



豊富な実証例から
計量経済学の
「生きた」知識を身につける！

東洋経済新報社

第4章 仮説検定 藪友良

『入門 実践する計量経済学』
(東洋経済新報社)

PPT

- 仮説検定の手順
- 仮説検定と信頼区間
- p 値
- 平均差の検定
- 仮説検定の注意点

仮説検定の手順

- 手順1: パラメータ β に関する2つの仮説を設定する

帰無仮説 H_0 : 検証したい仮説

$$H_0: \beta = \beta_0$$

対立仮説 H_1 : 帰無仮説が成立しないとき、受け皿となる仮説

--- 両側検定であれば

$$H_1: \beta \neq \beta_0$$

--- 片側検定であれば

$$H_1: \beta < \beta_0 \text{ (もしくは } \beta > \beta_0 \text{)}$$

(例) 実証分析で検証される仮説

$$H_0: \beta = 0 \text{ (XはYに何の影響も与えない)}$$

$$H_1: \beta \neq 0 \text{ (XはYに何らかの影響を与える)}$$

- ・ 手順2:帰無仮説を前提とし、***t*統計量**
を計算する

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{s_{\hat{\beta}}^2}} \sim t(n - 2)$$

- *t*統計量は帰無仮説 $H_0: \beta = \beta_0$ が正しいもとで作る
- *t*統計量を用いた検定は、***t*検定**と呼ばれる
- *t*統計量の値は、***t*値**と呼ばれる

- ・ 手順3:推定結果が帰無仮説と矛盾しているかを判断する
 - 帰無仮説と整合的なら、帰無仮説が採択される
 - 帰無仮説と矛盾するなら、帰無仮説が棄却され、
対立仮説が採択される

仮説検定の手順3の詳細

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

$$H_0: \beta = 0$$

$$H_1: \beta \neq 0$$

- t 統計量 $t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{s_{\hat{\beta}}^2}}$ は帰無仮説 H_0 が正しいもとで作る

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - 0}{\sqrt{s_{\hat{\beta}}^2}} \sim t(n-2) \quad \text{under } H_0$$

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - 0}{\sqrt{s_{\hat{\beta}}^2}} = \underbrace{\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{s_{\hat{\beta}}^2}}}_{t(n-2)} + \underbrace{\frac{\beta}{\sqrt{s_{\hat{\beta}}^2}}}_{\text{分布の中心}} \quad \text{under } H_1$$

