微分と偏微分

藪友良

- 微分とは何か

- 微分の公式

- 関数の最大化と最小化

- 合成関数の微分

- 偏微分

微分とは何か

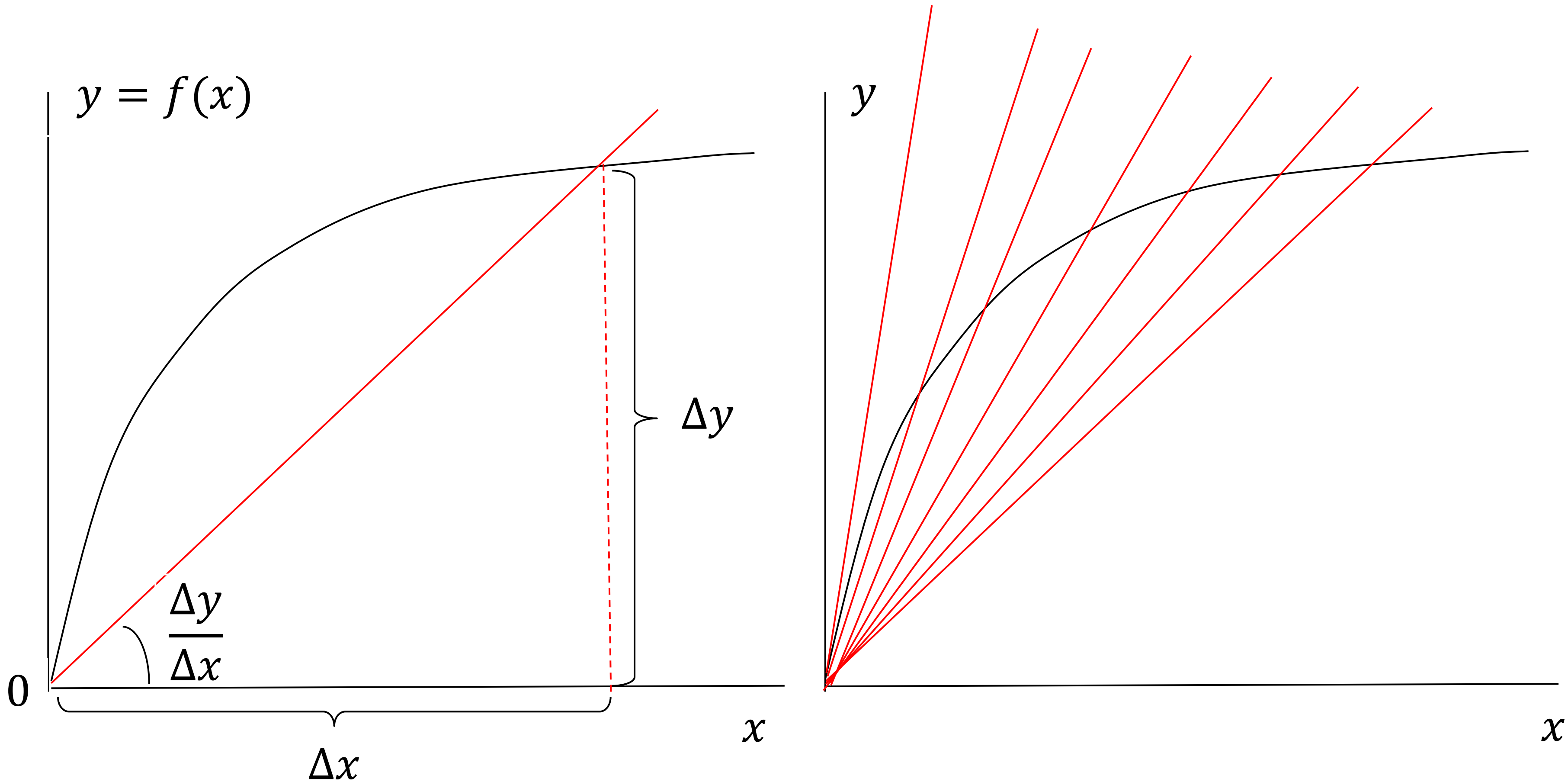
- ある値xに対して、別の値$f(x)$を対応させる関係を1変数の関数という

(例) 数値例

$$f(x) = 4 + 2x$$
$$f(x) = 3x^2$$

