16章
非定常時系列

藪友良

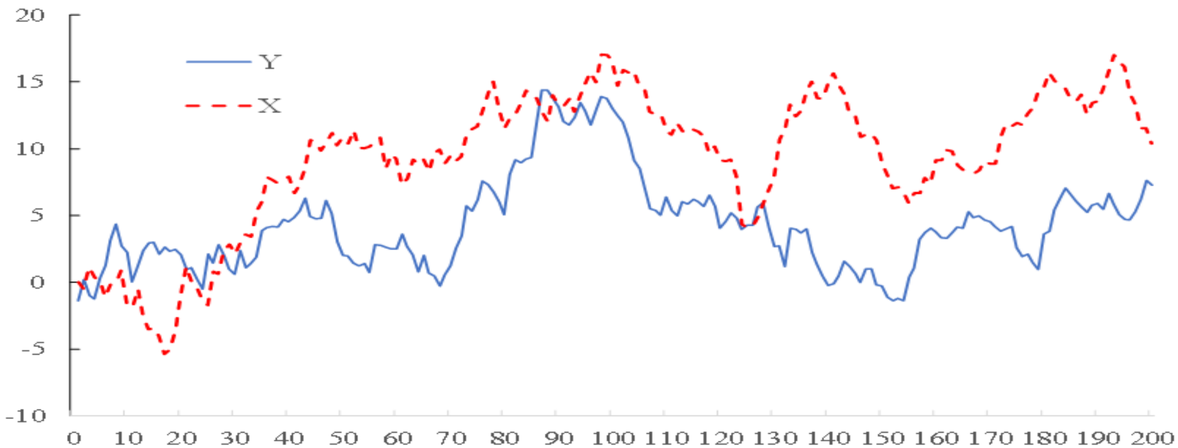
- **見せかけの回帰**

- **単位根検定**
  --- DF検定、ADF検定、DF-GLS検定
  --- 分析期間とサンプルサイズ

- **共和分**
  --- グレンジャー＝エングルの共和分検定
  --- 誤差修正モデル

見せかけの回帰

図 1 変数 **X** と **Y** の推移



- 変数XとYの関係は？

$$\hat{Y}_t = 1.058 + 0.352X_t$$

(0.443) (0.041) R^2=0.26

---XはYの動きを説明する重要な変数に見える

- 変数XとYは人工的に生成しており、両変数に何の関係もない

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_{x,t}$$
$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_{y,t}$$

--- 誤差項($\varepsilon_{x,t}$,$\varepsilon_{y,t}$)は、相互に独立な正規ホワイトノイズ

--- 両変数ともに単位根をもつ（ランダムウォーク）

--- 両変数には確率トレンドがあり、「見せかけの関係」を生じさせる

(ショックの影響は恒久的に残り、それが蓄積されることで確率トレンドになる)

- **見せかけの回帰**

確率トレンドを持つ変数同士で回帰分析をすると、Tが大きくなると

--- 決定係数R^2は1に近づく

--- t統計量の絶対値は発散する(必ず有意になる!)

これらの現象が生じていたら、見せかけの回帰が疑われる

- トレンド変数(1ずつ増加する変数)を入れても解決しない

$$\hat{Y}_t = 1.223 + 0.442X_t - 0.018t$$

(0.644)　(0.06)　(0.005)

--- トレンド変数は一定率の変化を仮定するが、確率トレンドは一定率ではない

- **階差をとる**

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_{x,t}$$

$$\Delta Y_t = 0.042 + 0.016\Delta X_t$$

(0.071)　(0.068)　R^2=0.0003

--- 階差系列($\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$、$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$)は定常、確率トレンドはない

- **変数に単位根があるかを調べることが重要**

--- 変数にトレンドがあるとき、

①単位根があるなら階差をとり、

②単位根がないならトレンド変数tを入れる

単位根検定

- 単位根検定

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

--- 定常性条件：$|a_1| < 1$

--- 現実には、$-1 < a_1 \leq 1$

(発散しているように見える系列も対数をとると発散しない)

--- 仮説検定は

$$H_0: a_1 = 1, H_1: a_1 < 1$$

--- 単位根検定として、DF検定、ADF検定、DF-GLS検定

· **DF検定（定数項なし）**

$$H_0:\ \ y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_1: y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ (a_1 < 1)$$

