第15章
定常時系列

藪友良

『入門　実践する計量経済学』

(東洋経済新報社)

PPT

- 時系列データ

- **定常性**

- **ARモデル**

- **VARモデル**

  --- **構造VARモデル**

  --- グレンジャーの因果関係

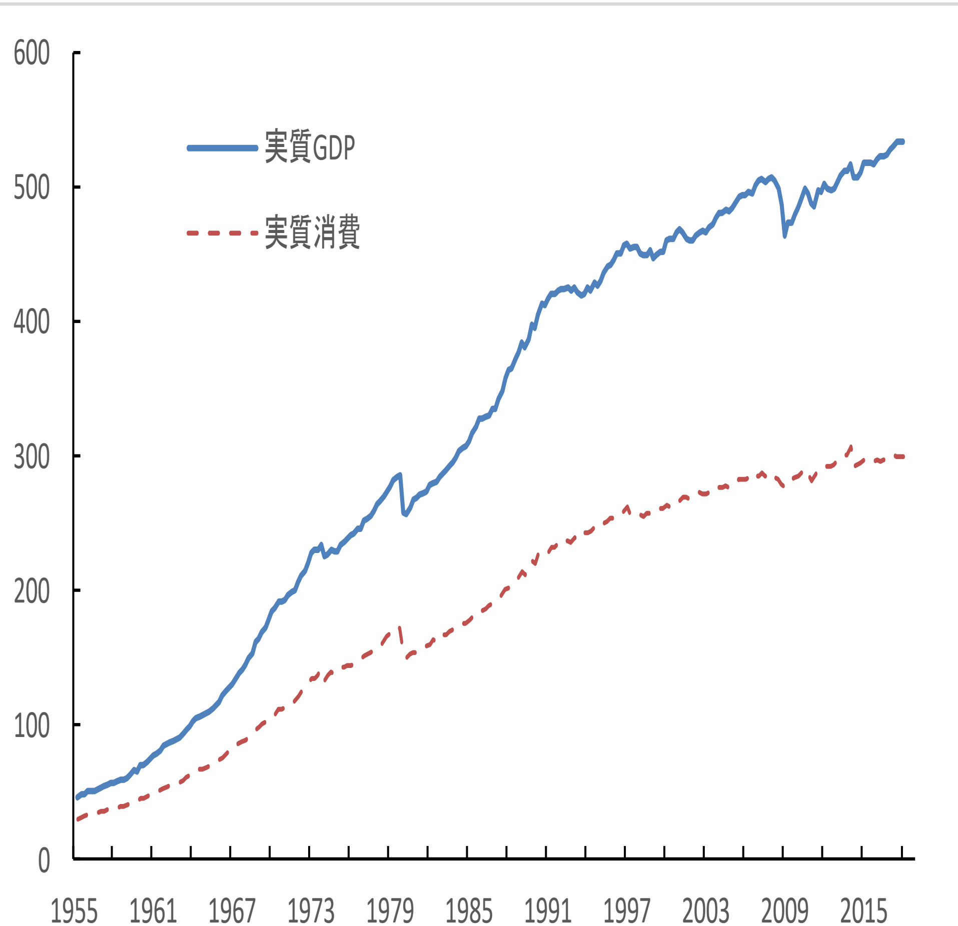
時系列データ

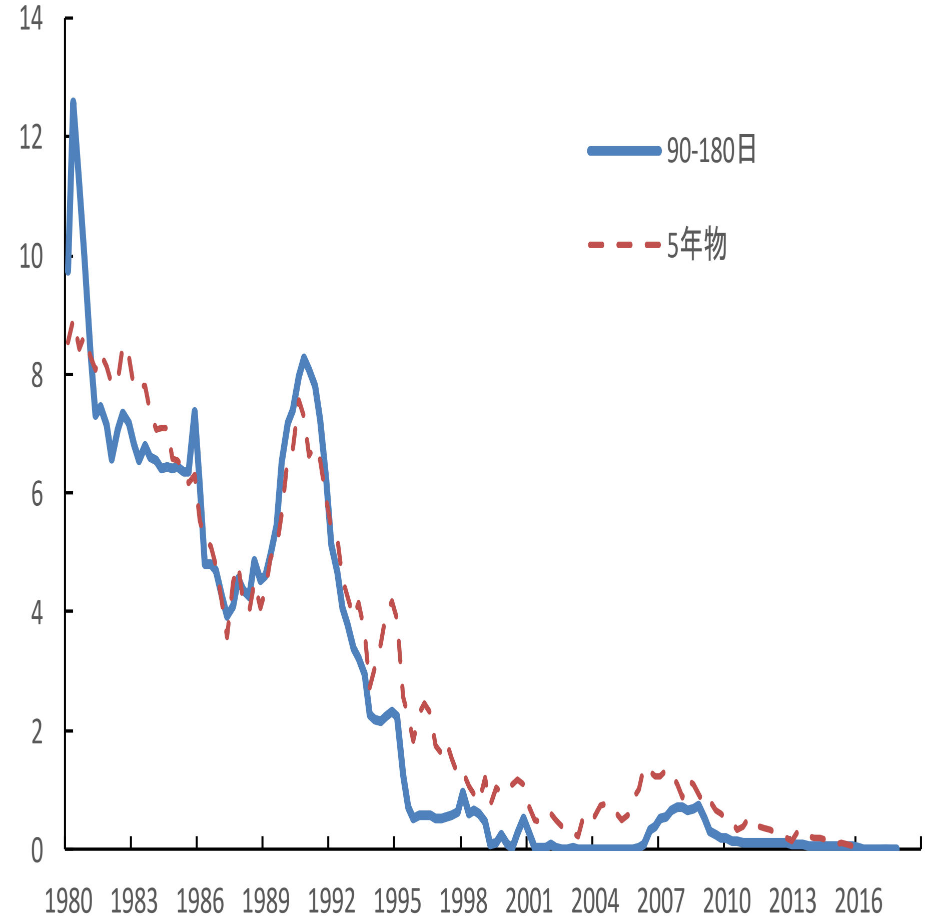
- **時系列データは、時間を通じて観察されたデータ**
  --- 円ドル、株価、GDPなど
  ---観察頻度(年次、四半期、月次、日次、秒次)

- **時系列データの特徴(定型化された事実)**
  --- 過去の自己の値から影響をうける
  --- 変数同士で相互に関連しながら動いている
  --- 分散は一定ではなく、過去の値に依存する

