



豊富な実証例から
計量経済学の
「生きた」知識を身につける！

実証経済学研究会

第6章 定式化

『入門 実践する計量経済学』
PPT

- 線形回帰モデル
- 対数値を用いる利点
- 対数を用いたモデル
- ラグ付き説明変数
- トレンド変数
- 測定単位

線形回帰モデル

• 線形回帰モデル

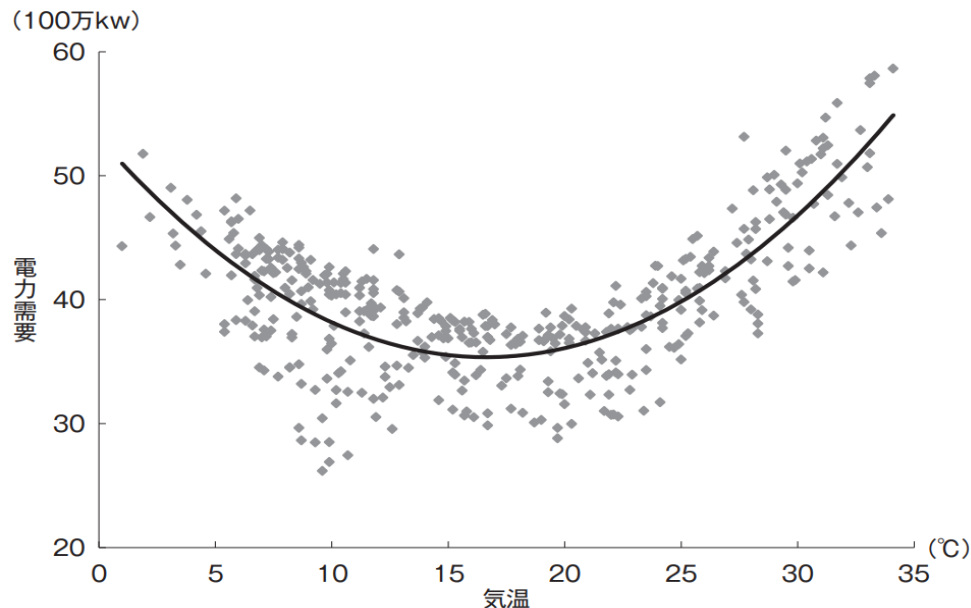
$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_K X_K + u$$

---線形はパラメータに対して線形であればよい

$$Y = \alpha + X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + \cdots + X_K \beta_K + u$$

例：気温と電力需要の例：気温と電力需要の関係

図 6 - 1 気温と電力需要の関係



$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 \underbrace{X_{1t}^2}_{=X_{2t}} + u_t$$

非線形モデルだが、パラメータに関しては線形である。 $X_{2t} = X_{1t}^2$ と定義し推定すると

$$\hat{Y}_t = 53.04 - 2.127X_{1t} + 0.064X_{2t}$$

(0.824) (0.103) (0.003)

表 6 - 1 気温と電力需要

Y : 電力需要 (100万 kw)	X_1 : 気温 (℃)	X_2 : 気温 (℃) の2乗
26.90	9.9	98.01
28.50	9.9	98.01
29.65	8.6	73.96
34.07	10.3	106.09
37.03	6.7	44.89

例：交差項があるケース

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 \underbrace{X_{1i} X_{2i}}_{=X_{3i}} + u_i$$

--- Y_i : 賃金、 X_{1i} : 教育年数、 X_{2i} : 勤続年数

--- モデルは次のように変形できる

$$Y_i = \alpha + (\beta_1 + \beta_3 X_{2i}) X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

例：パラメータに関して非線形な場合

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i}^{\beta_2} + u_i$$

対数を用いる利点

・対数をとると線形になることがある

例：コブダグラス型生産関数

$$Q_i = AK_i^{\beta_1} L_i^{\beta_2}$$
$$\underbrace{\ln(Q_i)}_{=Y_i} = \underbrace{\ln(A)}_{=\alpha} + \beta_1 \underbrace{\ln(K_i)}_{=X_{1i}} + \beta_2 \underbrace{\ln(L_i)}_{=X_{2i}}$$

[補足]

収穫一定($\beta_1 + \beta_2 = 1$)を仮定するなら、モデルは、

$$\ln(Q_i) = \ln(A) + \beta_1 \ln(K_i) + (1 - \beta_1) \ln(L_i)$$

両辺から $\ln(L_i)$ を引くと、

$$\underbrace{\ln(Q_i) - \ln(L_i)}_{=Y_i} = \underbrace{\ln(A)}_{=\alpha} + \beta_1 \underbrace{(\ln(K_i) - \ln(L_i))}_{=X_{1i}}$$