--- H_1のモデルを推定し、

$$H_0: a_1 = 1, H_1: a_1 < 1$$

t統計量を$\tau = \frac{\hat{a}_1 - 1}{\sqrt{s^2_{\hat{a}_1}}}$とする。$\tau$が十分に小さい値なら$H_0$を棄却する。

--- τ は非標準的な分布となる（単位根分布）

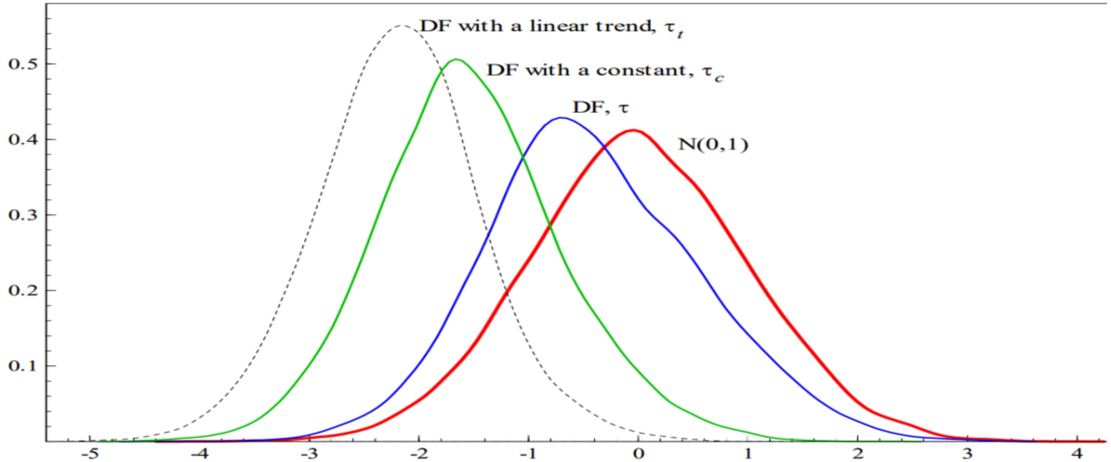


表 1　DF 検定の臨界値

	有意水準		
	0.01	0.05	0.10
τ 統計量：定数項なし			
	-2.57	-1.94	-1.62
τ_c 統計量：定数項あり			
	-3.43	-2.86	-2.57
τ_t統計量：定数項とトレンドあり			
	-3.96	-3.41	-3.13

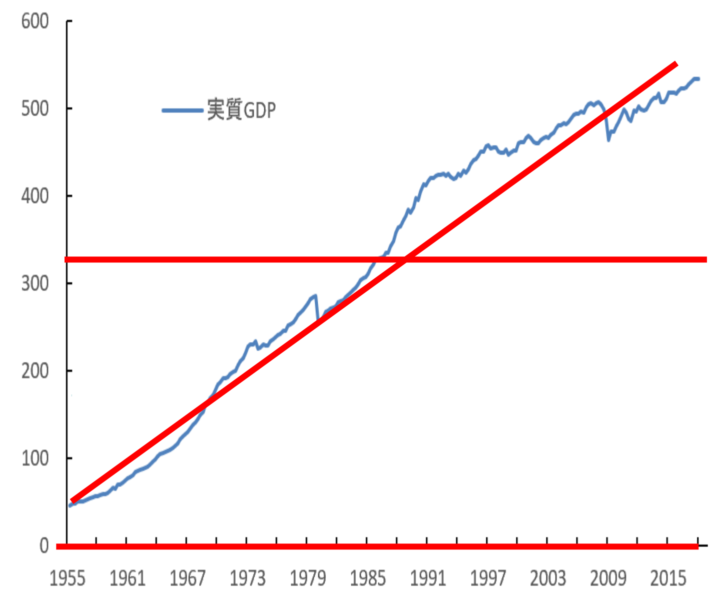
- **DF検定（定数項あり）**

$$H_0:\ y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_1: y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ (a_1 < 1)$$

--- H_1のモデルを推定し、

$H_0: a_1 = 1, H_1: a_1 < 1$ （t統計量τ_c）



- **DF検定（トレンドあり）**

$$H_0:\ y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_1: y_t = a_0 + \gamma t + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ \ (a_1 < 1)$$

