巻末付録
数学の復習

藪友良

・和記法

--- Σ記号の意味

--- 線形変換

--- 変数が2つある場合

・ 指数関数

--- 指数関数の定義と性質

--- ネイピア数

・ 対数関数

--- 対数関数の定義と性質

和記法

データ $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n\}$は$n$個

・Σ記号の使い方

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n$$

---X_1(i=1のとき)からX_n(i=nのとき)まで和をとる

---数式の簡潔な表現ができて便利

(例)

$$\sum_{i=5}^{10} X_i = X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n)$$

・線形変換$a + bX_i$

--- aとbは任意の定数

--- $a = 3$、$b = 4$なら、$X_i = 2$のとき$3 + 4 \times 2 = 11$

- $\sum_{i=1}^{n}(a + bX_i) = na + b\sum_{i=1}^{n} X_i$

[証明]

$$\sum_{i=1}^{n}(a + bX_i) = (a + bX_1) + (a + bX_2) + \ldots + (a + bX_n)$$

$$= (\underbrace{a + a + \ldots. + a}_{n\text{個}}) + (bX_1 + bX_2 + \ldots + bX_n)$$

$$= na + b(X_1 + X_2 + \ldots X_n) = na + b\sum_{i=1}^{n} X_i$$

--- 定数の和はn ×定数($\sum_{i=1}^{n} a = na$)

--- 定数はΣ記号の外に出せる($\sum_{i=1}^{n} bX_i = b\sum_{i=1}^{n} X_i$)

(例)　加重平均

加重$\{\omega_{1,}\ \omega_2,\dots,\ \omega_n\}$、$\omega_i \geq 0$、 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$のとき

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \cdots + \omega_{n-1} X_{n-1} + \omega_n X_n$$

は加重平均と呼ばれる。

--- 標本平均は加重平均の1つ

[証明]

$\omega_i = \frac{1}{n}$なら、加重平均は標本平均となる

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

・変数が2つある場合

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n\}、\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Y_n\}$$

$X_i + Y_i$の総和は、X_iの総和+Y_iの総和

[証明]

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \ldots + (X_{n-1} + Y_{n-1}) + (X_n + Y_n)$$

$$= (X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n-1} + Y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

--- $X_i + Y_i$の2乗和は、X_iとY_iの2乗和と2× X_iY_iの積和

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} X_iY_i$$

[証明]

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + Y_i^2 + 2X_iY_i)$$

$$= (X_1^2 + Y_1^2 + 2X_1Y_1)+\ldots+(X_n^2 + Y_n^2 + 2X_nY_n)$$

$$= (X_1^2+\ldots+X_n^2) + (Y_1^2+\ldots+Y_n^2) + 2(X_1Y_1+\ldots+X_nY_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} X_iY_i$$

指数関数

- 指数関数：a^xとなる関数(底a、指数x)

$$a^x = \underbrace{aa\cdots aa}_{a\text{が}x\text{個ある}}$$

--- 底aは1を除く正の実数、指数は実数とする

(例)　$2^1 = 2$、$2^2 = 2 \times 2 = 4$、$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

--- 右肩の数字(指数)が1増えるとa 倍

右肩の数字が1減ると$1/a$ 倍に

$$\begin{tikzcd}
\left(2^{-2} = \frac{1}{4}\right) \arrow[r] \arrow[r, bend right, "2\text{倍}"'] & \left(2^{-1} = \frac{1}{2}\right) \arrow[l, bend right, "1/2\text{倍}"'] \arrow[r] \arrow[r, bend right, "2\text{倍}"'] & \left(2^{0} = 1\right) \arrow[l, bend right, "1/2\text{倍}"'] \arrow[r] \arrow[r, bend right, "2\text{倍}"'] & \left(2^{1} = 2\right) \arrow[l, bend right, "1/2\text{倍}"'] \arrow[r] \arrow[r, bend right, "2\text{倍}"'] & \left(2^{2} = 4\right) \arrow[l, bend right, "1/2\text{倍}"']
\end{tikzcd}$$

--- 性質(1) $a^0 = 1$、 (2) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

指数関数の性質

正の実数であるxとzに対して

(1) $a^0=1$、(2) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$、

(3) $a^x a^z=a^{x+z}$、　(4) $\frac{a^x}{a^z}=a^{x-z}$、(5) $(a^x)^z=a^{xz}$

[証明]

