2016/02/18

新谷元嗣、藪友良

クモの巣モデル

ここでは 1 章で割愛した確率的要素を含んだ**クモの巣モデル**を説明する。このモデルでは、企業の産出量の決定は、実際の販売の 1 期前に行われると仮定する。ここでは、作付けから収穫まで時間のかかる農業生産を考えてみよう。たとえば、小麦市場は、3 本の式からなるとする。

需要曲線　$d_t = a - \gamma p_t$　(1)

供給曲線　$s_t = b + \beta p_t^* + \varepsilon_t$　(2)

市場均衡　$s_t = d_t$　(3)

ここで、d_t は t 期の小麦需要、s_t は t 期の小麦供給、p_t は t 期の小麦価格、ε_t は t 期の供給ショック（期待値 0）である。供給ショックは、生産量に影響を与える天候要因などであり、これは確率変数と考えられる。市場均衡では、需要と供給が一致している。また、a、b、γ、β はすべて正のパラメータとする（ただし、$a > b$）[1]。

このモデルでは、消費者は市場価格で小麦を好きなだけ購入できる。しかし、農家は生産期($t-1$ 期)には、収穫期(t 期)の市場価格が分からないため、期待価格 p^*に基づいて生産量を決めている。農家の生産量は、予定生産量 $b+\beta p^*$と供給ショック ε_t からなる。ここで、農家は、収穫期(t 期)の市場価格が昨年の市場価格に等しいと予想する。

$$p_t^* = p_{t-1} \tag{4}$$

クモの巣モデルの本質は、生産量の決定が単純な価格予想に基づいている点にある。

図 1 クモの巣モデル

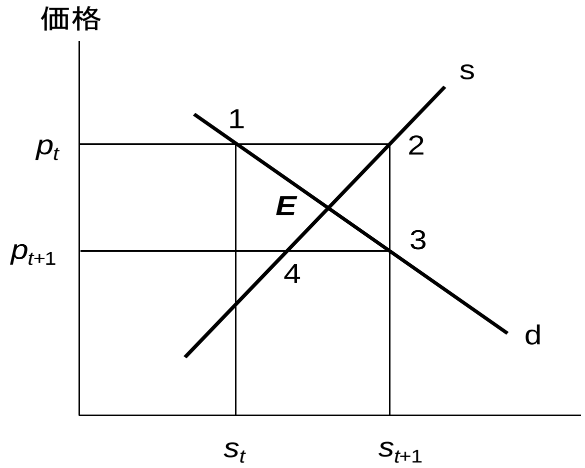

図 1 は、小麦市場の需要曲線と供給曲線を示しており、交点 E は長期の均衡価格と均衡量を表している。確率モデルの均衡は、伝統的クモの巣モデルの均衡とは異なる。システムが安定していたら、価格は E に収束する。しかし、確率モデルでは、供給ショックが生

[1] この仮定（a >b）が満たされないと、正の領域で需要曲線と供給曲線が交差しない（均衡量、均衡価格が負となる）。

じるため、価格が E に留まり続けることはない。しかしながら、長期均衡を考えることは有益である。供給ショックがなければ、長期均衡において、価格と数量は時間を通じて一定となる。したがって、$\{\varepsilon_t\}$はすべて 0、価格は一定（$p_t = p_{t-1} = \ldots = p$）とすると、需給一致の条件から（$a-\gamma p = b+\beta p$）、長期均衡価格は $p=(a-b)/(\gamma+\beta)$となる。さらに、供給曲線に長期均衡価格を代入すると、長期均衡量 $s=(a\beta+\gamma b)/(\gamma+\beta)$を得る。

システム全体の動学を理解するため、次の状況を考えてみよう。農家は t 期に均衡量 s の生産を計画している。しかし、負の供給ショックにより、実際の供給量は s_t であったとする。このとき、消費者は供給量 s_t に対し、価格 p_t を支払う（図 1 の点 1）。単純化のため、その後の供給ショックは 0 としよう($\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2} = \ldots = 0$)。ここで農家は、収穫期 $t+1$ の価格は t 期の価格と同じと予想している($p_{t+1}{}^{*}=p_t$)。このため、$t+1$ 期の実際の生産量は s_{t+1} となる（点 2）。しかし、このとき消費者は価格が p_{t+1} まで低下しない限り、数量 s_{t+1} を購入しない（点 3）。次の期には、農家は点 4 だけ生産する。このプロセスは、均衡 E に達するまで続く。