・対数をとると分散が一定になることがある

例：為替レートモデル

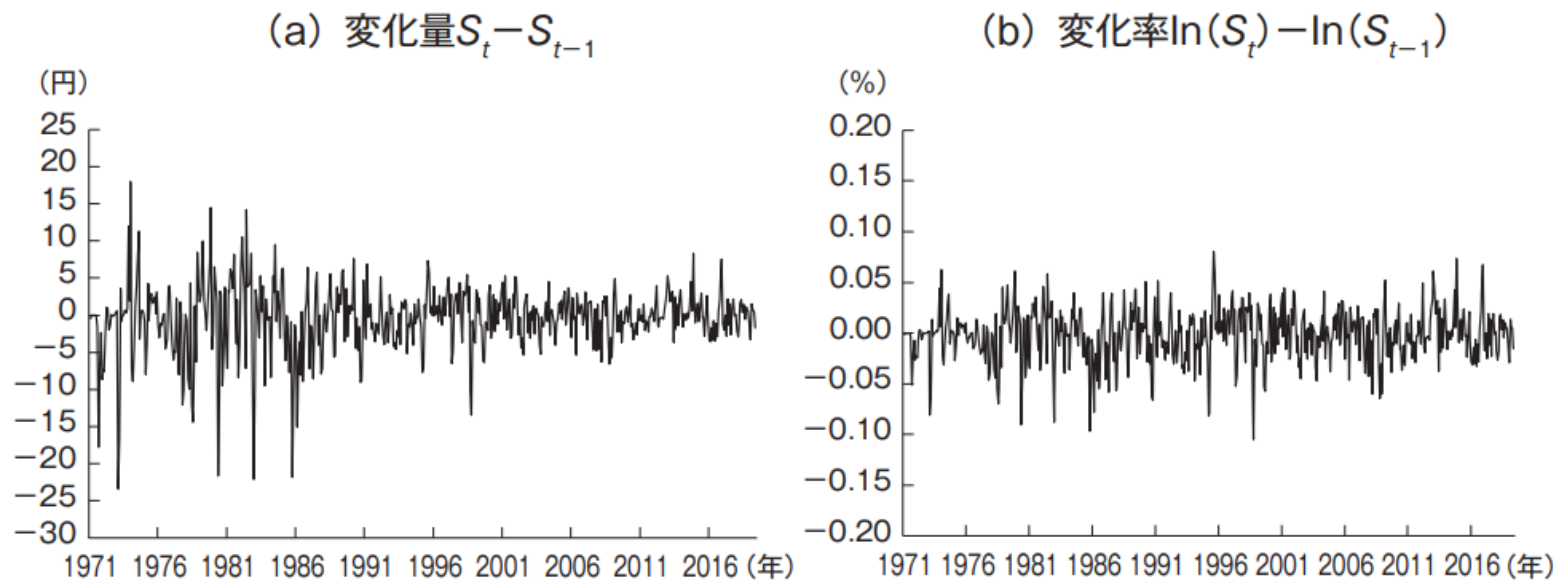
ドル円レートを S_t としたとき、どちらが良いモデルか

$$S_t - S_{t-1} = \alpha + \beta X_t + u_{1t}$$

$$\ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) = \alpha + \beta X_t + u_{2t}$$

ただし、 $E[u_{1t}^2] = \sigma_1^2$ 、 $E[u_{2t}^2] = \sigma_2^2$

図 6 - 2 ドル円レートの推移



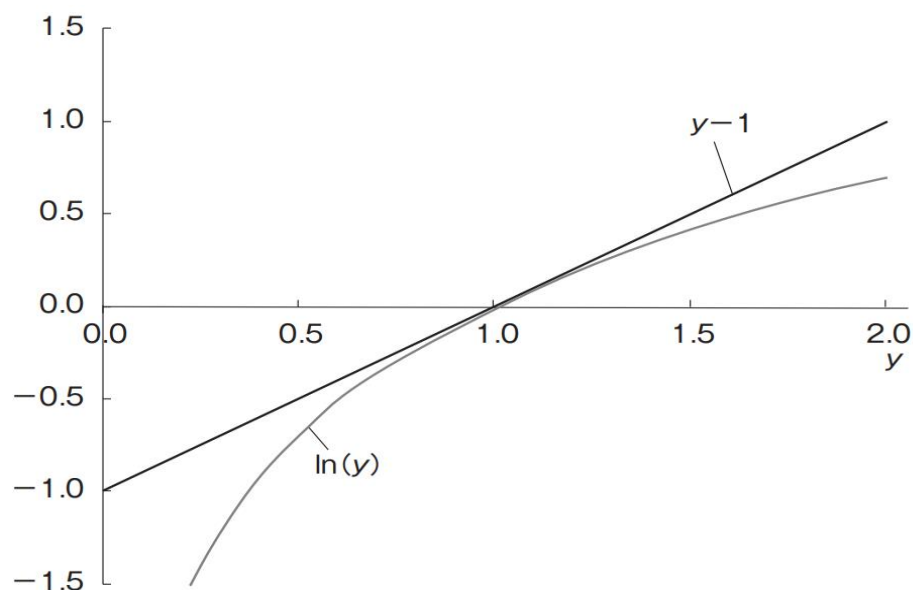
- 対数の差は変化率と解釈される

$$\begin{aligned}\ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) &= \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\right) \approx \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\end{aligned}$$