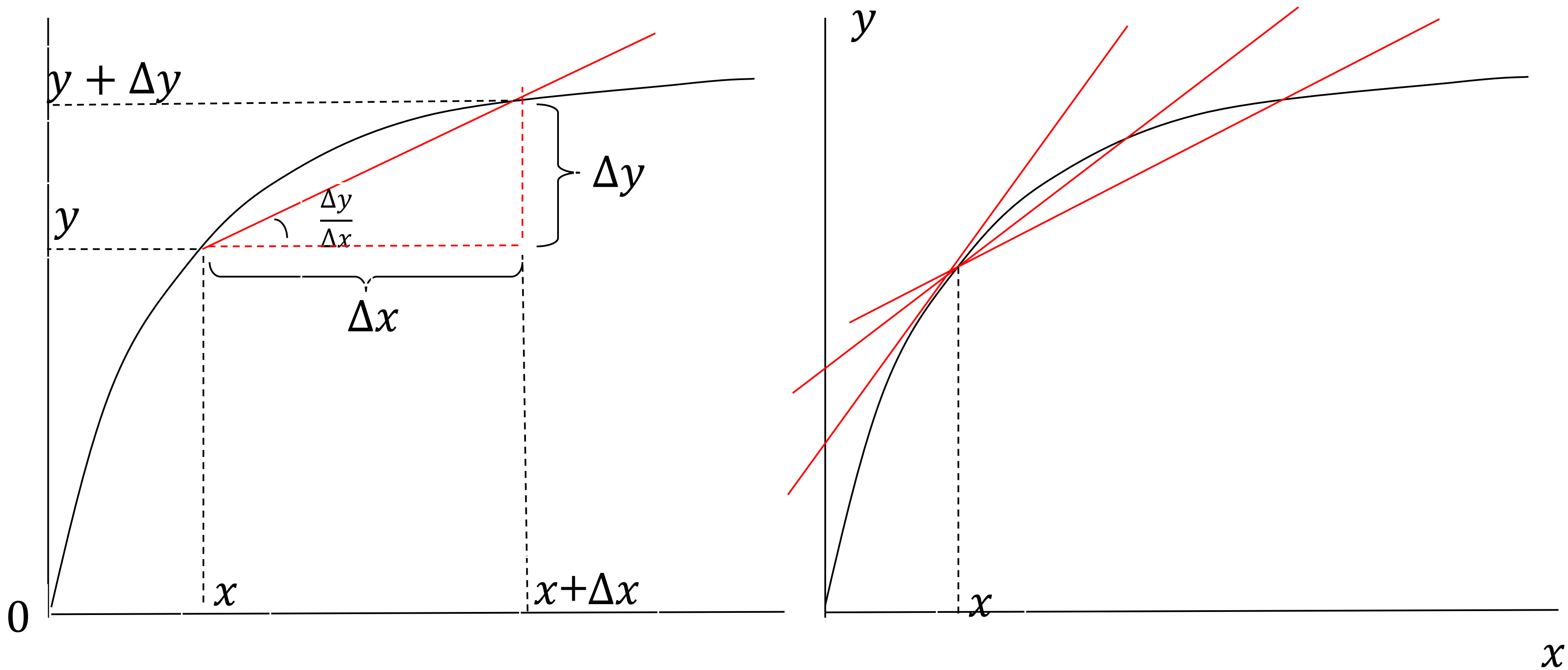
- 微分:「関数$f(x)$の接線の傾き」であり、「xを微小に変化させたとき、$f(x)$がどれだけ変化するか」を表す

---微分は、$f'(x)$、$\frac{df(x)}{dx}$と表す。



--- Δxを小さくすると、$\Delta y/\Delta x$は、原点0で評価した関数の接線の傾きに近づく(Δxが非常に0に近いとき、$x=0$で評価した微分)