- **時系列モデル**
  --- 時系列データの特徴を捉えるモデルが開発されている
  AR、VARモデル

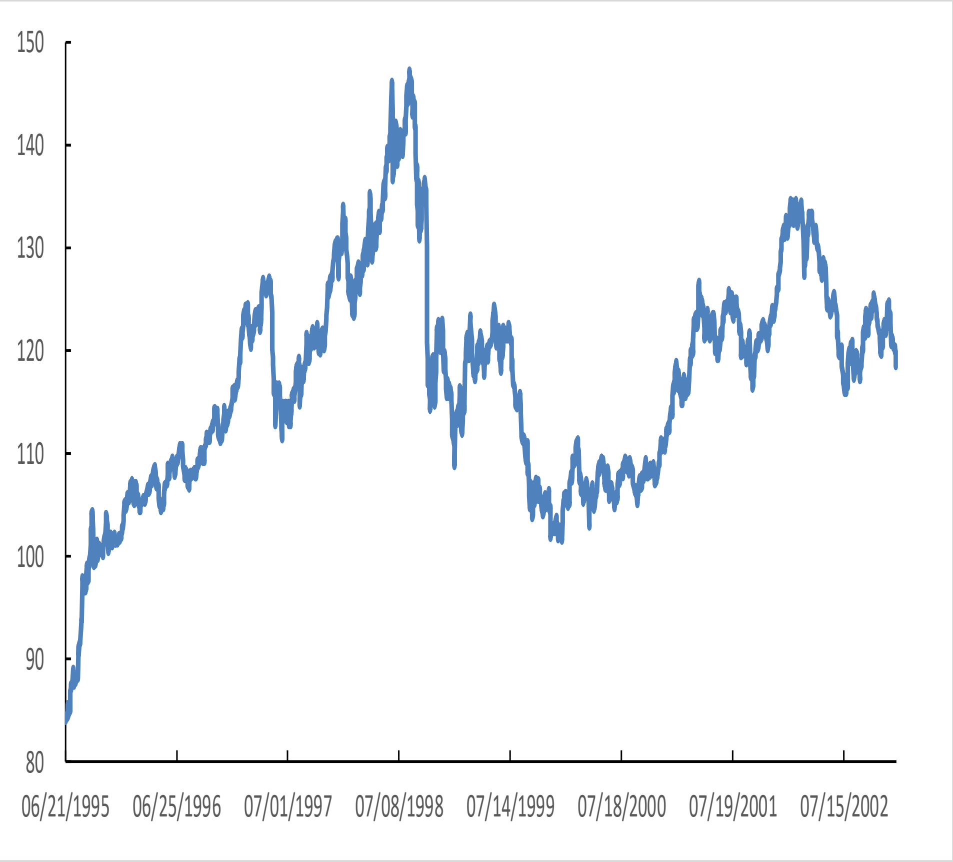
日本の実質GDPと長短金利



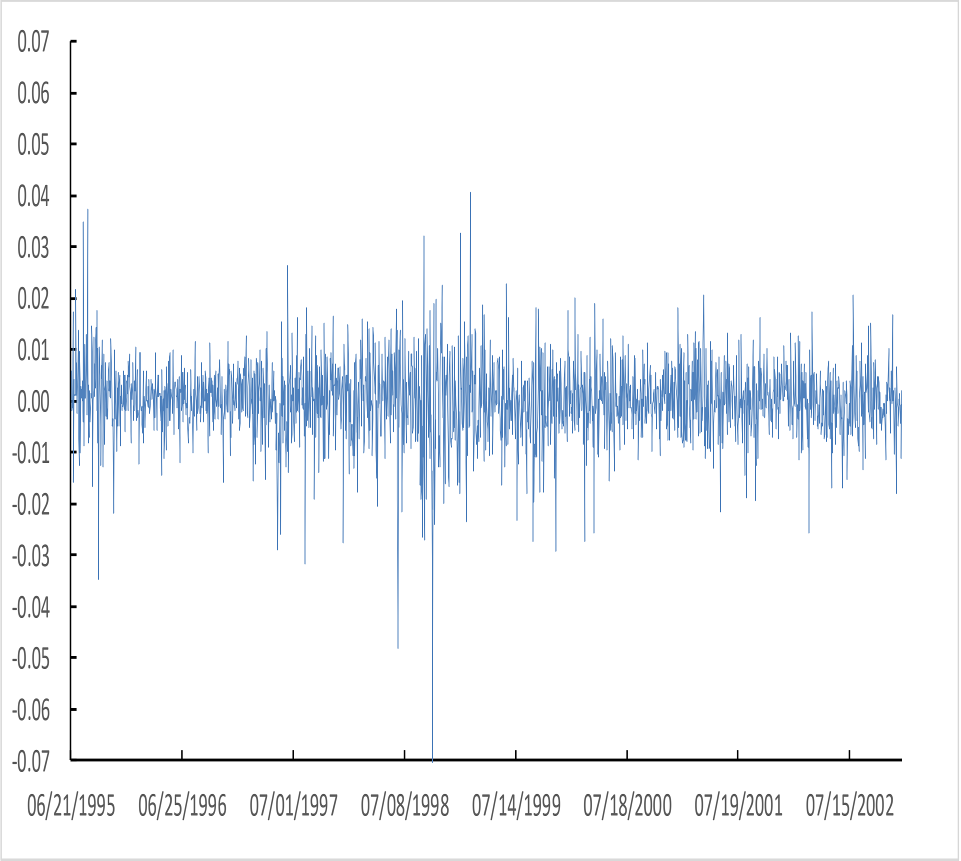


円ドルレート（日次）

(a) 水準



(b) 変化率



定常性

- ある変数が**定常**なら、変数の期待値、分散、自己共分散が時間を通じて一定である。つまり、任意のtに対し、

$$E[Y_t] = \mu$$

$$E[(Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)] = E[(Y_{t-j} - \mu)(Y_{t-j-s} - \mu)] = \gamma_s$$

--- 定常なら期待値、分散、自己共分散が時間に依存しない

--- γ_sとは、Y_tとY_{t-s}との**自己共分散**であり、時差sだけに依存する

- 自己相関(自己共分散÷分散)

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

--- $\rho_0 = 1$

--- Y_tとY_{t-s}との**自己相関**

$$\rho_s = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-s})}{\sqrt{V(Y_t)V(Y_{t-s})}} = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_0\gamma_0}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

よって、$-1 \leq \rho_s \leq 1$

自己回帰モデル

・ **自己回帰（AR）モデル**

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \cdots + a_p Y_{t-p} + u_t$$