[補足] ε が0に近い値であれば(正でも負でも)、

$$\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$$

図 A - 2 $\ln(y)$ と直線 $y-1$ の関係



$y = 1$ 付近では、 $\ln(y) \approx y - 1$
 $y = 1 + \varepsilon$ と設定すると、
 ε が0に近いとき

$$\ln(1 + \varepsilon) \approx (1 + \varepsilon) - 1 = \varepsilon$$

対数を用いたモデル

- 対数対数(log-log)モデル

$$\ln(Y) = \alpha + \beta \ln(X) + u$$

--- β : X が1%変化すると、 Y は β %変化する(弾力性)

- 対数線形(log-linear)モデル

$$\ln(Y) = \alpha + \beta X + u$$

--- β : X が1単位変化すると、 Y は $100 \times \beta$ %変化する

対数対数(log-log)モデル

$$\ln(Y) = \alpha + \beta \ln(X) + u$$

β : X が1%変化すると、 Y は $\beta\%$ 変化する

[証明] X が X' に変化したとき、 $\ln(Y)$ から $\ln(Y')$ への変化は、

$$\begin{aligned}\ln(Y') - \ln(Y) &= \underbrace{(\alpha + \beta \ln(X'))}_{\ln(Y')} - \underbrace{(\alpha + \beta \ln(X))}_{\ln(Y)} \\ &= \beta(\ln(X') - \ln(X))\end{aligned}$$

この関係式を、 β について解くと、

$$\beta = \frac{\ln(Y') - \ln(Y)}{\ln(X') - \ln(X)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{Y' - Y}{Y}\right)}{\ln\left(1 + \frac{X' - X}{X}\right)} \approx \frac{\frac{Y' - Y}{Y}}{\frac{X' - X}{X}}$$

β はまさに弾力性。 X が1%変化する ($\frac{X' - X}{X} = 0.01$) なら、

$$\frac{Y' - Y}{Y} = \beta \frac{X' - X}{X} = \beta \times 0.01$$

対数線形(log-linear)モデル

$$\ln(Y) = \alpha + \beta X + u$$

β : X が1単位変化すると、 Y は $100 \times \beta\%$ 変化する

[証明] X が X' に変化したとき、 $\ln(Y)$ から $\ln(Y')$ への変化は、

$$\begin{aligned}\ln(Y') - \ln(Y) &= \underbrace{(\alpha + \beta X')}_{\ln(Y')} - \underbrace{(\alpha + \beta X)}_{\ln(Y)} \\ &= \beta(X' - X)\end{aligned}$$

この関係式を、 β について解くと、

$$\beta = \frac{\ln(Y') - \ln(Y)}{X' - X} = \frac{\ln\left(\frac{Y'}{Y}\right)}{X' - X} = \frac{\ln\left(1 + \frac{Y' - Y}{Y}\right)}{X' - X} \approx \frac{\frac{Y' - Y}{Y}}{X' - X}$$

Y の変化が小さいなら、

$$\frac{Y' - Y}{Y} = \beta (X' - X)$$

例：重力モデル——対数対数モデルの例

- ・ 万有引力の法則: 「2つの物体間に働く力(F)」は、それぞれの質量(M 、 m)と相互の距離(r)に依存する

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

--- G は万有引力定数

- ・ 重力モデル: 「2国間の貿易量($Trade_{ij}$)」は、それぞれのGDP(GDP_i 、 GDP_j)と相互の距離(D_{ij})に依存する

$$Trade_{ij} = A \frac{GDP_i GDP_j}{D_{ij}}$$

--- 両辺の対数をとると、対数対数モデルになる

$$\ln(Trade_{ij}) = \ln(A) + \beta_1 \ln(GDP_i) + \beta_2 \ln(GDP_j) + \beta_3 \ln(D_{ij})$$

--- 非常に当てはまりの良いモデル

米国とカナダの国境効果はどれくらいあるか？

$$\ln(\text{Trade}_{ij}) = \alpha + \beta_1 \ln(\text{GDP}_i) + \beta_2 \ln(\text{GDP}_j) + \beta_3 \ln(D_{ij}) + \gamma B_{ij}$$