▪ 接線の傾きは、x をどの値で評価するかによって異なる



--- Δxを小さくすると、$\Delta y/\Delta x$は、xで評価した関数の接線の傾きに近づく(Δxが非常に0に近いとき、xで評価した微分)

・$y = f(x)$のとき、微分は

$$\frac{dy}{dx} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

--- $lim_{\Delta x \to 0}$とは、xの変化が非常に小さい

(Δxが非常に0に近い)

微分の公式

･公式1

$y = x^2$の微分は、

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

[証明] xから$x + \Delta x$に微小に変化したなら、$y = x^2$の微分は

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{\{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\} - x^2}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x$$

よって、Δxが0に近づくと、$2x$となる。

・公式2

$y = x^n$の微分は、

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

[証明] xから$x_* = x + \Delta x$に変化(つまり、$\Delta x = x_* - x$)

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x_* - x} = \frac{x_*^n - x^n}{x_* - x}$$

なお、 $\frac{x_*^n - x^n}{x_* - x} = x_*^{n-1} + x x_*^{n-2} + x^2 x_*^{n-3} + \cdots + x^{n-1}$

(例) $\frac{x_*^2 - x^2}{x_* - x} = x_* + x$ 　 $\boxed{x_*^2 - x^2 = (x_* + x)(x_* - x)}$

$\frac{x_*^3 - x^3}{x_* - x} = x_*^2 + x_* x + x^2$ 　 $\boxed{x_*^3 - x^3 = (x_*^2 + x_* x + x^2)(x_* - x)}$

$\frac{x_*^4 - x^4}{x_* - x} = x_*^3 + x x_*^2 + x^2 x_* + x^3$

Δxを0に近づけると、$\Delta x = x_* - x$から$x_* = x$に

$$\frac{x_*^n - x^n}{x_* - x} = \underbrace{x_*^{n-1}}_{x^{n-1}} + \underbrace{x x_*^{n-2}}_{x^{n-1}} + \underbrace{x^2 x_*^{n-3}}_{x^{n-1}} + \cdots + \underbrace{x^{n-2} x_*}_{x^{n-1}} + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

･公式3

$y = a + bx^n$の微分は、

$$\frac{dy}{dx} = bnx^{n-1}$$

[証明] xから$x_* = x + \Delta x$に変化(つまり、$\Delta x = x_* - x$)

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(a + bx_*^n) - (a + bx^n)}{x_* - x}$$

$$= b\left(\frac{x_*^n - x^n}{x_* - x}\right)$$

$$= bnx^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{x_*^n - x^n}{x_* - x} = nx^{n-1}}$$

(数値例)