図 1 では、市場は常に長期均衡に収束する。しかし、この結果はすべての需要曲線と供給曲線で成り立つわけではない。均衡の安定条件を導出するため、(1)－(4)式を 1 つにまとめよう。(3)式に、(1)(2)式を代入すると、

$$b + \beta p_{t-1} + \varepsilon_t = a - \gamma p_t$$

となる（$p_t{}^{*}=p_{t-1}$ に注意）。上式を p_t について解くと、1 次の差分方程式を得る。

$$p_t = (-\beta/\gamma)p_{t-1} + (a-b)/\gamma - \varepsilon_t/\gamma \tag{5}$$

前節の手順によって、(5)式の一般解を導出しよう。

1. 同次方程式を $p_t = (-\beta/\gamma)p_{t-1}$ と設定する。このとき、同次解は

   $$p_t^h = A(-\beta/\gamma)^t$$

   となる。ただし、A は任意の定数である。

2. ここで $\beta/\gamma<1$ なら、(5)式を p_t から逐次代入することで、特殊解が得られる。

   $$p_t^p = \frac{a-b}{\gamma+\beta} - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}(-\beta/\gamma)^i \varepsilon_{t-i} \tag{6}$$

   しかし、$\beta/\gamma \geq 1$ なら、(6)式は発散してしまうため、初期条件が必要となる。

3. 一般解は、特殊解と同次解の和となる。

   $$p_t = \frac{a-b}{\gamma+\beta} - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}(-\beta/\gamma)^i \varepsilon_{t-i} + A(-\beta/\gamma)^t \tag{7}$$

4. 価格の初期条件 p_0 が分かれば、任意の定数 A を特定できる。0 期の価格は、(7)式から

   $$p_0 = \frac{a-b}{\gamma+\beta} - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}(-\beta/\gamma)^i \varepsilon_{-i} + A(-\beta/\gamma)^0$$

   となる。そして、$(-\beta/\gamma)^0 = 1$ から、定数 A は

$$A = p_0 - \frac{a-b}{\gamma+\beta} + \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}(-\beta/\gamma)^i \varepsilon_{-i}$$

となる。これを(7)式に戻すと、

$$p_t = \frac{a-b}{\gamma+\beta} - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}(-\beta/\gamma)^i \varepsilon_{t-i} + (-\frac{\beta}{\gamma})^t \left[p_0 - \frac{a\text{-}b}{\gamma+\beta} + \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}(-\beta/\gamma)^i \varepsilon_{-i} \right]$$

となる。ここで、2 つの Σ 項をまとめると、次式を得る。

$$p_t = \frac{a-b}{\gamma+\beta} - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{t-1}(-\beta/\gamma)^i \varepsilon_{t-i} + (-\frac{\beta}{\gamma})^t \left[p_0 - \frac{a-b}{\gamma+\beta} \right] \tag{8}$$

図 1 を用いて、一般解(8)を解釈しよう。安定条件に焦点を当てるため、一時的にすべての$\{\varepsilon_t\}$は 0 と仮定する。まず、システムが長期均衡 E から始まるなら（$p_0=(a-b)/(\gamma+\beta)$）、(8)式から価格は $p_t = (a-b)/(\gamma+\beta)$となる。つまり、長期均衡から始まると、システムは均衡に留まり続ける。次に、初期条件は均衡価格より低いとしよう（$p_0 < (a-b)/(\gamma+\beta)$）。このとき、(8)式から、1 期の価格は

$$p_1 = (a-b)/(\gamma+\beta) + [\, p_0 - (a-b)/(\gamma+\beta)]\,(-\beta/\gamma)^1 \tag{9}$$

となる。ここで、$p_0 < (a-b)/(\gamma+\beta)$、$-\beta/\gamma < 0$ から、1 期の価格 p_1 は均衡価格$(a-b)/(\gamma+\beta)$を上回る。そして、2 期には

$$p_2 = (a-b)/(\gamma+\beta) + [\, p_0 - (a-b)/(\gamma+\beta)]\,(-\beta/\gamma)^2$$

となる。ここで、$p_0 < (a-b)/(\gamma+\beta)$、$(-\beta/\gamma)^2>0$ から、2 期の価格 p_2 は均衡価格を下回る。3 期以降も、t が偶数（奇数）なら$(-\beta/\gamma)^t$は正（負）となり、$\{p_t\}$は長期均衡の上下を振動する。ここで、$\beta<\gamma$ なら$(\beta/\gamma)^t$ は 0 に収束し、$\beta>\gamma$ なら$(\beta/\gamma)^t$ は発散する。したがって、β/γ の値は、価格が均衡に収束するか否かを決める。以上を換言すると、価格は、$\beta/\gamma< 1$ なら減衰振動し、$\beta/\gamma> 1$ なら拡散振動する。