--- H_1のモデルを推定し、

$H_0: a_1 = 1, H_1: a_1 < 1$（t統計量$\tau_t$）

単位根検定では確定的部分を正しく定式化することが大事

・ 実証分析では、被説明変数を階差にする

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow y_t - y_{t-1} = (a_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0: \rho = 0,\ H_1: \rho < 0$$

表 1 DF 検定の臨界値

	有意水準		
	0.01	0.05	0.10
τ 統計量：定数項なし			
	-2.57	-1.94	-1.62
τ_c 統計量：定数項あり			
	-3.43	-2.86	-2.57
τ_t 統計量：定数項とトレンドあり			
	-3.96	-3.41	-3.13

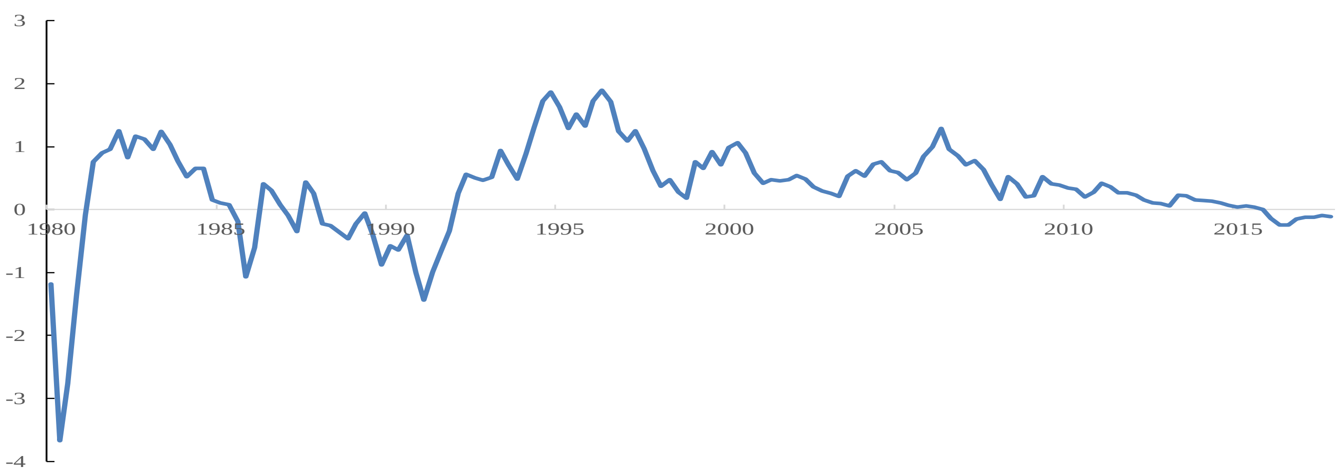
例） 金利スプレッドの分析(1980-2017年の四半期データ)

--- 金利スプレッドy_t = 長期金利－短期金利

$$\Delta \hat{y}_t = 0.054 - 0.139 y_{t-1}$$

(0.032)　(0.039)

--- $\tau_c = -\frac{0.139}{0.039} = -3.51$、1%臨界値$-3.43$を下回る（単位根の仮説を棄却）



- **ADF検定： DF検定をAR(*p*)に拡張した(augmented)検定**

- **AR(*p*)モデル**

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

--- 単位根は

$$1 - a_1 \mathrm{z} - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \cdots - a_p z^p = 0$$

の根zが1となること$(1 - a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_p = 0)$

--- H_0: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p = 1$

H_1: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p < 1$

- **ADF検定(定数項なし)**

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

--- $\rho = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p - 1$

H_0: $\rho = 0$, H_1: $\rho < 0$

--- *t*統計量はτと表記する

--- 定数項ありならτ_c、トレンドありならτ_tであり、DFの臨界値を使う

ADFの変形についての証明(AR(3))

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$$

--- 右辺に$(a_3 y_{t-2} - a_3 y_{t-2})$を加えると

$$\boxed{\Delta y_{t-2} = y_{t-2} - y_{t-3}}$$

$$y_t = a_1 y_{t-1} + (a_2 + a_3) y_{t-2} - a_3 (y_{t-2} - y_{t-3}) + \varepsilon_t$$
$$= a_1 y_{t-1} + (a_2 + a_3) y_{t-2} - a_3 \Delta y_{t-2} + \varepsilon_t$$