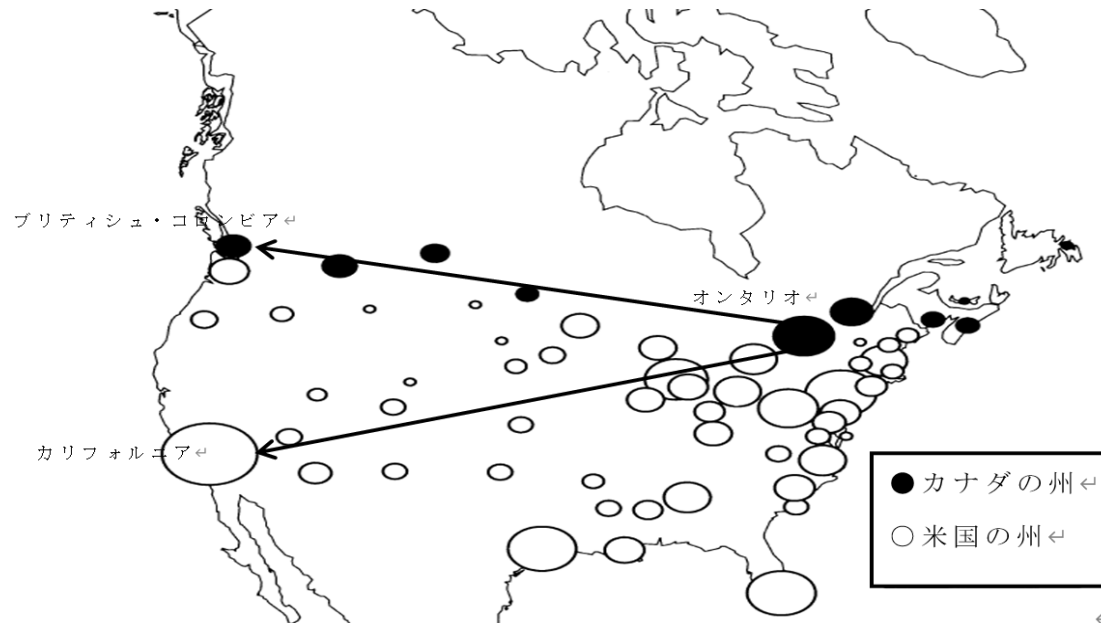
--- Trade_{ij} : i 州から j 州への輸出

--- GDP_i : i 州の経済規模(総生産額)、 GDP_j : j 州の経済規模(総生産額)

--- D_{ij} : i 州と j 州との距離

--- B_{ij} は、 i 州と j 州が同じ国に所属すれば1となる($\gamma > 0$ なら、国境には貿易
阻害効果がある)

図 12-5 北米経済マップ



(出所) McCallum(1995)の Figure 1。

説明変数	推定式		
	(1)	(2)	(3)
$\ln(GDP_i)$	1.30 (0.06)	1.21 (0.03)	1.15 (0.04)
$\ln(GDP_j)$	0.96 (0.06)	1.06 (0.03)	1.03 (0.04)
$\ln(D_{ij})$	-1.52 (0.10)	-1.42 (0.06)	-1.23 (0.07)
B_{ij}		3.09 (0.13)	3.11 (0.16)
OBS	90	683	462
$\bar{R}^2$	0.890	0.811	0.801

注)()内は標準誤差、OBSはサンプルサイズ、 $\bar{R}^2$ は自由度調整済決定係数

---(1)はカナダのデータ、(2)は全データ、(3)は小さい州を除く全データ

--- $\hat{\gamma} = 3.09$ であり、 i 州と j 州が同じ国に所属すれば22倍($= e^{3.09}$)も貿易量が増える

[証明] $Trade_{ij} = e^{\ln(Trade_{ij})}$

$$= e^{\alpha + \beta_1 \ln(GDP_i) + \beta_2 \ln(GDP_j) + \beta_3 \ln(D_{ij}) + \gamma B_{ij}}$$

$$= e^{\gamma B_{ij}} e^{\alpha + \beta_1 \ln(GDP_i) + \beta_2 \ln(GDP_j) + \beta_3 \ln(D_{ij})}$$