① H_0 が正しいと、 t 統計量は0を中心に t 分布

② H_1 が正しいと、 t 統計量は0から離れた場所で分布

- t 検定の判断

$|t_{\hat{\beta}}| < c$ ならば、帰無仮説を採択する

$|t_{\hat{\beta}}| \geq c$ ならば、帰無仮説を棄却する

--- c は臨界値と呼ばれる

--- δ は有意水準(H_0 が正しいとき、 H_0 を誤って棄却する確率)と呼ばれる

図 4 - 1 t 統計量と仮説検定の判断①

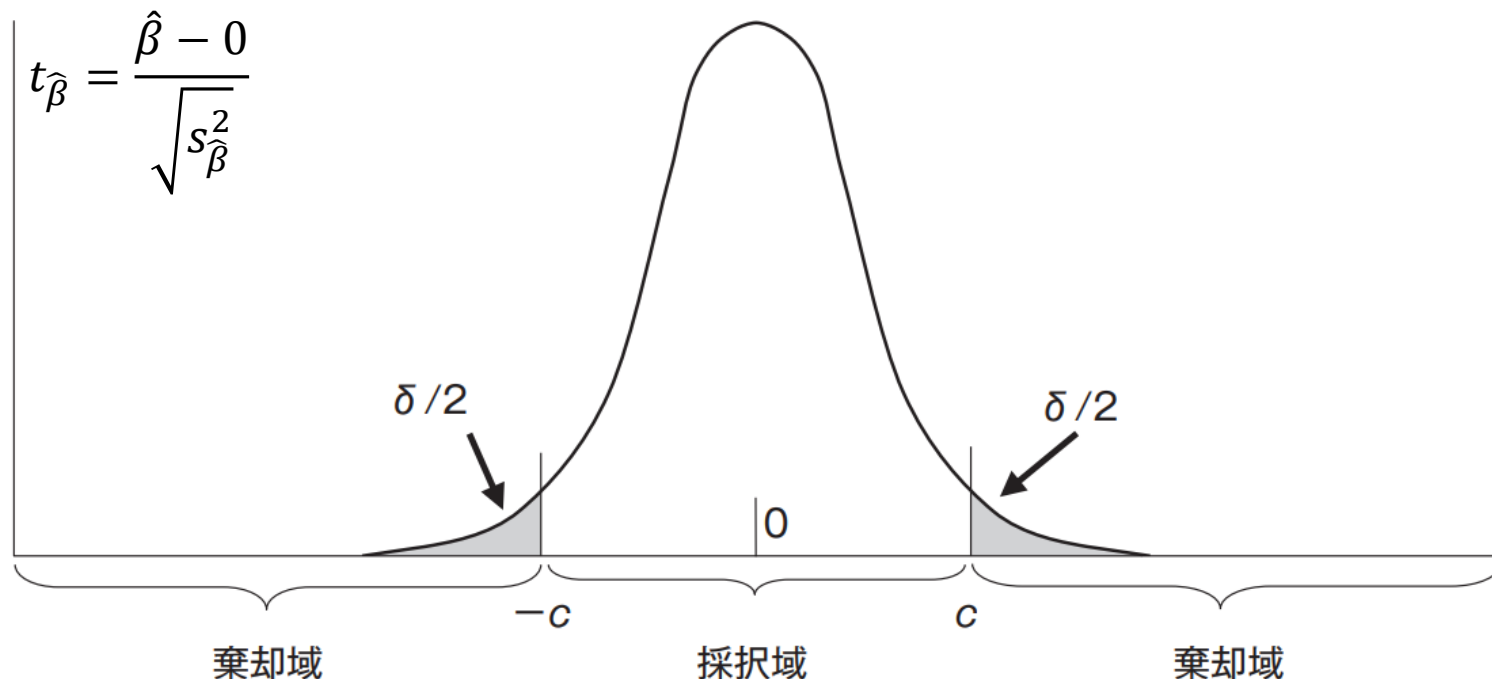


表 4 - 1 仮説検定における 4 つの可能性

		検定結果	
		帰無仮説 H_0 を採択	対立仮説 H_1 を採択
本当の状態	帰無仮説 H_0 が正しい	正しい判定	第1種の過誤
	対立仮説 H_1 が正しい	第2種の過誤	正しい判定

- **有意水準**は、第1種の過誤(H_0 が正しいとき、 H_0 を誤って棄却する)の確率

- 1、5、10%などの低い値に設定する
- H_0 が誤って棄却されることは稀であり、 H_0 の棄却は「意味ある(有意な)原因」から生じている
- 第2種の過誤(H_1 が正しいとき、 H_0 を誤って採択する)の確率は高い可能性あり、 H_0 の採択に意味はない