(3)　$$a^x a^z=(\underbrace{aa\cdots aa}_{x\text{個}})(\underbrace{aa\cdots aa}_{\text{z個}})=\underbrace{aa\cdots aa}_{x+z\text{個}}=a^{x+z}$$

(4)　$$\frac{a^x}{a^z}=\frac{\overbrace{aa\ldots aa}^{x\text{個}}}{\underbrace{aa\ldots aa}_{z\text{個}}}=a^{x-z}$$

(5)　$$(a^x)^z=\underbrace{(a^x)(a^x)\ldots(a^x)(a^x)}_{a^x\text{が}z\text{個}}=a^{xz}$$

指数関数の性質

正の実数であるxとzに対して

$(1)\ a^0 = 1$、$(2)\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}$、

$(3)\ a^x a^z = a^{x+z}$、 $(4)\ \frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$、$(5)\ (a^x)^z = a^{xz}$

---- 簡単な数値例

$$2^5 2^8 = 2^{13}$$

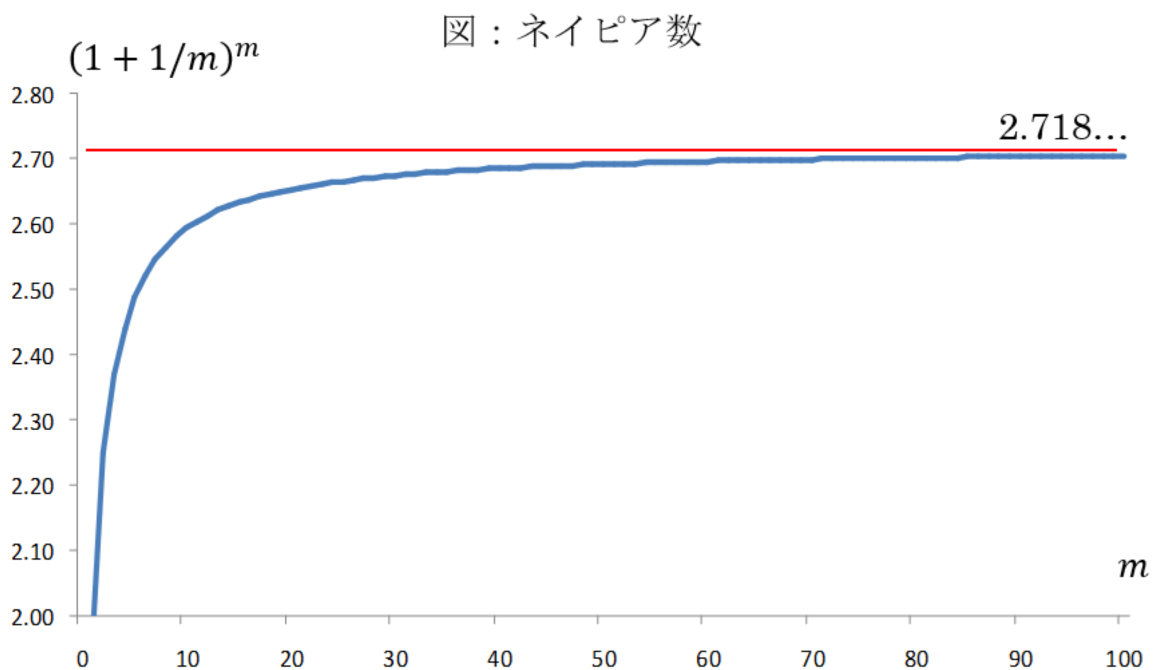
$$\frac{3^2}{3^5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