--- 右辺に $((a_2 + a_3) y_{t-1} - (a_2 + a_3) y_{t-1})$を加えると

$$\boxed{\Delta y_{t-1} = y_{t-1} - y_{t-2}}$$

$$y_t = (a_1 + a_2 + a_3) y_{t-1} - (a_2 + a_3)(y_{t-1} - y_{t-2}) - a_3 \Delta y_{t-2} + \varepsilon_t$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3) y_{t-1} - (a_2 + a_3) \Delta y_{t-1} - a_3 \Delta y_{t-2} + \varepsilon_t$$

--- 両辺からy_{t-1}を引くと

$$\Delta\, y_t = \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 - 1)}_{\rho} y_{t-1} \underbrace{- (a_2 + a_3)}_{\beta_1} \Delta y_{t-1} \underbrace{- a_3}_{\beta_2} \Delta y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- **DF検定はADF検定の特殊ケース**
- **DF検定、ADF検定は検出力が低い**

--- H_1（定常）が正しいときでも、H_0（単位根）を棄却できない

- **DF-GLS検定**

--- 確定的部分（定数項やトレンド）をGLSで推定する

--- ラグの次数は、MAICかMBICで選択する

(AICやBICを修正したもので長めの次数を選択する)

	有意水準		
	0.01	0.05	0.10
τ_c 統計量：定数項あり			
	-2.58	-1.95	-1.62
τ_t 統計量：定数項とトレンドあり			
	-3.48	-2.89	-2.57

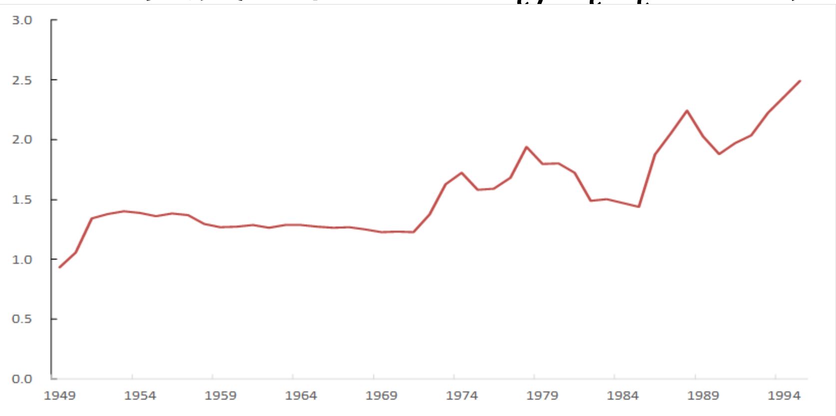
例) 購買力平価説(PPP)の実証

同一通貨で測ったとき、物価水準はすべての国で同じになる

$$P_t = S_t P_t^*$$

--- P_t:日本の物価水準、P_t^*:米国の物価水準、S_t:ドル円レート

--- 実質為替レート$P_t/S_tP_t^*$の対数：$y_t = \ln(P_t/S_tP_t^*)$が定常ならPPPが成立する



---1949-1995年の長期データを用いると トレンドを含めた場合、単位根の仮説を棄却できる

	ADF	DF-GLS	
定数項のみ	-1.25	-0.25	
定数項とトレンド	-3.15	-3.02	**

分析期間とサンプルサイズ

- 年次データなら100年間(T=100)、月次データなら25年(T=12×25=300)とする。単位根検定では、どちらのデータを用いた方が検出力は高いか？

A：100年間の年次データ

- 観察頻度が上がる(年次から月次)とARの係数は1に近づく

単位根検定では、観察期間を長くとることが大事！

--- 四半期データなら

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

年次データでは

$$y_t = a_1^4 y_{t-4} + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} + a_1^3 \varepsilon_{t-3}$$

四半期で$a_1 = 0.95$なら、年次で$a_1^4 = 0.95^4 = 0.81$

[証明]

$$y_{t-1} = a_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

$$\begin{aligned} y_t &= a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= a_1(a_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= a_1^2 y_{t-2} + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

$$y_{t-2} = a_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$

$$\begin{aligned} y_t &= a_1^2(a_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} \\ &= a_1^3 y_{t-3} + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} \end{aligned}$$

$$y_{t-3} = a_1 y_{t-4} + \varepsilon_{t-3}$$

$$\begin{aligned} y_t &= a_1^3(a_1 y_{t-4} + \varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} \\ &= a_1^4 y_{t-4} + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} + a_1^3 \varepsilon_{t-3} \end{aligned}$$