帰無仮説は棄却することに意味があり、採択しても強い意味はない⁹

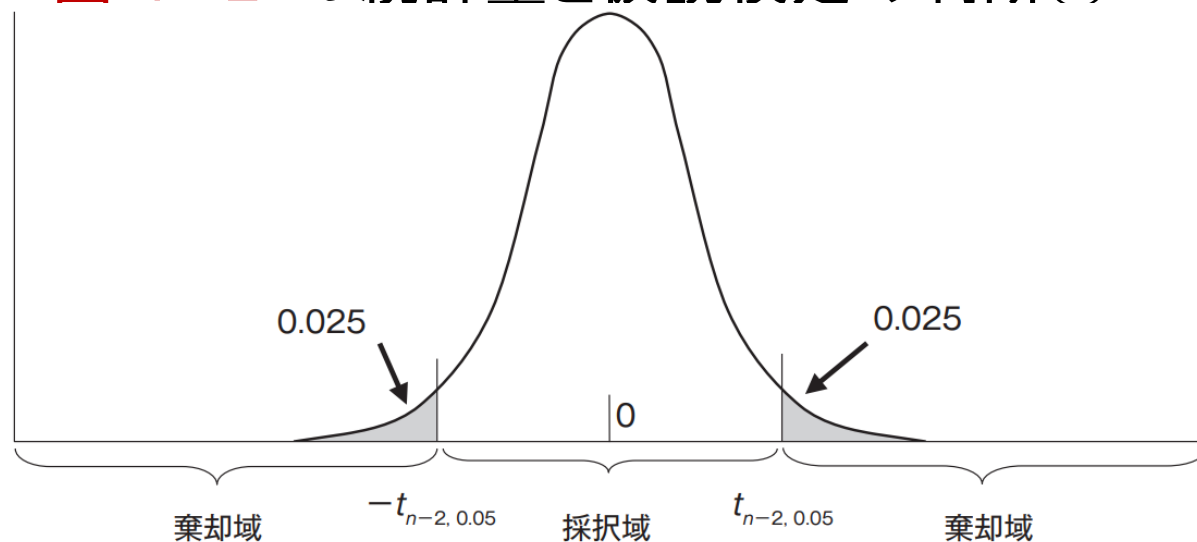
例) 両親と子供の身長

- X : 両親の平均身長、 Y : 子供の身長
- $H_0: \beta = 0$ 、 $H_1: \beta \neq 0$

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{s_{\hat{\beta}}^2}} \sim t(n-2)$$

- 有意水準5%とした仮説検定

図 4 - 2 t 統計量と仮説検定の判断②



--- $n = 164$ なので、 $t_{n-2, 0.05} = t_{162, 0.05} = 1.979$
標準正規分布と仮定すると、1.96となる

- OLSによる推定結果

$$\hat{Y} = 58.41 + 0.661X$$
$$(13.82) \quad (0.08)$$

---- t統計量を計算すると

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{s_{\hat{\beta}}^2}} = \frac{0.661}{0.08} = 8.2$$

--- これは1.979より大きいため、 $H_0: \beta = 0$ は棄却される
(両親の身長は、子供の身長に影響を与える)

仮説検定と信頼区間

▪ 仮説検定と信頼区間の関係

--- $H_0: \beta = \beta_0$

$H_1: \beta \neq \beta_0$

--- t 統計量は、 H_0 が正しいもとで作る

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}}$$

--- H_0 の採択域

$$-t_{n-2,0.05} < \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}} < t_{n-2,0.05}$$

両辺に $-s_{\hat{\beta}}$ を掛けてから両辺に $\hat{\beta}$ を足すと

$$\underbrace{\hat{\beta} - t_{n-2,0.05}s_{\hat{\beta}}}_{\text{信頼区間の下限}} < \beta_0 < \underbrace{\hat{\beta} + t_{n-2,0.05}s_{\hat{\beta}}}_{\text{信頼区間の上限}}$$

--- 信頼区間内に β_0 があれば H_0 は採択される(信頼区間外なら棄却)

例) 両親と子供の身長

- X : 両親の平均身長、 Y : 子供の身長
- OLSによる推定結果

$$\hat{Y} = 58.41 + 0.661X$$

(13.82) (0.08)

--- 係数 $\hat{\beta}$ の95%信頼区間

$$\underbrace{0.661 - 1.96 \times 0.08}_{0.50} < \beta_0 < \underbrace{0.661 + 1.96 \times 0.08}_{0.82}$$