--- Y_tが自己ラグ（自己の過去値）に依存しているモデル

--- p次のラグ(Y_{t-p})まで含まれており、**AR(*p*)モデル**と呼ばれる

・ **AR(1)モデル**

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + u_t$$

--- Y_{t-1}のうち$a_1 Y_{t-1}$の部分が、Y_tに引き継がれる

--- $|a_1| < 1$: 定常（ショックの影響が減衰する）

$a_1 = 1$: 非定常（単位根、ショックの影響が恒久的に残る)

$|a_1| > 1$: 非定常（ショックの影響が発散する）

--- データ分析では、$-1 < a_1 \leq 1$となることがほとんど

とくにa_1は1に近いが、1を僅かに下回ることが多い

⇒ 実証分析では

H_0: $a_1 = 1$（単位根）、H_1: $a_1 < 1$（定常）

とした検定を**単位根検定**とよぶ。

・ シュミレーション：　人工的にデータを生成する手続き

PCによって、標準正規分布から乱数u_tを200個発生させる

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_{200}$$

これらを用いて、AR(1)モデル

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + u_t$$

からy_tを200期分生成する（ただし、$Y_0 = 0$）

1期：　$Y_1 = a_1 Y_0 + u_1$

2期：　$Y_2 = a_1 Y_1 + u_2$

3期：　$Y_3 = a_1 Y_2 + u_3$

…

199期：　$Y_{199} = a_1 Y_{198} + u_{199}$

200期：　$Y_{200} = a_1 Y_{199} + u_{200}$

--- 定常　　$a_1 = 0, 0.5, 0.8, -0.8$

非定常　$a_1 = 1.0, 1.05$

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + u_t$$

図15 - 1 ① AR（1）モデル

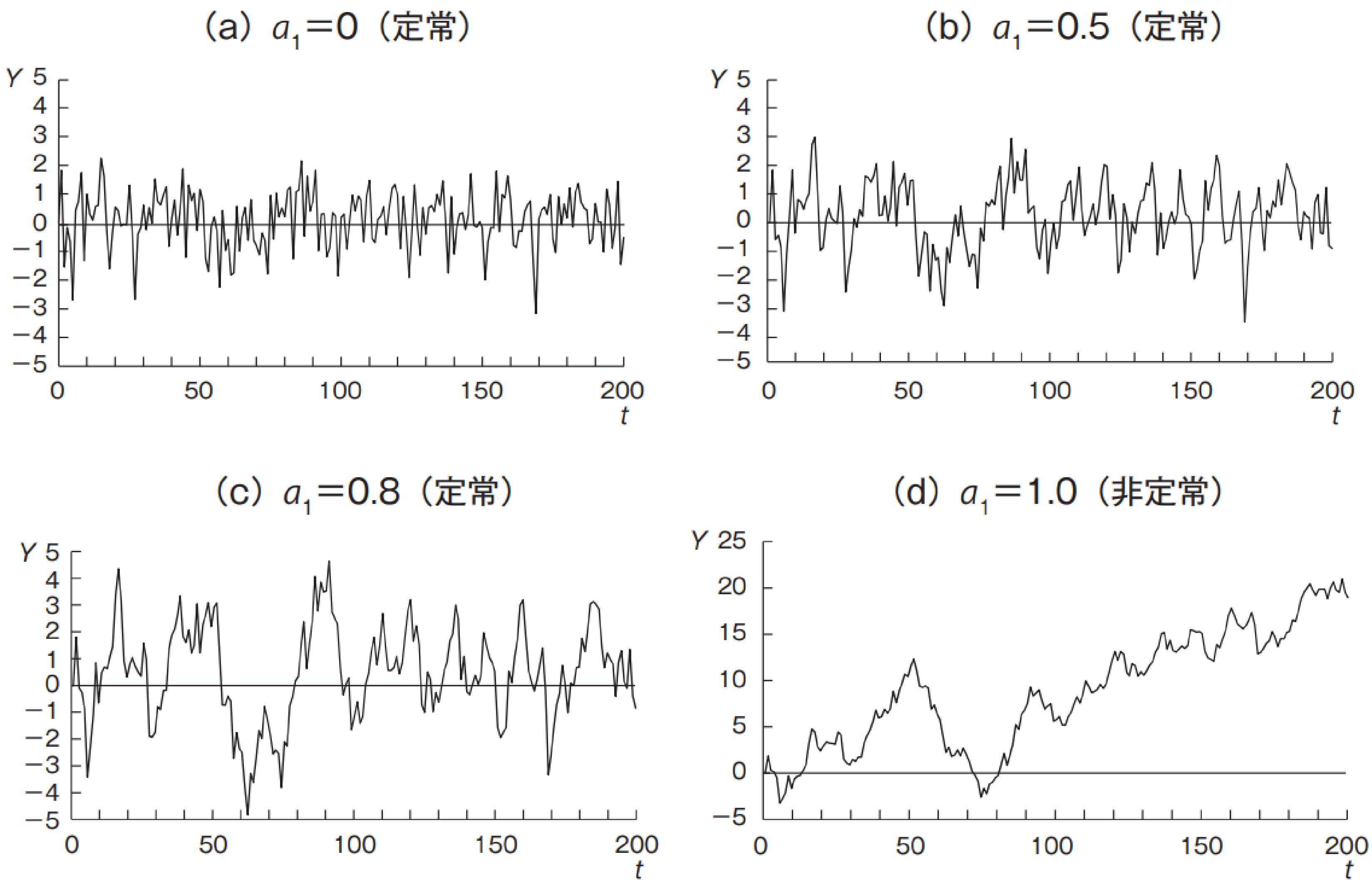
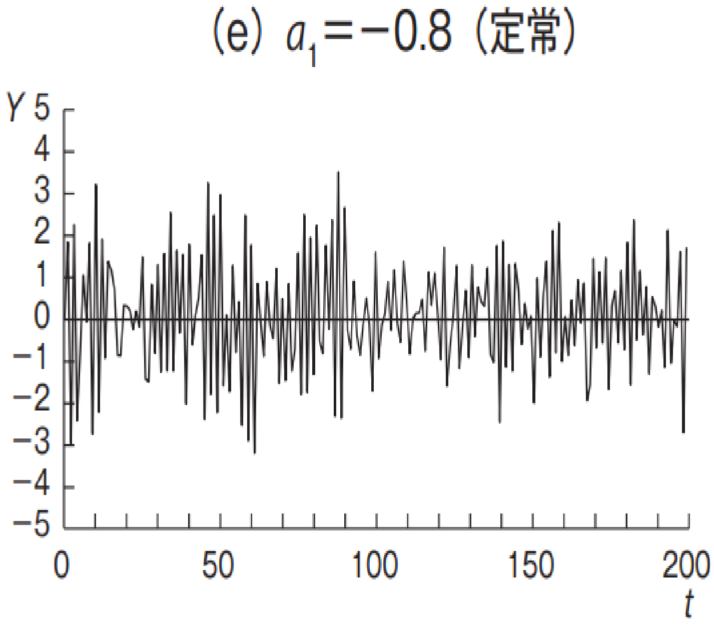
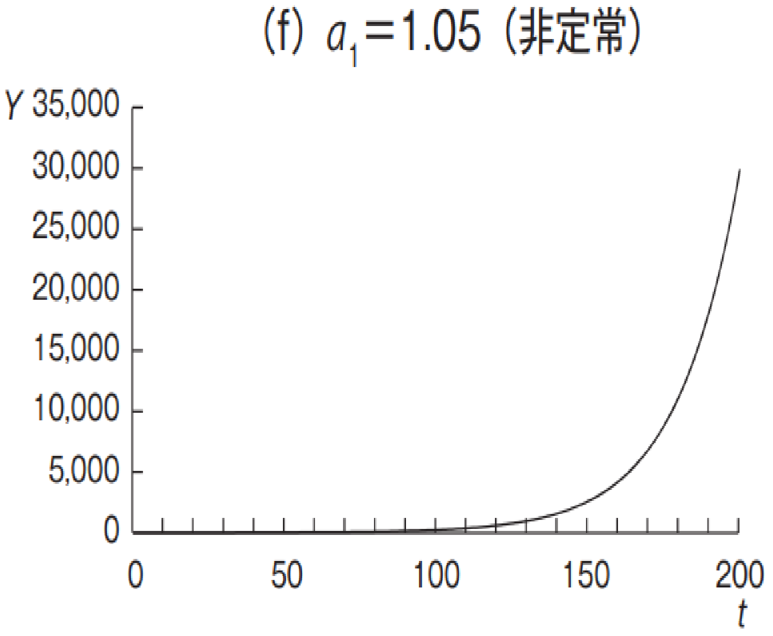