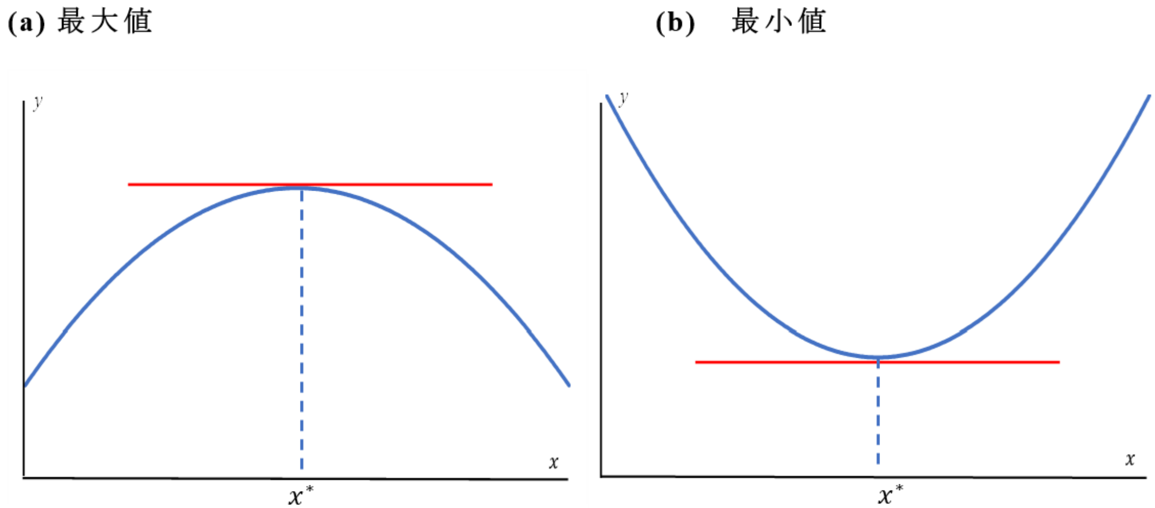
$y = a$なら、 $\frac{dy}{dx} = 0$

$y = bx$なら、 $\frac{dy}{dx} = bx^0 = b$

$y = 3 + 4x^3$なら、 $\frac{dy}{dx} = 4 \times 3x^2 = 12x^2$

関数の最小化と最大化

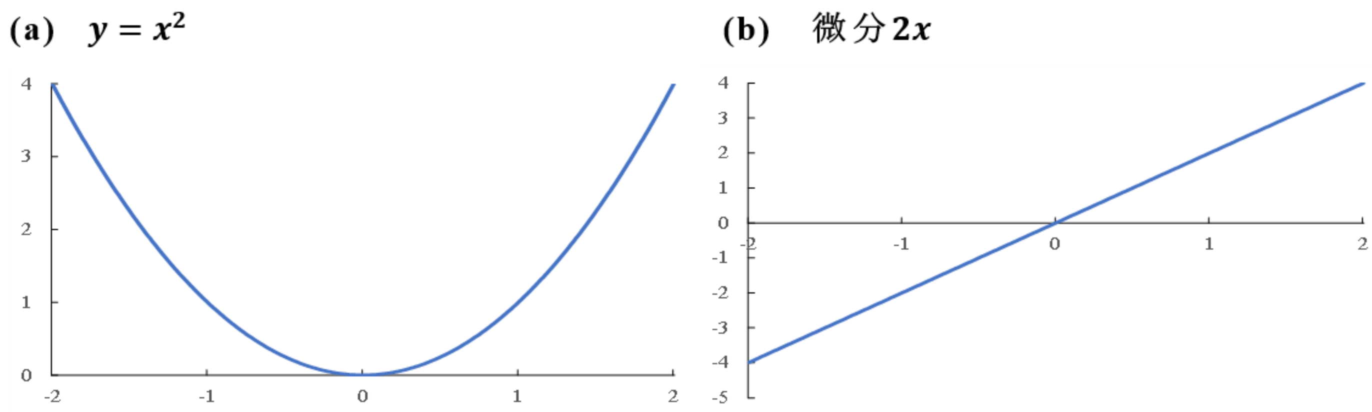
・関数の最大値と最小値で関数の傾きが0になる



--- $f'(x) = 0$となるx^*が最大化もしくは最小化するポイント

--- x^*から微小にxを増加させたら最大化か最小化か分かる

(例)　$y = x^2$ の微分は$2x$ であり、$2x = 0$となるのは$x = 0$



合成関数

・ $y = f(x)$とし、xは別の変数zの関数$g(z)$

yはzの関数であり、$f\left(g(z)\right)$を$f(x)$と$g(z)$の合成関数

(例) 関数$y = (3 + 2z)^2$は、

$y = x^2$と$x = 3 + 2z$の合成関数

・ 合成関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dz}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} z\text{が変化したときの} \\ y\text{の変化量} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\text{が変化したときの} \\ y\text{の変化量} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z\text{が変化したときの} \\ x\text{の変化量} \end{pmatrix}$$

(例) 関数$y = (3 + 2z)^2$を、$y = x^2$と$x = 3 + 2z$の合成関数とすると

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} = (2x) \times (2) = 4 \times (3 + 2z) = 12 + 8z$$

偏微分

- 2変数x_1とx_2が値$f(x_1, x_2)$に対応するとき2変数の関数

- x_1に関する偏微分は、「x_2は固定した値として、x_1に関して微分をとったもの」

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1}$$

$$= lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

---微分と区別するため、dではなく∂(ラウンド・デルタ)を使う

(例) $y = x_1^2 x_2$とすると

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 x_2$$

$y = x_1^3 + 2x_1 x_2 - 4x_2$とすると、

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_2$$