--- $H_0: \beta = \beta_0 = 0$ とすると、95%信頼区間は0を含んでいないため
 H_0 は棄却される

--- ゴールトンの研究では、係数 β は $2/3 (\approx 0.67)$

$H_0: \beta = \beta_0 = 0.67$ とすると、95%信頼区間は0.67を含んでおり、 H_0 は棄却できない

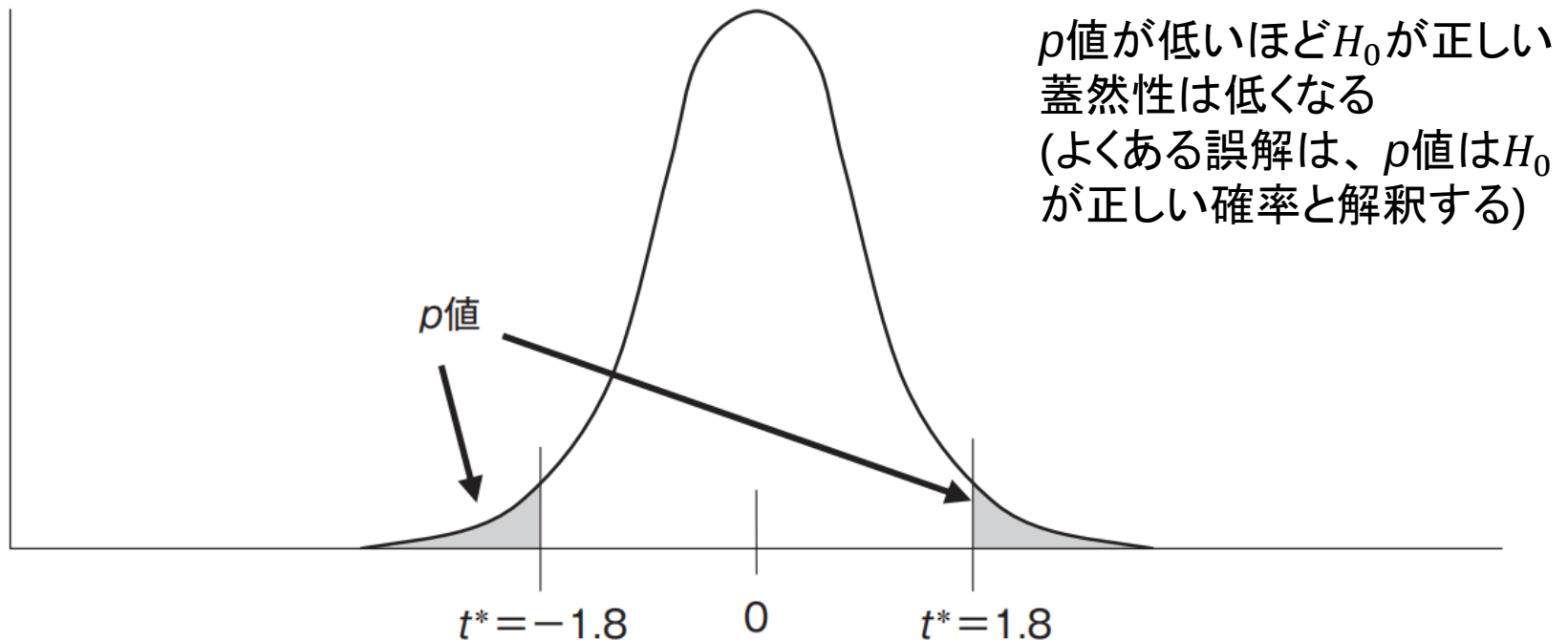
***p*值**

p 値とは何か

- ・分析の結果、 t 統計量が t^* という値をとったとする

$$p\text{値} = P\left\{|t^*| < |t_{\hat{\beta}}|\right\} \quad \text{under } H_0$$