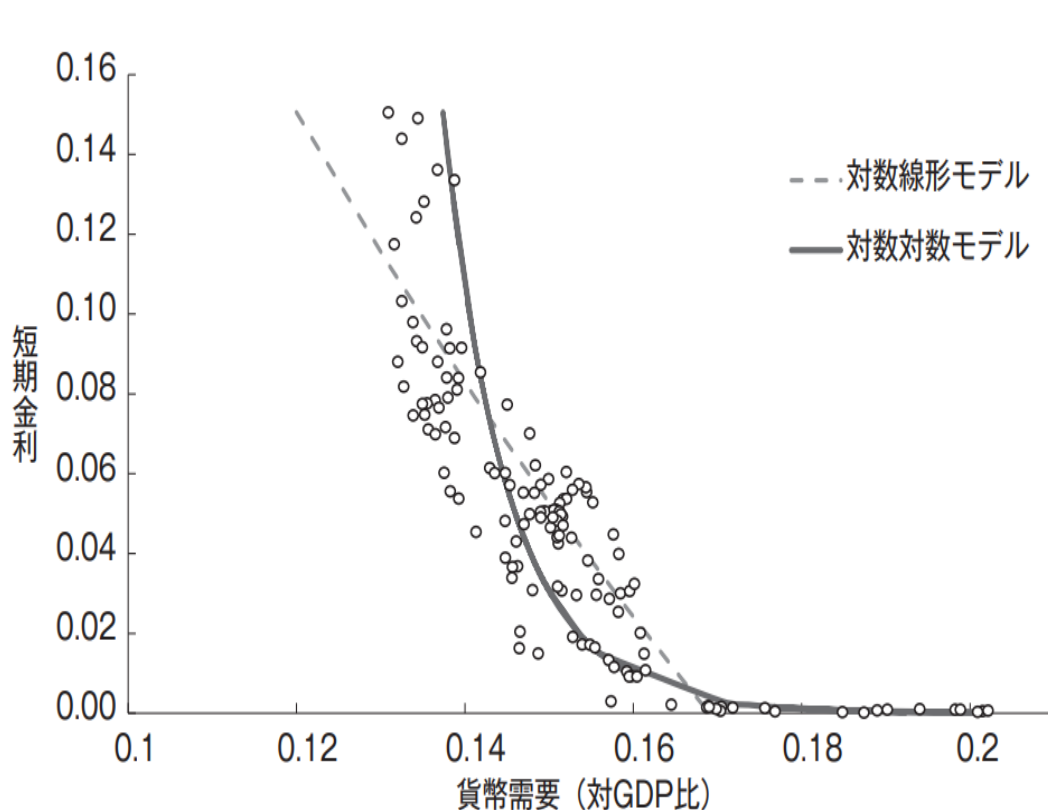
なお、 $e^{3.09} = 22$

例：米国の貨幣需要関数の推定

$$\text{対数対数モデル: } \ln\left(\frac{M_t}{GDP_t}\right) = \alpha + \beta \ln(r_t) + u_t$$

$$\text{対数線形モデル: } \ln\left(\frac{M_t}{GDP_t}\right) = \alpha + \beta r_t + u_t$$

図 6 - 5 短期金利と貨幣需要(対 GDP 比)



$$\ln\left(\frac{M_t}{GDP_t}\right) = -2.089 - 0.055 \ln(r_t)$$

(0.009) (0.002)
 $R^2 = 0.816$

$$\ln\left(\frac{M_t}{GDP_t}\right) = -1.778 - 2.276 r_t$$

(0.008) (0.138)
 $R^2 = 0.671$

ラグ付き説明変数

・分布ラグモデル

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_p X_{t-p} + u_t$$

--- X_{t-j} :ラグ付き説明変数、 p :ラグの長さ

・動学乗数 β_h : X_t が h 期先の Y_{t+h} に与える効果

---たとえば、 $t+1$ 期には、

$$Y_{t+1} = \alpha + \beta_0 X_{t+1} + \beta_1 X_t + \cdots + \beta_p X_{t-p+1} + u_{t+1}$$

X_t が1単位変化すると Y_{t+1} は β_1 変化する

・累積動学乗数: 動学乗数の累積値

--- X_t が1単位変化したとき、累積動学乗数は、

t 期: β_0

$t+1$ 期: $\beta_0 + \beta_1$

$t+p$ 期: $\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{p-1} + \beta_p$

(例) 原油価格とガソリン価格の関係

- Oil_t : 原油価格、 $Price_t$: 日本のガソリン価格

$$Y_t = 100 \times \{\ln(Price_t) - \ln(Price_{t-1})\}$$

$$X_t = 100 \times \{\ln(Oil_t) - \ln(Oil_{t-1})\}$$

表 6 - 2 分析用データの一部抜粋

	ガソリン価格 変化率 (Y_t)	原油価格 変化率 (X_t)	1 期ラグ (X_{t-1})	2 期ラグ (X_{t-2})
2001年 1 月	-2.08	3.74	-20.89	5.53
2001年 2 月	0.00	6.70	3.74	-20.89
2001年 3 月	1.64	-7.11	6.70	3.74
2001年 4 月	0.00	6.47	-7.11	6.70
2001年 5 月	0.88	8.20	6.47	-7.11