安定条件の経済的解釈は明らかである。供給曲線の傾き(つまり、$\partial p_t/\partial s_t$)は $1/\beta$ であり、需要曲線の傾きの絶対値（つまり、$-\partial p_t/\partial d_t$ ）は $1/\gamma$ である[2]。したがって、供給曲線の傾きが需要曲線の傾きより急であれば（$1/\beta>1/\gamma$、つまり $\beta/\gamma<1$）、システムは安定する（図 1 参照）。供給曲線の傾きが急であれば、価格が変化しても供給量の変化は小さく、需要曲線の傾きが緩やかであれば、供給量が変化しても価格の変化は小さい。これがシステムの安定にとって重要となる。

供給ショックの小麦価格への効果を考えてみる。供給ショックの価格への同時点の効果は、p_tを ε_t で偏微分したものとなる。これは(8)式から

$$\frac{\partial p_t}{\partial \varepsilon_t} = -\frac{1}{\gamma} \tag{10}$$

となり、(8)式の ε_t の係数に当たる。(10)式は、ε_t の変化の t 期の価格へのインパクト(impact)を示しており、インパクト乗数(impact multiplier)と呼ばれる。(10)式から、ε_t が 1 単位減少すると、t 期の価格 p_t は $1/\gamma$ 単位だけ上昇する。

---

[2] 図 2.3 の縦軸は価格である。需要曲線の左辺を p_t とすると、$p_t = (a/\gamma) - (1/\gamma)d_t$ となり、d_t の係数は$-(1/\gamma)$となる。

t 期の供給ショックは、将来の価格にも影響を与える。(10)式を 1 期分だけ前に進めると、**1 期先の乗数**(one-period multiplier) は、

$$\frac{\partial p_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = -\frac{1}{\gamma}(-\beta/\gamma) = \beta/\gamma^2$$

となる。図 1 の点 3 は、t 期の負の供給ショックが $t+1$ 期の価格にどのような影響を与えるかを示す。供給ショックの効果は明らかに減衰している。もし $\beta/\gamma<1$ なら、絶対値でみて、$\partial p_t/\partial \varepsilon_t$ は $\partial p_{t+1}/\partial \varepsilon_t$ より大きくなる。すべての乗数は、(10)式を前に進めることで導出できる。(10)式を 2 期分前に進めて、ε_t で p_{t+2} を偏微分すると、

$$\partial p_{t+2}/\partial \varepsilon_t = -(1/\gamma)(-\beta/\gamma)^2$$

となる。同様に、(10)式を n 期分前に進めて、ε_t で p_{t+n} を偏微分すると次式となる。

$$\partial p_{t+n}/\partial \varepsilon_t = -(1/\gamma)(-\beta/\gamma)^n$$

s 期先の乗数($\partial p_{t+s}/\partial \varepsilon_t$)を、s ($\geq 0$)の関数とみなしたものを、**インパルス応答関数**(impulse response function)と呼ぶ。この関数は、ショックによって、変数の時間経路が受ける影響を示しており、時系列分析で頻繁に用いられる。この例では、インパルス応答関数は、供給ショックの小麦価格への効果を測る。この他にも、貨幣供給ショックや生産性ショックの実質 GDP への効果を測ることもできる。

この関数は、次の関係から簡単に導出できる。

$$\frac{\partial p_{t+j}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial p_t}{\partial \varepsilon_{t-j}}$$

つまり、インパルス応答関数は、(10)式を様々な ε_{t-j} で偏微分すれば求められる。こうして求めた偏微分は、単に(10)式の ε_{t-j} の係数にすぎない。

(10)式の各項は、それぞれ経済的解釈を持っている。特殊解の確定的部分$(a-b)/(\gamma+\beta)$は長期均衡価格を表す。安定条件が満たされると、価格は長期均衡価格に収束する。特殊解の確率的部分は、供給ショックによる価格の短期変動を捉える。インパルス応答関数の係数は徐々に減衰するため、ショックの効果は一時的といえる。最後は、$(-\beta/\gamma)^t[p_0 - (a-b)/(\gamma+\beta)]$であり、$[p_0-(a-b)/(\gamma+\beta)]$は初期価格が長期均衡価格から乖離している程度を測っている。もし $\beta/\gamma< 1$ なら、初期の乖離の重要性は時間を通じて低下していく。