図 4 - 3 t 値が $t^* = 1.8$ のときの p 値



- ・ p 値をみることで何%の有意水準で H_0 が棄却できるかがわかる

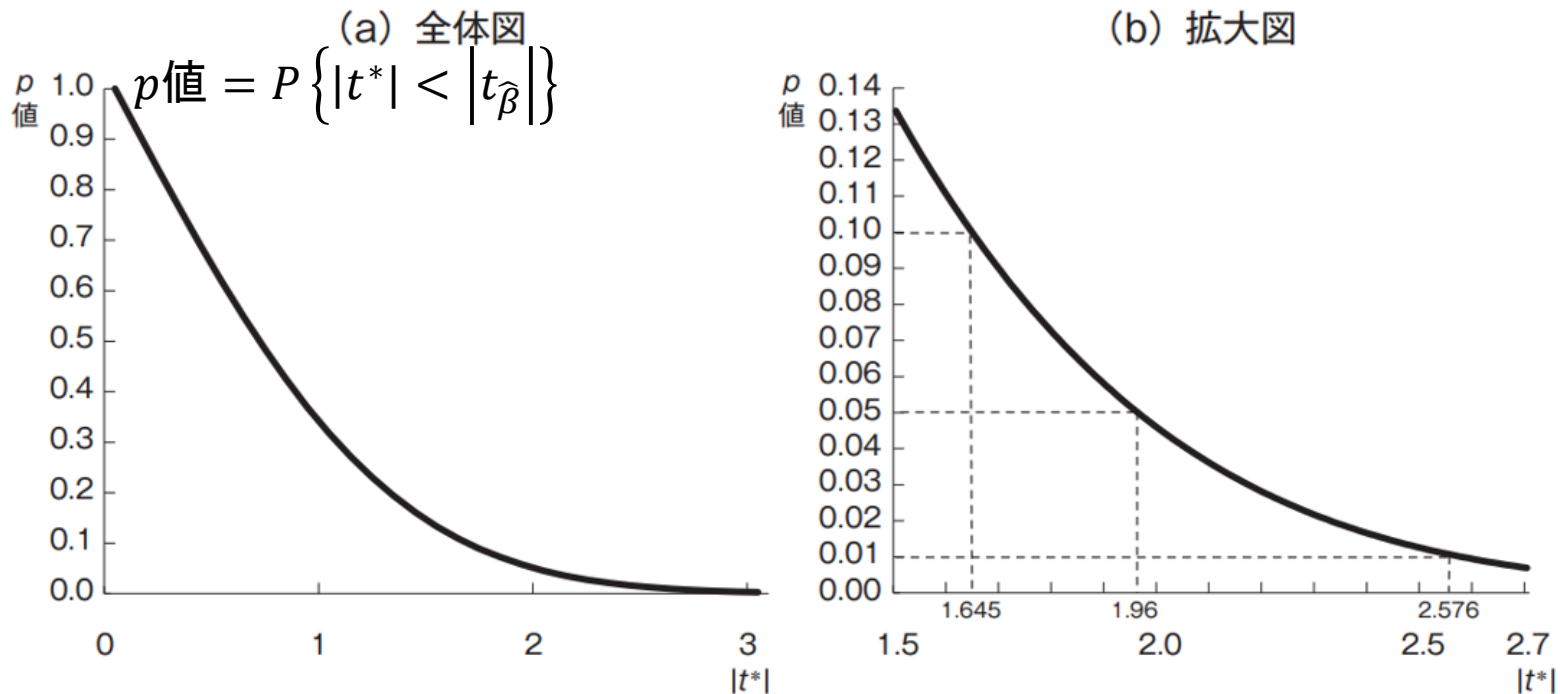
$0.1 < p\text{値}$ $\Rightarrow$ 有意ではない

$0.05 < p\text{値} \leq 0.1$ $\Rightarrow$ 10%の有意水準で H_0 を棄却

$0.01 < p\text{値} \leq 0.05$ $\Rightarrow$ 5%の有意水準で H_0 を棄却

$p\text{値} \leq 0.01$ $\Rightarrow$ 1%の有意水準で H_0 を棄却

図 4 - 4 $|t^*|$ と p 値との関係



- 仮説検定をしないでも、 p 値をみるだけで、有意な結果であるか、有意水準は何%かの判断ができる

例) 両親と子供の身長

Y: 子供の身長

X(parent): 両親の平均身長

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	164
Model	1167.15084	1	1167.15084	F(1, 162)	=	67.69
Residual	2793.31877	162	17.2427085	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.2947
				Adj R-squared	=	0.2903
Total	3960.46961	163	24.2973596	Root MSE	=	4.1524