▪ 推定結果

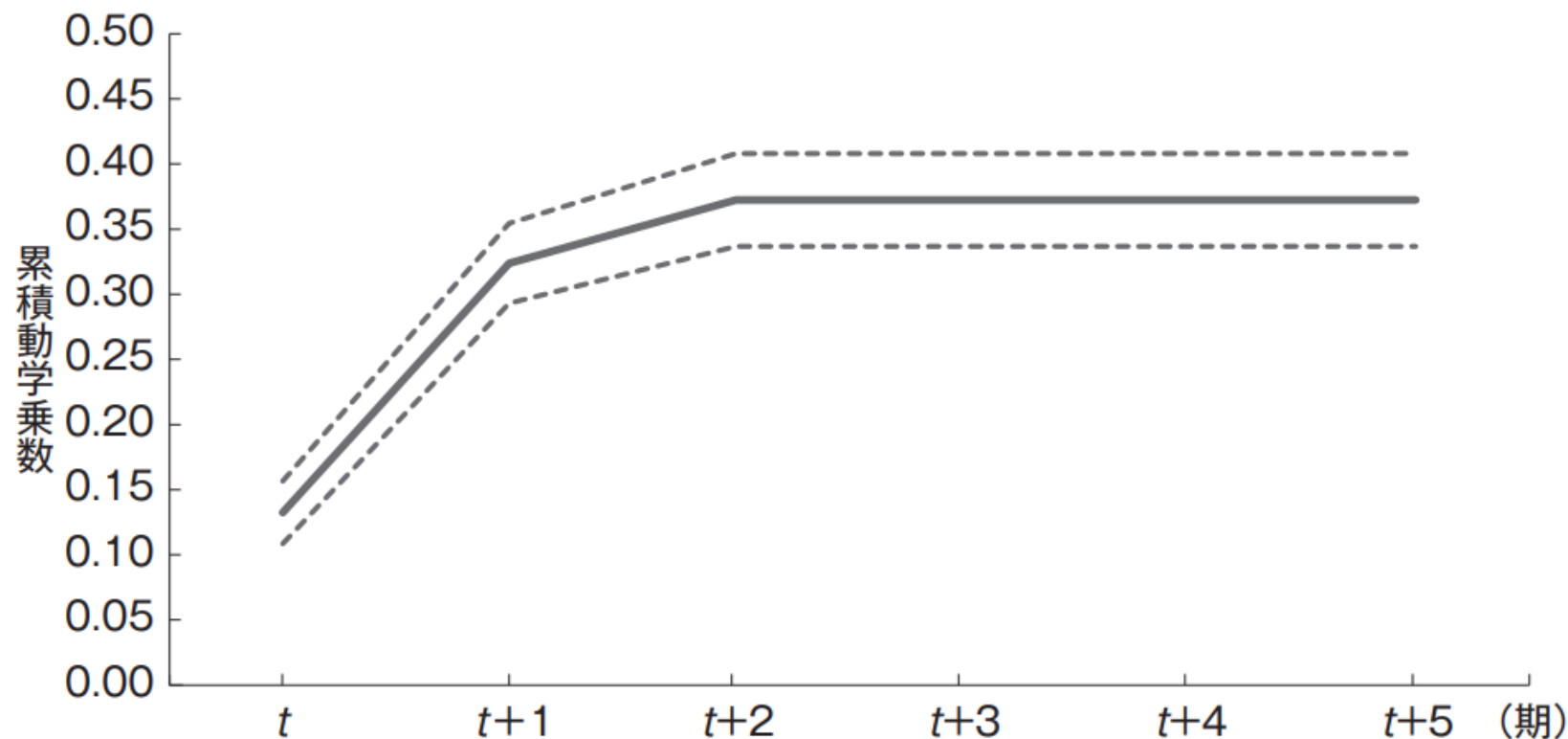
$$\hat{Y}_t = 0.060 + 0.132X_t + 0.191X_{t-1} + 0.049X_{t-2}$$

(0.113) (0.012) (0.012) (0.012)

--- 原油価格が1%上昇すると、その期のガソリンは0.132%上がる

--- 原油価格が1%上昇すると、次期のガソリンは0.191%上がる

図 6 - 6 原油価格からガソリン価格への累積動学乗数



- ラグの長さの決め方
 - 一般からの特定法
 - 情報量規準(AICとBIC)

一般からの特定法

① ラグの長さの最大値を選ぶ(たとえば $p_{max} = 12$)

