面が表示される。



この図をみると、左に少し歪んだ分布をしているように見える。平均(Mean)と中央値(Median)は-0.038、-0.0026であり、ほぼ0となっている。最大値(Maximum)と最小値(Minimum)をみると、それぞれ3.557、-6.99であり、負の値の方が絶対値が大きくなっている。歪度(Skewness)は-0.476、尖度(Kurtosis)は4.584となっている。正規分布では、歪度は0、尖度は3となるため、これらの値は正規分布とは少し異なるように見える。ここで正規分布かどうかを検定する統計量として、Jarque-Bera 統計量がある。この統計量は465.04であり、そのp値は0.00となっており、有意水準1%で正規分布の仮定が棄却されます。

### 3. 多変量 GARCH

前節までは1変量のモデルを学習してきた。しかし、近年では、グローバル化を背景とし、国際的なボラティリティ・ショックの波及に注目が集まっている。このような分析では、変数間の相互関係を考慮することが重要となる。

#### CCC モデル

ここで、データ EXRATES(DAILY).xls を用いて、CCC モデルを推定してみよう（教科書 3 章 10 節参照）。為替レートを  $S_{it}$  とし、その変化率を  $y_{it} = \ln(S_{it}/S_{it-1})$  とする。ここで、ユーロは  $y_{1t}$ 、ポンドは  $y_{2t}$ 、スイス・フランは  $y_{3t}$  としよう。つまり、

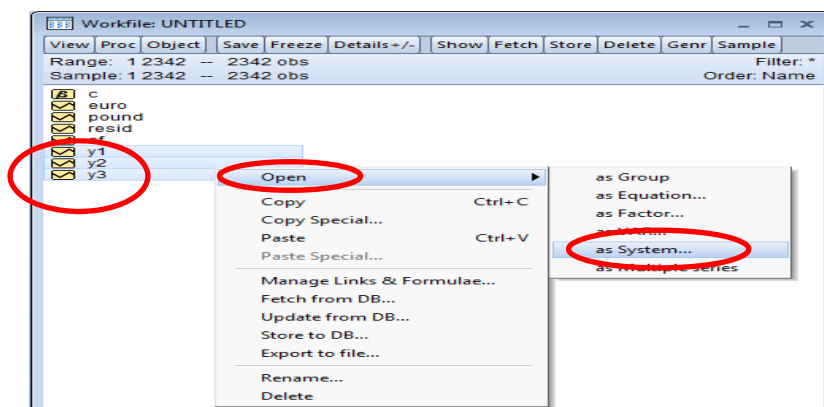
$$\text{gener } y1 = \log(\text{euro}/\text{euro}(-1))$$

$$\text{gener } y2 = \log(\text{bp}/\text{bp}(-1))$$

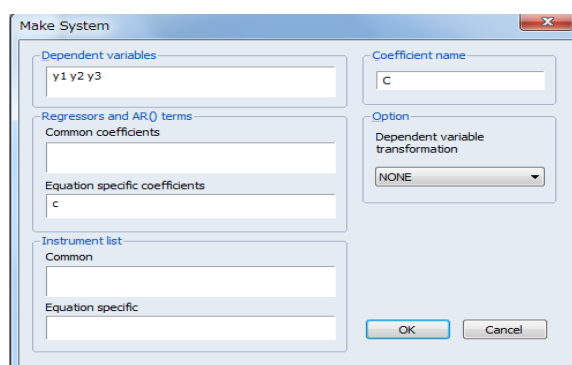
$$\text{gener } y3 = \log(\text{sf}/\text{sf}(-1))$$

と入力する。

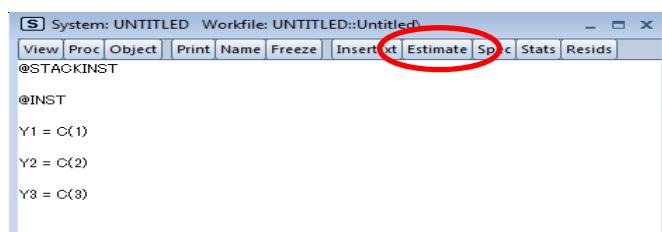
多変量モデルでは、単変量の方法とは異なり、システム全体を指定する必要がある。まず workfile ウィンドウで、コントロールキーを押しながらクリックすることで、 $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$  を同時に選択する。この状態で右クリックすると、メニューが表示されるので、「Open」→「as System」を選択する（下図）。