$$\left(5^5\right)^8 = 5^{40}$$

ネイピア数

ネイピア数eは

$$e = lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

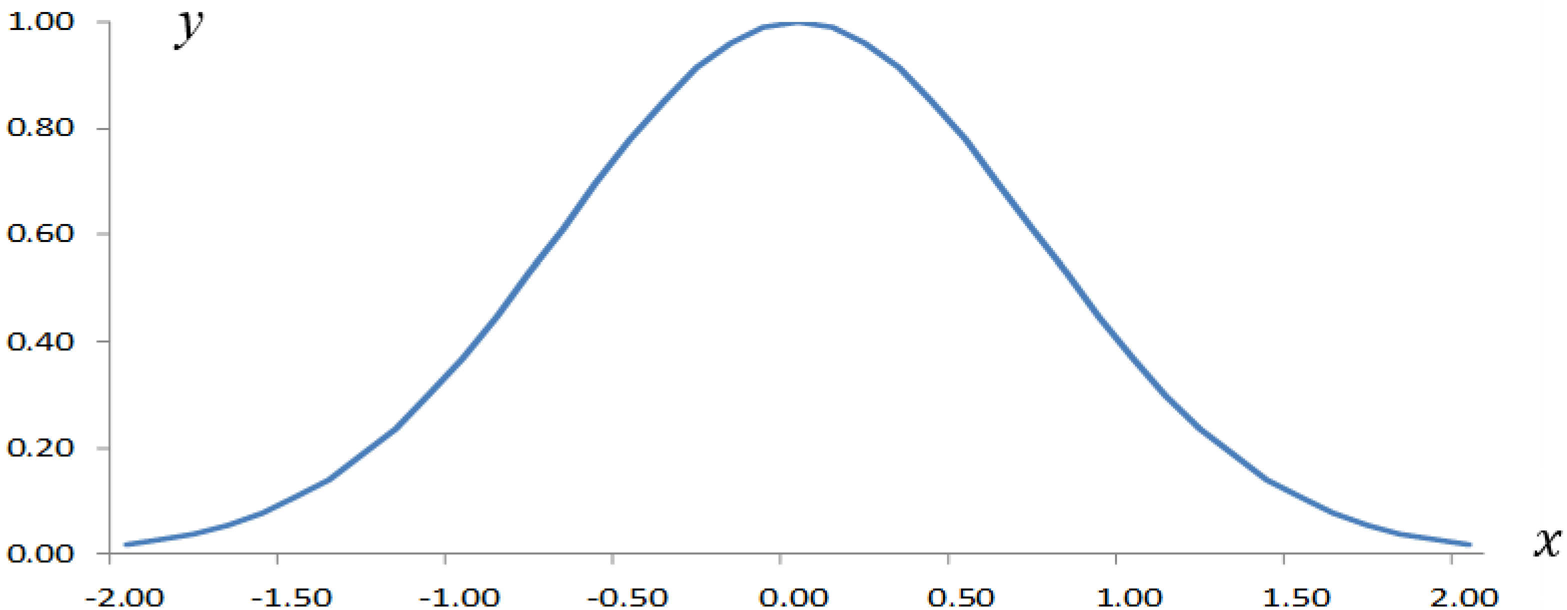


--- $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$、$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$、$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.37$、$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.44$

--- 正規分布もネイピア数を使っている

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$y = e^{-x^2}$ のグラフ



対数関数

- 対数関数:$y = a^x$のとき、指数xはaを底とするyの対数と呼ばれる

$$x = \log_a(y)$$

--- a^xは常に正であるため、yが正の値のときだけ対数を定義できる(0や負だと定義できない)