共和分

- 変数に単位根があると、変数は当てもなく動く

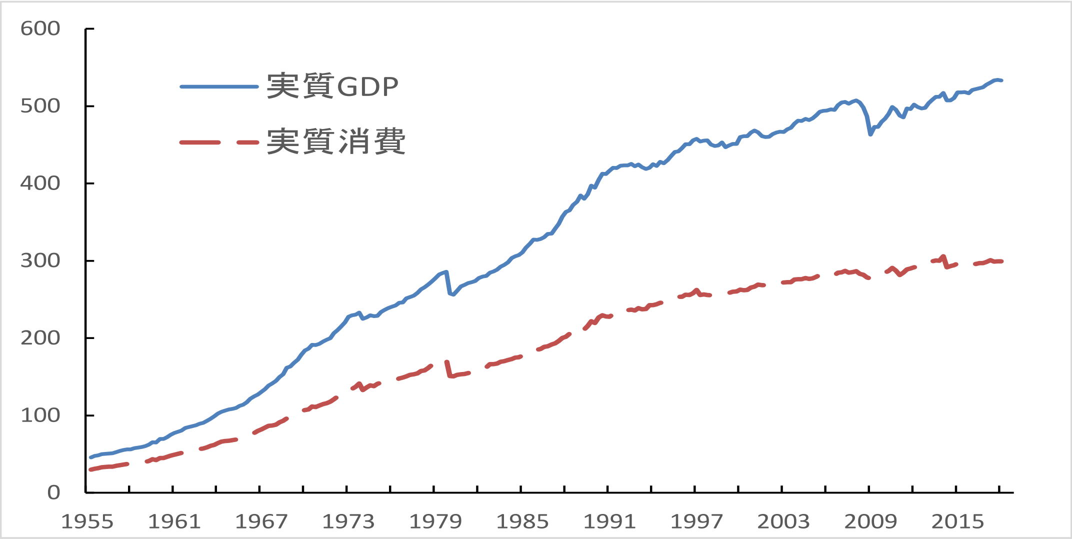
  --- 経済変数には単位根の可能性がある

  --- 経済学から、諸変数には相互関係がある

- 複数の変数が単位根を持つとき、それらの線形関数が定常であるなら、共和分関係にあるという

  例) 消費とGDPは密接に関係しながら動いており、

  消費－β*GDP は定常となる



例) 実質為替レート$(P_t/S_t\ P_t^*)$の対数

$$\ln(P_t) - \ln(S_t) - \ln(P_t^*)$$

は購買力平価が成立しているなら定常となる

- **共和分検定**

変数(y_t, x_t)に単位根があるとする。ここで

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$$

の誤差項u_tが定常なら、共和分関係は(α, βは共和分ベクトル)

$$y_t - \alpha - \beta x_t$$

--- これは均衡からの乖離と解釈される

--- 誤差項u_tに単位根があるなら、共和分関係は存在しない

・グレンジャーとエングルの共和分検定

① 変数(y_t, x_t)に単位根検定をする。単位根があるなら②へ

② y_tをx_tで回帰する。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$$

残差$\hat{u}_t$を求め、残差$\hat{u}_t$に単位根があるかを検定する

$$\Delta\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \Delta\hat{u}_{t-i}$$

--- 残差の和は0のため(平均も0)、定数項は含めない

--- H_0: $\rho = 0$ (共和分なし), H_1: $\rho < 0$ (共和分あり)

--- t統計量の分布は非標準的な分布をする

例）米国の貨幣需要関数の推定

- 1980-2013年の四半期データ
- M_t：M1、Y_t：名目GDP、r_t：名目金利（3カ月物国債金利）

  --- $\ln(M_t/Y_t)$、$\ln(r_t)$、r_tは全て単位根を持つ
- **貨幣需要関数**

① 対数・対数モデル

$$\widehat{\ln(M_t/Y_t)} = -0.209 - 0.055\ln(r_t)$$

$$\underset{(0.052)}{\Delta\hat{u}_t = -0.165}\hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1}^{12}\hat{\beta}_i\Delta\hat{u}_{t-i}$$

--- ラグ次数はAICによって選択した

--- t値は$-3.122(= -0.165/0.052)$、有意水準10%でH_0を棄却

(これらの変数は共和分関係にある)