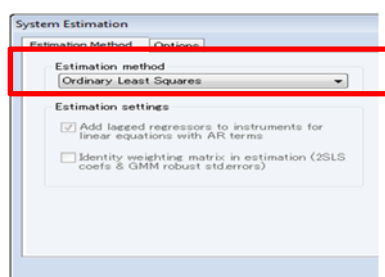
そうすると、Make System ウィンドウが表示される（下図）。ここでシステム（連立方程式モデル）を指定する。ここでは何も変更しないで推定を行う。つまり、変化率の説明変数として、定数項のみをとるモデルを想定する。



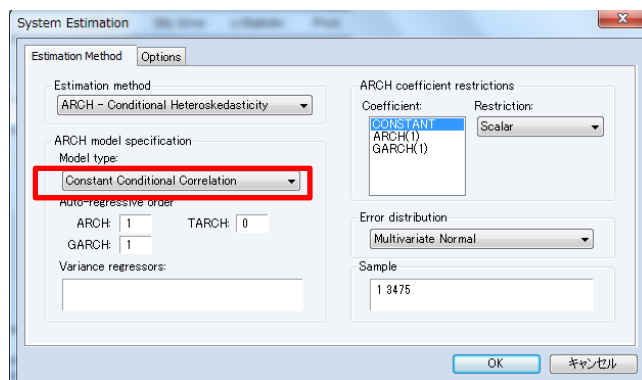
OK をクリックすると、System ウィンドウが表示される（下図）。メニューバーから Estimate を選択する。



すると、System Estimation ウィンドウが表示される。ここで Estimate method のメニューから、ARCH-Autoregressive Conditional Heteroskedasticity を選択する。



すると、ウィンドウが切り替わり、ARCH モデルの指定画面となる(下図)。ここで、ARCH model specification の Model type から Constant Conditional Correlation を選択する。



OK を押すと、System ウィンドウに推定結果が表示される。推定結果が表示されるが少し長いので、最初と最後の部分だけを説明しよう。上の部分は

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.000119	8.04E-05	1.483059	0.1381
C(2)	5.07E-05	7.89E-05	0.641940	0.5209
C(3)	0.000125	8.89E-05	1.407600	0.1592

となる。ここで、 $y_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it}$  の  $\mu_i$  の推定された値がそれぞれ C(1), C(2), C(3) にあたる。つまり、

$$y_{1t} = 0.000119 + \varepsilon_{1t}, y_{2t} = 5.07E-5 + \varepsilon_{2t}, y_{3t} = 0.000125 + \varepsilon_{3t}$$

となる。

また、下の部分を見ていくと、

Covariance specification: Constant Conditional Correlation				
GARCH(i) = M(i) + A1(i)*RESID(i)(-1)^2 + B1(i)*GARCH(i)(-1)				
COV(i,j) = R(i,j)*@SQRT(GARCH(i)*GARCH(j))				
Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1)	1.55E-07	4.22E-08	3.673735	0.0002
A1(1)	0.045141	0.003157	14.29953	0.0000
B1(1)	0.952472	0.002883	330.4048	0.0000
M(2)	2.57E-07	5.72E-08	4.495612	0.0000
A1(2)	0.039188	0.003889	10.07582	0.0000
B1(2)	0.952907	0.004903	194.3606	0.0000
M(3)	2.49E-07	5.45E-08	4.571262	0.0000
A1(3)	0.057243	0.002772	20.64710	0.0000
B1(3)	0.940787	0.002899	324.5416	0.0000
R(1,2)	0.681738	0.007939	85.86891	0.0000
R(1,3)	0.859919	0.003375	254.7938	0.0000
R(2,3)	0.595584	0.009400	63.35913	0.0000