例) $2^4 = 16$から

$$\log_2 16 = 4$$

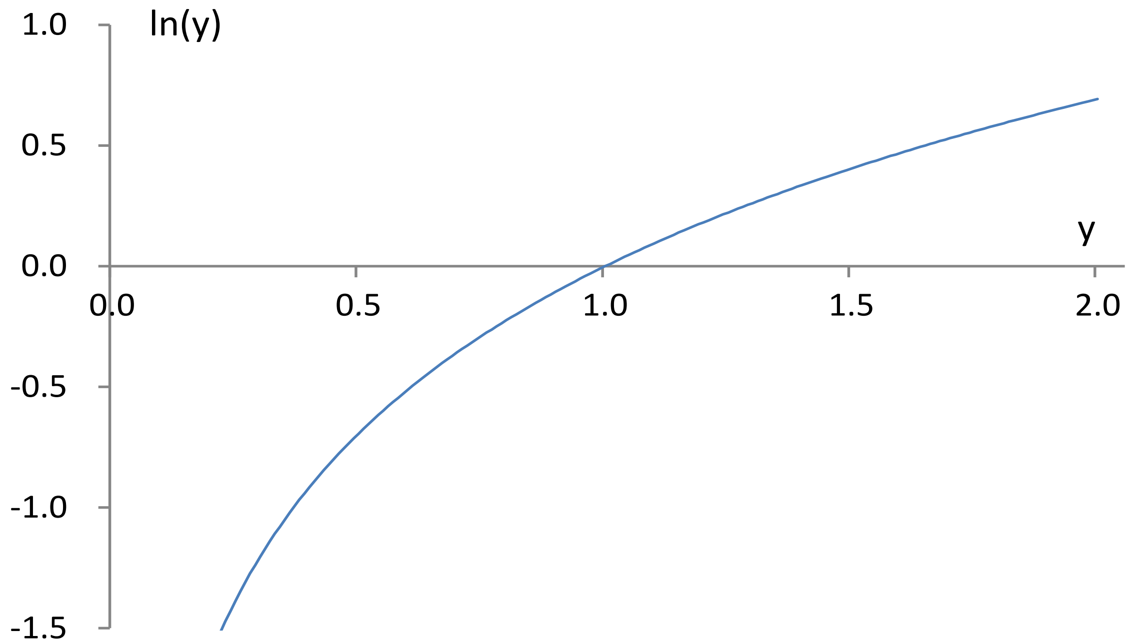
$10^3 = 1000$から

$$\log_{10} 1000 = 3$$

・自然対数(底をネイピア数eとした対数)

--- $\log_e(y)$は、$\ln(y)$もしくは$\ln y$と表記する

--- $y < 1$なら$\ln(y) < 0$、$y = 1$なら$\ln(y) = 0$、$y > 1$なら$\ln(y) > 0$



(例) $e^{-2} = \frac{1}{2.718^2} = 0.0135$、$e^{-1} = \frac{1}{2.718} = 0.368$、$e^0 = 1$、$e^1 = 2.718$、$e^2 = 7.389$

$\ln(0.0135) = -2$、 $\ln(0.368) = -1$、 $\ln(1) = 0$、$\ln(2.718) = 1$、$\ln(7.389) = 2$

対数関数の性質

正の実数であるxとyに対して

(1) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$、 (2) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

(3) $\ln(a^x) = x\ln(a)$

[証明]

(1) $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$ から

$$y = e^x = e^{\ln(\mathrm{y})}$$

この結果から

$$xy = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$$

指数関数の性質
(3) $a^x a^z = a^{x+z}$

さらに対数をとると

$$\ln(xy) = \ln\left(e^{\ln(x)+\ln(y)}\right) = \ln(x) + \ln(y)$$

(2) $\frac{x}{y} = \frac{e^{\ln(x)}}{e^{\ln(y)}} = e^{\ln(x)-\ln(y)}$ から

指数関数の性質
(4) $\frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(e^{\ln(x)-\ln(y)}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

(3) $a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)}$ から

指数関数の性質
(5) $(a^x)^z = a^{xz}$

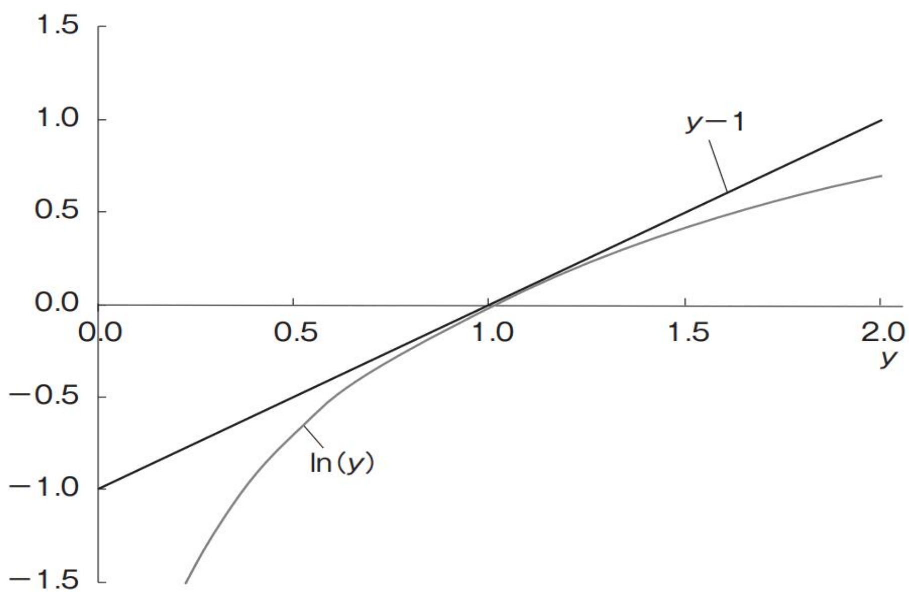
$$\ln(a^x) = \ln\left(e^{x\ln(a)}\right) = x\ln(a)$$

- **対数の差は変化率と解釈される**

$$\ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) = \ln\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}\right) \approx \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$$