②
$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_{12} X_{t-12} + u_t$$

$$H_0: \beta_{12} = 0, H_1: \beta_{12} \neq 0$$

③ H_0 が棄却されたら、 $p = 12$

H_0 が採択されたら、

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_{11} X_{t-11} + u_t$$

$$H_0: \beta_{11} = 0, H_1: \beta_{11} \neq 0$$

④ H_0 が棄却されたら、 $p = 11$

H_0 が採択されたら、

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_{10} X_{t-10} + u_t$$

$$H_0: \beta_{10} = 0, H_1: \beta_{10} \neq 0$$

⑤ H_0 が棄却されるまで続ける

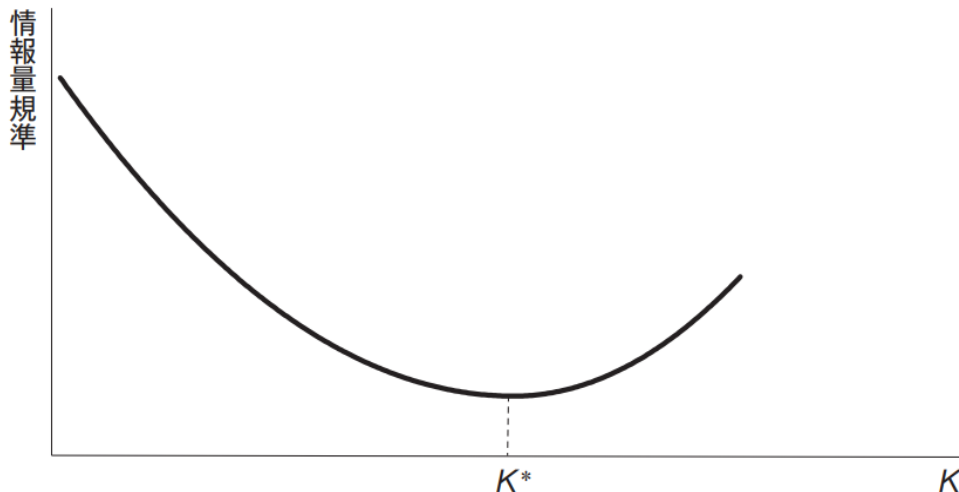
情報量規準

- ・ トレードオフ: ラグの長さ p を増やすと、残差2乗和 SSR は低下するが、パラメータの推定精度は下がる
- ・ 情報量規準は、トレードオフをバランスさせる($K = p + 1$)

$$AIC = \ln\left(\frac{SSR}{T}\right) + (K + 1)\frac{2}{T}$$

$$BIC = \ln\left(\frac{SSR}{T}\right) + (K + 1)\frac{\ln(T)}{T}$$

図 6 - 7 情報量規準と説明変数の数 K との関係



- ・ 情報量規準を最小化させる K^* を選択する
- ・ BICはAICよりも、第2項(コスト)が大きい
ため、短い p を選ぶ傾向がある
 $\ln(T) > 2 \text{ if } T \geq 8$
- ・ AICとBICで結果が違うなら、両方で推定
して、推定結果が頑健かを確認する

例：原油価格とガソリン価格の関係

- ・ 実証分析では、 $p = 2$ を用いた

--- 一般からの特定法、AIC、BICすべてが $p = 2$ を選択した

表 6 - 3 情報量規準

	情報量規準	
	AIC	BIC
$p = 0$	1022.5	1036.0
$p = 1$	849.2	866.0
$p = 2$	834.8	855.1
$p = 3$	835.4	859.1
$p = 4$	837.1	864.1
$p = 5$	838.1	868.5
$p = 6$	840.1	873.8
$p = 7$	842.0	879.2
$p = 8$	843.7	884.2
$p = 9$	845.3	889.2
$p = 10$	846.8	894.1
$p = 11$	847.4	898.0
$p = 12$	846.6	900.6

トレンド変数

- ・トレンド変数 t は、1ずつ増加していく変数

	t
1970	1
1971	2
1972	3
1973	4
1974	5
1975	6
1976	7
1977	8
1978	9

---変数にトレンドがあるときに用いる

- ・被説明変数が自然対数なら、トレンド変数の係数は平均変化率と解釈される

[証明]

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t$$

--- 被説明変数は、 $\ln(GDP_t)$ もしくは世界平均気温の対数

--- $t - 1$ 時点では、 $Y_{t-1} = \alpha + \beta(t - 1) + u_{t-1}$

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= (\alpha + \beta t + u_t) - (\alpha + \beta(t - 1) + u_{t-1}) \\ &= \beta + (u_t - u_{t-1}) \end{aligned}$$

このため、

$$E[Y_t - Y_{t-1}] = \beta$$

測定単位

・モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

・測定単位の変更($Y_i^* = c_Y Y_i$ 、 $X_i^* = c_X X_i$)

--- 両辺に c_Y を掛けると

$$c_Y Y_i = c_Y \alpha + \left(\frac{c_Y}{c_X} \beta \right) c_X X_i + c_Y u_i$$

新たに $\alpha^* = c_Y \alpha$ 、 $\beta^* = \frac{c_Y}{c_X} \beta$ 、 $u_i^* = c_Y u_i$ と定義すると