がある。ここで、最後の3つの結果(R(1,2)、R(1,3)、R(2,3))が相関係数になっている。つまり、これは  $\rho_{12} = 0.68$ 、 $\rho_{13} = 0.86$ 、 $\rho_{23} = 0.59$  を意味する。また、他の係数は GARCH の推定結果であり、以下の対応関係がある<sup>2</sup>。

$$h_{11t} = M(1) + A1(1)\varepsilon_{1t-1}^2 + B1(1)h_{11t-1}$$

$$h_{22t} = M(2) + A1(2)\varepsilon_{2t-1}^2 + B1(2)h_{22t-1}$$

$$h_{33t} = M(3) + A1(3)\varepsilon_{3t-1}^2 + B1(3)h_{33t-1}$$

つまり、推計結果は

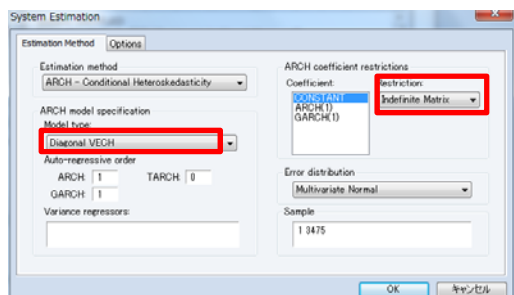
$$h_{11t} = 1.55E^{-7} + 0.045\varepsilon_{1t-1}^2 + 0.952h_{11t-1}$$

$$h_{22t} = 2.57E^{-7} + 0.039\varepsilon_{2t-1}^2 + 0.953h_{22t-1}$$

$$h_{33t} = 2.49E^{-7} + 0.057\varepsilon_{3t-1}^2 + 0.941h_{33t-1}$$

### 対角 Vech モデル

一度、System Window を閉じてから、workfile ウィンドウで、 $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$  を選択し、Open System を選択する。ここで、ARCH model specification の Model type から Diagonal Vech を選ぼう。また、restriction を indefinite matrix としよう。



<sup>2</sup> これらの式は推計後に System ウィンドウのメニューバーから「View」→「Representations」を選択するとわかりやすくまとまる。

そして OK をクリックすると、推定結果が表示される。平均式の結果は上部に、GARCH の結果は下部に表示される。GARCH の推定結果は、以下となる。

Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	4.23E-07	5.55E-08	7.624039	0.0000
M(1,2)	2.90E-07	3.98E-08	7.275378	0.0000
M(1,3)	4.43E-07	5.80E-08	7.648626	0.0000
M(2,2)	3.15E-07	5.32E-08	5.928512	0.0000
M(2,3)	2.76E-07	3.97E-08	6.957169	0.0000
M(3,3)	5.49E-07	7.16E-08	7.663706	0.0000
A1(1,1)	0.044846	0.002371	18.91484	0.0000
A1(1,2)	0.034921	0.002189	15.95116	0.0000
A1(1,3)	0.045173	0.002073	21.79374	0.0000
A1(2,2)	0.037695	0.002912	12.94286	0.0000
A1(2,3)	0.034285	0.002190	15.65507	0.0000
A1(3,3)	0.047925	0.002287	20.95887	0.0000
B1(1,1)	0.947322	0.002562	369.8190	0.0000
B1(1,2)	0.954314	0.002802	340.5434	0.0000
B1(1,3)	0.946471	0.002277	415.7336	0.0000
B1(2,2)	0.953503	0.003751	254.1723	0.0000
B1(2,3)	0.955689	0.002621	364.6834	0.0000
B1(3,3)	0.943232	0.002560	368.4106	0.0000

つまり、推計結果は

$$h_{11t} = 4.23E^{-7} + 0.045\epsilon_{1t-1}^2 + 0.947 h_{11t-1}$$

$$h_{12t} = 2.90E^{-7} + 0.035\epsilon_{1t-1}\epsilon_{2t-1} + 0.954 h_{12t-1}$$

$$h_{13t} = 4.43E^{-7} + 0.045\epsilon_{1t-1}\epsilon_{3t-1} + 0.947 h_{13t-1}$$

$$h_{22t} = 3.15E^{-7} + 0.038\epsilon_{2t-1}^2 + 0.954 h_{22t-1}$$

$$h_{23t} = 2.76E^{-7} + 0.034\epsilon_{2t-1}\epsilon_{3t-1} + 0.956 h_{23t-1}$$

$$h_{33t} = 5.49E^{-7} + 0.048\epsilon_{3t-1}^2 + 0.943 h_{33t-1}$$