② 対数・線形モデル

$$\widehat{\ln(M_t/Y_t)} = -1.777 - 2.276\, r_t$$

$$\underset{(0.029)}{\Delta\hat{u}_t = -0.025}\hat{u}_{t-1} + \hat{\beta}_1\Delta\hat{u}_{t-1}$$

--- t値は$-0.88(= -0.025/0.029)$、H_0を棄却できない

（共和分関係にない）

図 8 残差

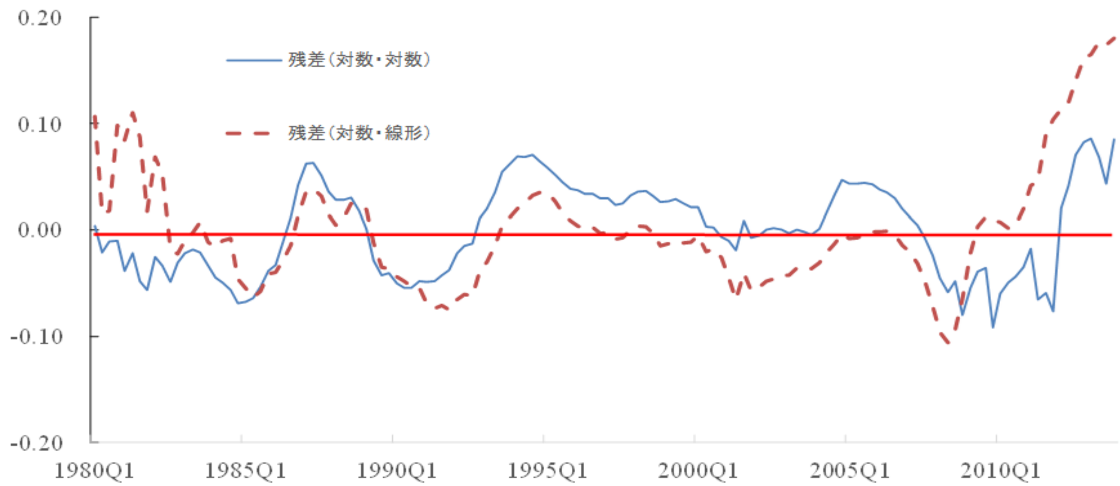
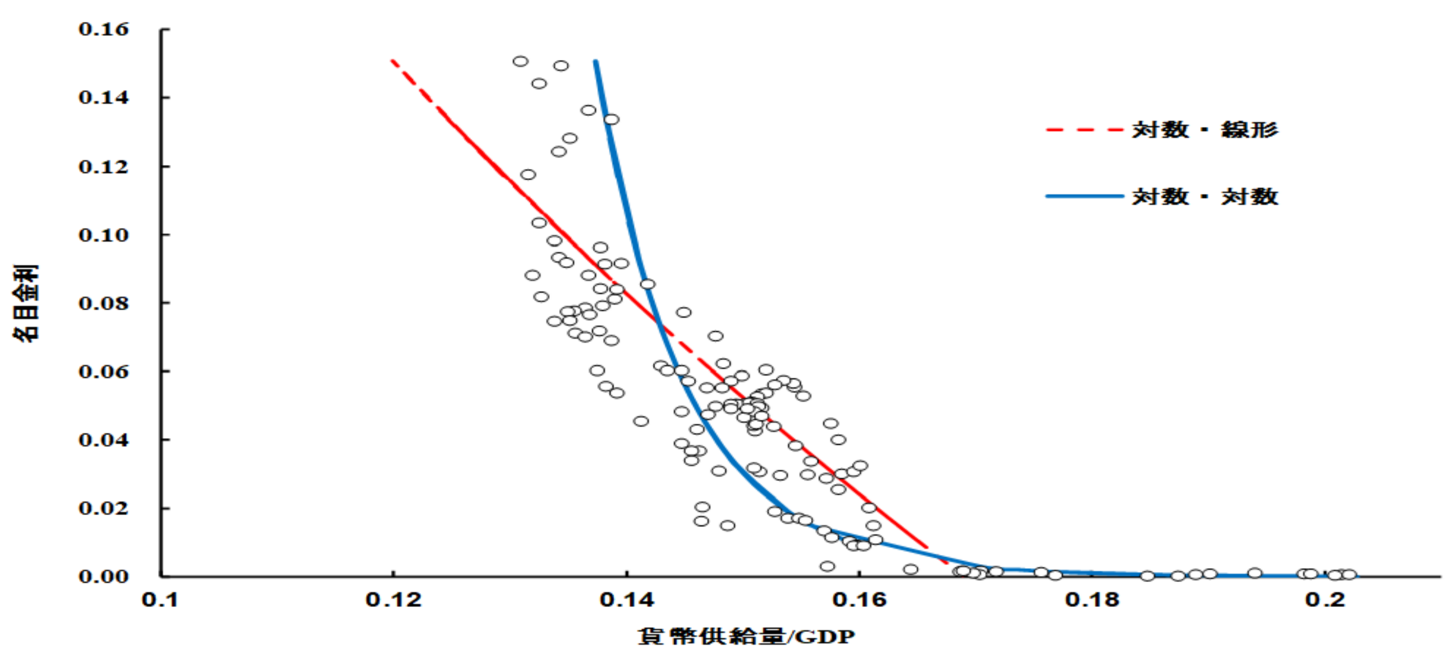