$$Y_i^* = \alpha^* + \beta^* X_i^* + u_i^*$$

--- 測定単位は読者が見やすいように決定する

見にくい例

① 係数や切片が大きすぎる

2432100000

---測定単位を変えるべき

$\beta^* = \frac{c_Y}{c_X} \beta$ であるから、 c_X を大きく、もしくは c_Y を小さく

② 係数や切片が小さすぎ

0.0000000000271

---四捨五入すると情報が消える

0.000

---エクセルの表示はみにくい

$2.71\text{E} - 11 = 2.71/10^{11}$

---測定単位を変えるべき

$\beta^* = \frac{c_Y}{c_X} \beta$ であるから、 c_X を小さく、もしくは c_Y を大きく

$$\alpha^* = c_Y \alpha, \quad \beta^* = \frac{c_Y}{c_X} \beta$$

例：賃料の決定要因

H駅周辺の賃料(万円)を Y_i 、専有面積(m^2)を X_i とすると、

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 2.6878 + 0.1603X \\ &\quad (0.1006) \quad (0.00338) \\ R^2 &= 0.757 \end{aligned}$$

賃料 Y を1円単位に変換すると($c_Y = 10000$ 、 $c_X = 1$)

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 26878 + 1603X \\ &\quad (1006) \quad (33.8) \\ R^2 &= 0.757 \end{aligned}$$

--- 定数項と係数値は変わる

--- t値と決定係数は同じ

逆双曲正弦関数

- 対数は0より大きい値に対して定義される
 - $y = e^x$ なら、 $x = \ln(y)$ となる。よって、 $y > 0$ となる。
 - 0の対数はとれない
 - (例) コロナの新規感染者数、所得、経験年数、
i国に対する貿易額
- 実証分析では、 $\ln(x+a)$ として定義されたりする
 - $a=1$ を使う
 - a の値に何を使うかで推定結果が異なる

- 逆双曲正弦関数 $\ln(X + \sqrt{X^2 + 1})$

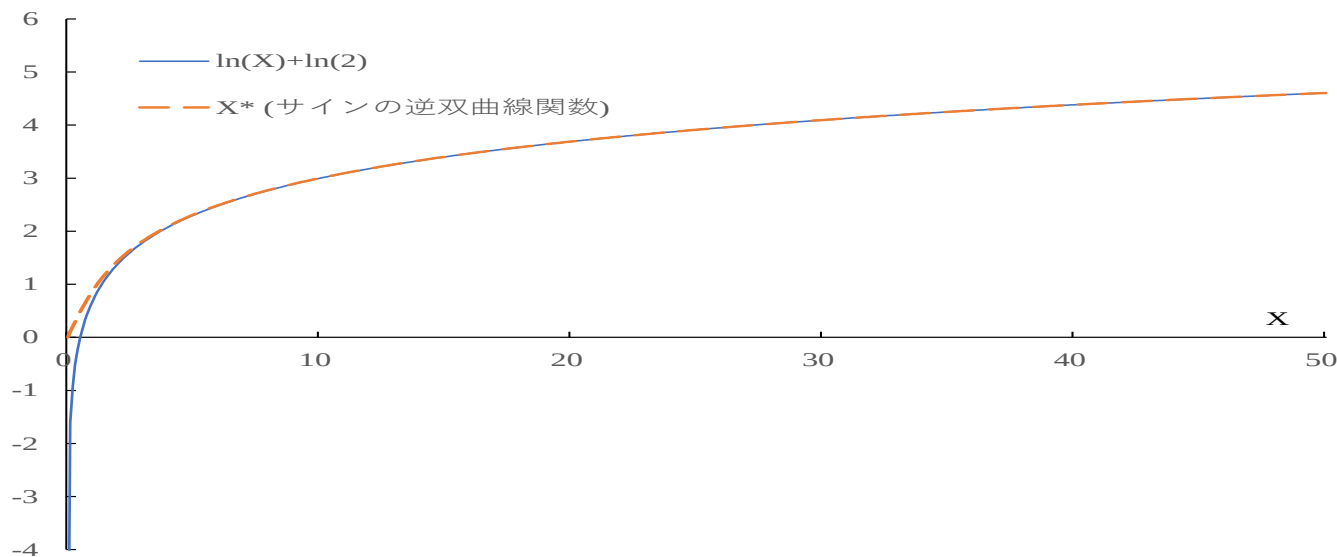
--- $X = 0$ でも定義できる

$$\ln(0 + \sqrt{0 + 1}) = \ln(1) = 0$$

--- X が大きいと、逆双曲正弦関数は $\ln(X) + \ln(2)$ とほぼ同じ

[証明] X が大きくなると、 $\sqrt{X^2 + 1} \approx \sqrt{X^2} = X$

$$\ln(X + \sqrt{X^2 + 1}) \approx \ln(2X) = \ln(X) + \ln(2)$$



$$\{ \ln(X') + \ln(2) \} - \{ \ln(X) + \ln(2) \} = \ln(X') - \ln(X) \approx \frac{X' - X}{X_{34}}$$

まとめ

- 線形回帰モデル
- 対数値を用いる利点
- 対数を用いたモデル
- ラグ付き説明変数
- 測定単位