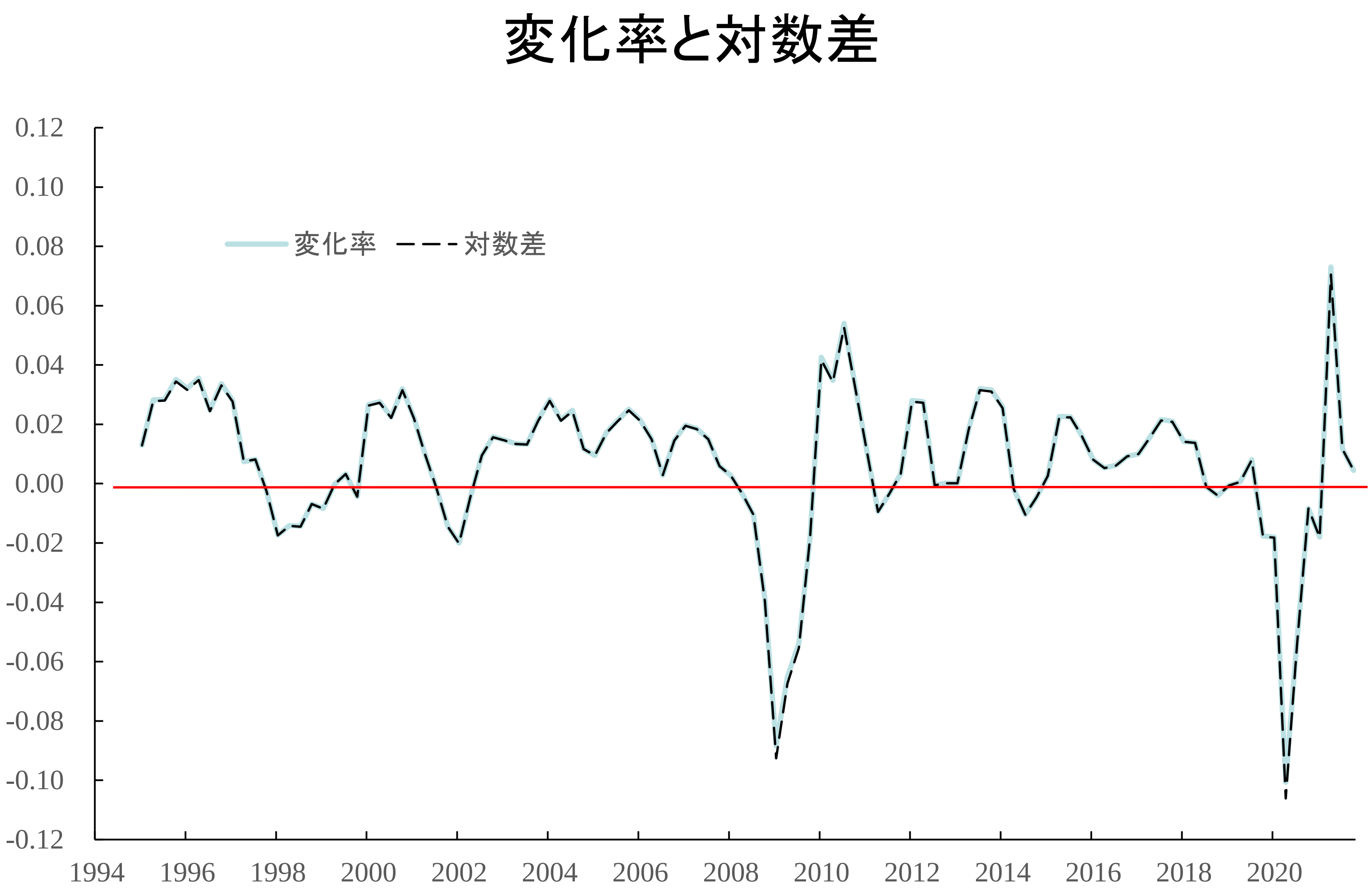
[補足]　εが0に近い値であれば(正でも負でも)、
$$\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$$

ln(*y*) と直線 *y*−1 の関係



$y = 1$付近では、$\ln(y) \approx y - 1$
$y = 1 + \varepsilon$と設定すると、
εが0に近いとき
$$\ln(1+\varepsilon) \approx (1+\varepsilon) - 1 = \varepsilon$$

・　日本のGDP



変化率と対数差
変化率
対数差
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.10
-0.12
1994
1996
1998
2000
2002
2004
2006
2008
2010
2012
2014
2016
2018
2020