図15 - 1 ② AR（1）モデル





- インパルス応答関数：ショックが変数に与える波及効果を示す

--- 0期に生じた1単位のショックの純粋な影響を調べる

前提条件: $u_0 = 1,\ Y_{-1} = u_1 = u_2 = \cdots = 0$

0期: $Y_0 = a_1 Y_{-1} + u_0$

$= a_1 \times 0 + 1 = 1$

1期: $Y_1 = a_1 Y_0 + u_1$

$= a_1 \times 1 + 0 = a_1$

2期: $Y_2 = a_1 Y_1 + u_2$

$= a_1 \times a_1 + 0 = a_1^2$

…

s期: $Y_s = a_1^s$

--- $|a_1| < 1$なら、sが大きくなると、$Y_s = a_1^s$は0に収束する

$a_1 = 1$なら、sが大きくなっても、$Y_s = a_1^s$は1のまま

$|a_1| > 1$なら、sが大きくなると、$Y_s = a_1^s$は発散する

インパルス応答関数$Y_s = a_1^s$

図15 - 2 ①　インパルス応答関数

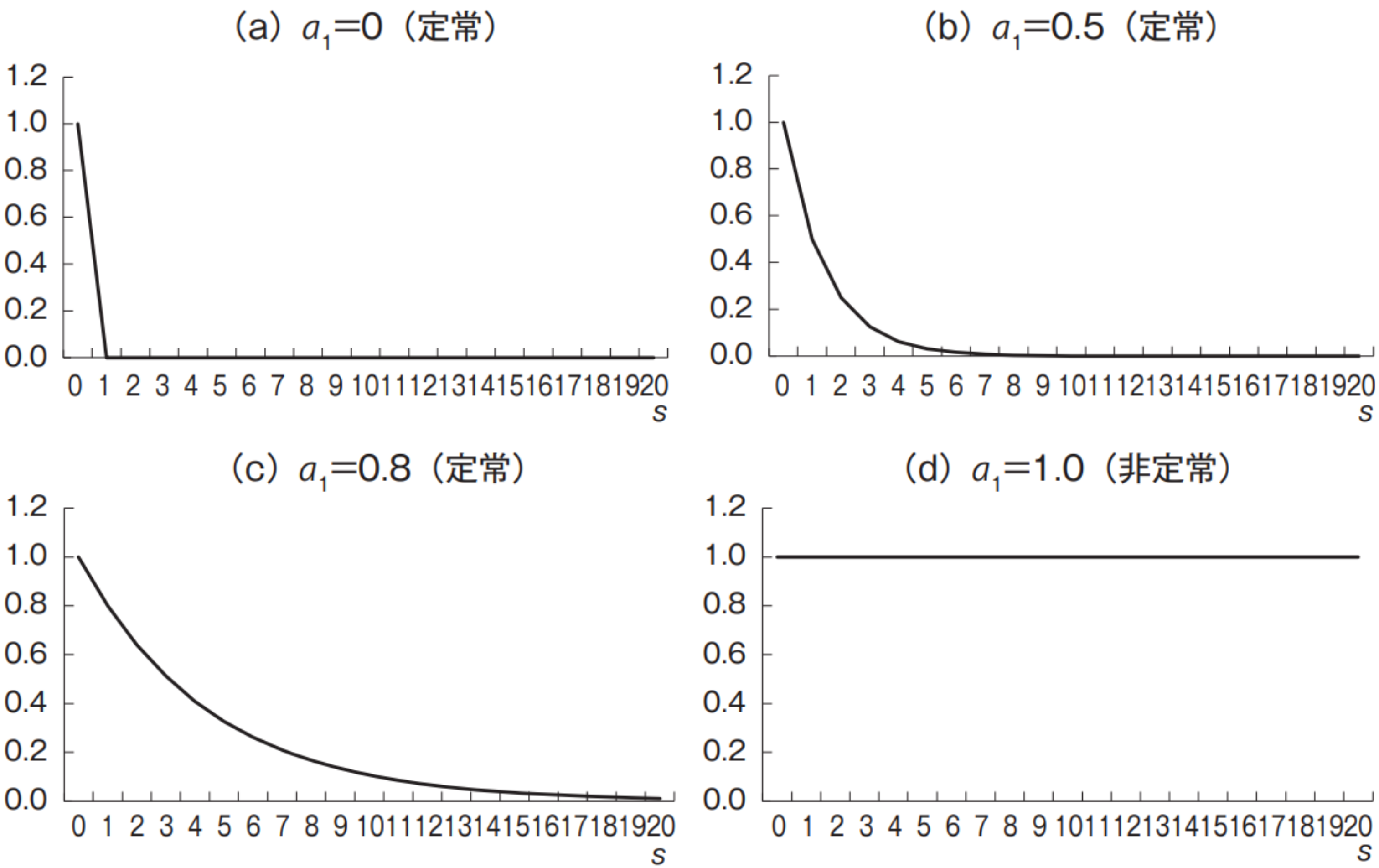
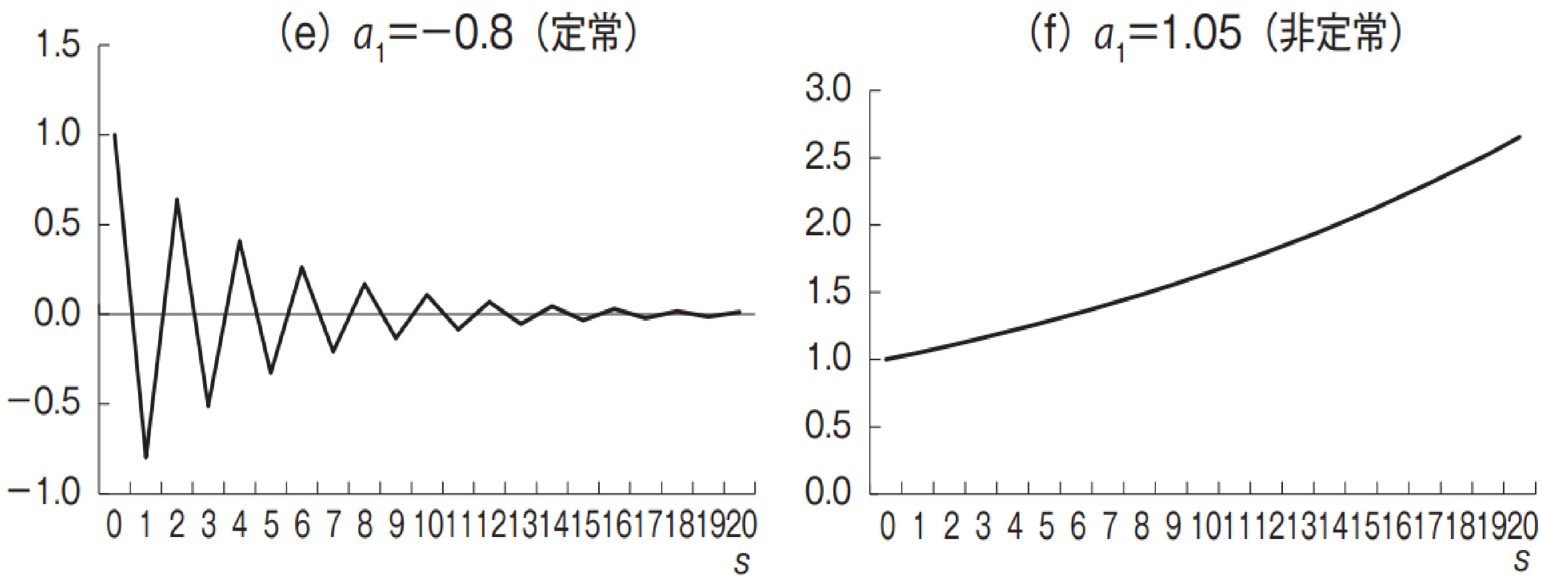


図15 - 2 ② インパルス応答関数



$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + u_t$$

--- $a_1 = 1$: 単位根

--- Y_tに単位根があっても、階差系列($\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$)は定常

$$\Delta Y_t = a_0 + u_t$$

(例)金利スプレッドの分析(1980-2017年の四半期データ)