図 9 金利と貨幣需要との関係



- 誤差修正モデル: $y_t-\beta x_t$は定常であるとき、y_tとx_tの動学モデルは

$$\Delta y_t=\mu_1+\theta_1(y_{t-1}-\beta x_{t-1})+a_{11}\Delta y_{t-1}+\cdots+a_{1p}\Delta y_{t-p}+b_{11}\Delta x_{t-1}+\cdots+b_{1p}\Delta x_{t-p}+\varepsilon_{yt}$$

$$\Delta x_t=\mu_2+\theta_2(y_{t-1}-\beta x_{t-1})+a_{21}\Delta y_{t-1}+\cdots+a_{2p}\Delta y_{t-p}+b_{21}\Delta x_{t-1}+\cdots+b_{2p}\Delta x_{t-p}+\varepsilon_{xt}$$

--- y_tとx_tは階差として分析する

--- $y_{t-1}-\beta x_{t-1}$は均衡からの乖離

--- パラメータθ_1とθ_2は均衡からの乖離が調整される速度

例） 金利スプレッド(1980-2017年の四半期データ)

r_t^{long}（長期金利）とr_t^{short}（短期金利）には単位根がある

--- スプレッド$r_t^{long}-r_t^{short}$は定常

$r_t^{long}-r_t^{short}$は共和分関係にある

--- 誤差修正モデル

$$\Delta\hat{r}_t^{long}=-0.04-0.034(r_{t-1}^{long}-r_{t-1}^{short})+0.196\Delta r_{t-1}^{long}+0.056\Delta r_{t-1}^{short}$$

(0.029) (0.036) (0.099)** (0.073)

$$\Delta\hat{r}_t^{short}=-0.12+0.184(r_{t-1}^{long}-r_{t-1}^{short})+0.178\Delta r_{t-1}^{long}+0.203\Delta r_{t-1}^{short}$$

(0.031) (0.038)*** (0.104)* (0.076)***

$\Delta\hat{r}_t^{long}$の式：$r_t^{long}-r_t^{short}$の係数は負だが、有意ではない

$\Delta\hat{r}_t^{short}$の式：$r_t^{long}-r_t^{short}$の係数は正で有意（均衡からの乖離が解消される方向で調整）

- 共和分ベクトルがわからない場合

① y_tをx_tで回帰し（$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$）、残差$\hat{u}_t$に単位根（グレンジャー=エングル）検定をする

② 定常なら$\hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_t$を均衡からの乖離として誤差修正モデルを推定する

$$\Delta y_t = \mu_1 + \theta_1 \hat{u}_{t-1} + a_{11} \Delta y_{t-1} + \cdots + a_{1p} \Delta y_{t-p} + b_{11} \Delta x_{t-1} + \cdots + b_{1p} \Delta x_{t-p} + \varepsilon_{yt}$$

$$\Delta x_t = \mu_2 + \theta_2 \hat{u}_{t-1} + a_{21} \Delta y_{t-1} + \cdots + a_{2p} \Delta y_{t-p} + b_{21} \Delta x_{t-1} + \cdots + b_{2p} \Delta x_{t-p} + \varepsilon_{xt}$$

まとめ

- **見せかけの回帰**

- **単位根検定**
  --- DF検定、ADF検定、DF-GLS検定
  --- 分析期間とサンプルサイズ

- **共和分**
  --- グレンジャー＝エングルの共和分検定
  --- 誤差修正モデル