height	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
parent	.6608823	.0803273	8.23	0.000	.5022586	.819506
_cons	58.40884	13.82755	4.22	0.000	31.10336	85.71432

$$\hat{Y} = 58.41 + 0.661X$$

(13.82) (0.08)

平均差の検定

- ・ 差の検定: 2グループの各平均が同じか否かを調べる検定

- ・ 数学の点数について男女の違いを分析する

$$Y_i = \mu_m + (\mu_f - \mu_m)F_i + u_i$$

--- Y_i : 生徒 i の点数

--- μ_m : 男子生徒の平均、 μ_f : 女子生徒の平均

--- F_i : ダミー変数(女子なら1、男子なら0となる変数)

・ 推定モデル

$$Y_i = \alpha + \beta F_i + u_i$$

$$\alpha = \mu_m, \beta = \mu_f - \mu_m$$

・ 仮説の設定

$$H_0: \beta = 0 \text{ (つまり、} \mu_f - \mu_m = 0 \text{)}$$

$$H_1: \beta \neq 0 \text{ (つまり、} \mu_f - \mu_m \neq 0 \text{)}$$

表 4 - 3 生徒 5 人分のデータ

生徒の番号	女性ダミー	数学の点数
1	1	31.55
2	1	45.50
3	0	64.23
4	1	47.96
5	0	46.73

(例) 中学2年生の成績(TIMSS)

--- 国際数学・理科教育動向調査、4508(男2259、女2249)

--- 点数の標本平均は50点、標本標準偏差は10点

--- 数学データ

$$\hat{Y} = 50.21 - 0.422F$$

(0.210) (0.298)

このとき、 $t_{\hat{\beta}} = -0.422/0.298 = -1.42$ と小さい

$$p\text{値} = P\left\{|t_{\hat{\beta}}| > 1.42\right\} = 0.157$$

有意水準10%でも H_0 を棄却できない

--- 理科データ

$$\hat{Y} = 50.63 - 1.258F$$

(0.210) (0.297)

このとき、 $t_{\hat{\beta}} = -1.258/0.297 = -4.23$ と絶対値で大きい

$$p\text{値} = P\left\{|t_{\hat{\beta}}| > 4.23\right\} = 0.00002$$

有意水準1%で H_0 は棄却される

仮説検定の注意点

- ・ 有意性と重要性は異なるコンセプト
 - 重要性は係数値をみながら、分析者が判断する必要がある

(例) 体重の決定要因

Y : 体重(Kg)、 X_1 : 身長(cm)、 X_2 : 労働時間(1日)、 X_3 : 喫煙本数(1日)

$$\hat{Y} = 0.5X_1 + 0.01X_2 - 0.4X_3$$

(0.1) (0.005) (0.24)

--- 有意性でみると $X_1 > X_2 > X_3$

$$t_1 = \frac{0.5}{0.1} = 5, \quad t_2 = \frac{0.01}{0.005} = 2, \quad t_3 = \frac{-0.4}{0.24} = -1.67$$

各変数は1%、5%、10%有意となる

--- 予測の観点からは、 $X_1 > X_3 > X_2$

--- 医師の観点からは、 $X_3 > X_2 > X_1$

まとめ

- 仮説検定の手順

- 検定と信頼区間の関係

 - 信頼区間をみれば仮説検定の判断ができる

- p 値

 - 仮説検定の判断をする便利な指標

- 平均差の検定

 - ダミー変数を用いた回帰モデルで平均差の検定ができる

- 有意性と重要性の違い