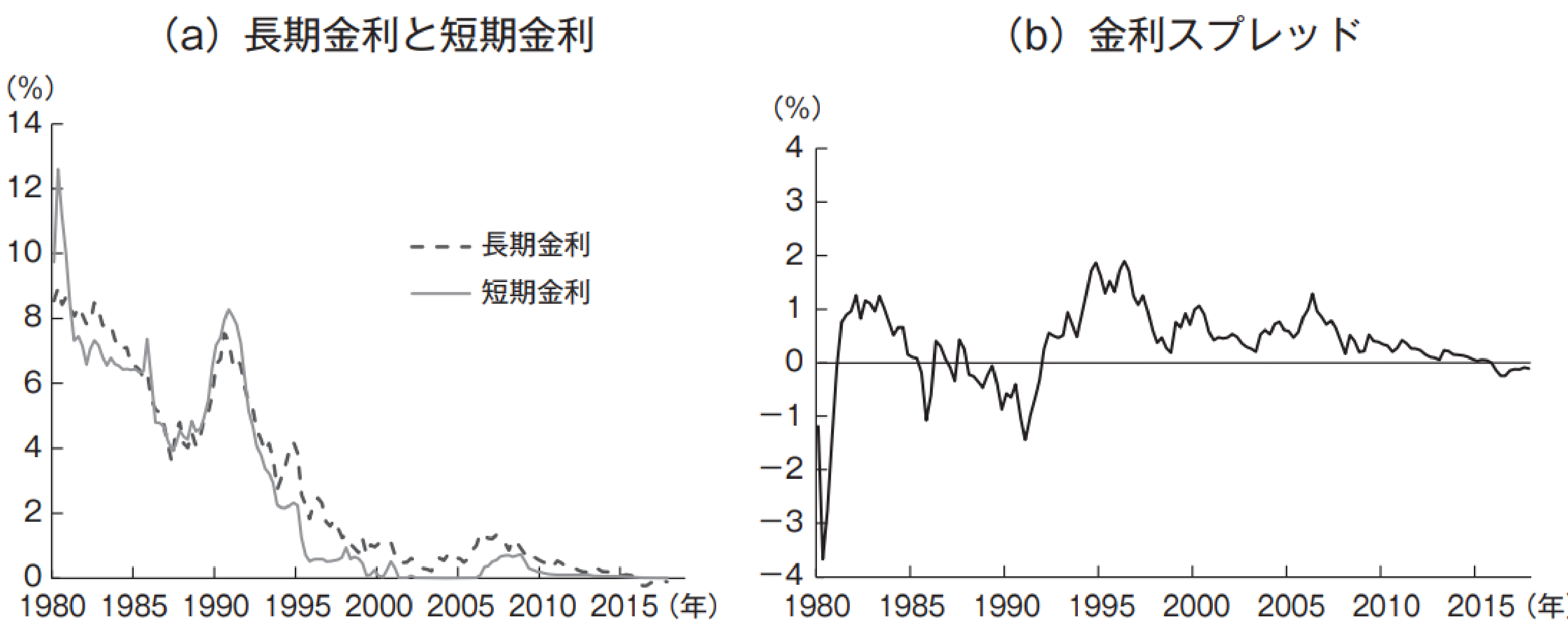
--- 金利スプレッドY_t = 長期金利－短期金利

--- OLS推定すると

$$\hat{Y}_t = \underset{(0.032)}{0.055} + \underset{(0.040)}{0.861}Y_{t-1}$$

--- 係数は0.861であり、1より小さい(定常)

図15 - 3　日本における金利の動き



AR(p) モデル

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \cdots + a_p Y_{t-p} + u_t$$

- 定常性の条件

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \cdots - a_p z^p = 0$$

を満たす根zが絶対値で1より大きい

- AR(1)なら、定常性の条件は

$$1 - a_1 z = 0$$

を満たす根zが絶対値で1より大きい

--- $z = 1/a_1$から、$|a_1| < 1$なら定常、$|a_1| \geq 1$なら非定常

--- 単位根$z = 1$のとき、$a_1 = 1$となる

--- 通常、$-1 < a_1 \leq 1$なので、$a_1 < 1$なら定常と判断される

- AR(p)では、単位根$z = 1$において

$$1 - a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_p = 0$$

つまり、係数の和は1となる

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p = 1$$

--- $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p < 1$なら定常と判断される

ベクトル自己回帰モデル

- **2変量VAR**

$$Y_t = \mu_1 + a_{11}Y_{t-1} + \cdots + a_{1p}Y_{t-p} + b_{11}X_{t-1} + \cdots + b_{1p}X_{t-p} + u_{Yt}$$
$$X_t = \mu_2 + a_{21}Y_{t-1} + \cdots + a_{2p}Y_{t-p} + b_{21}X_{t-1} + \cdots + b_{2p}X_{t-p} + u_{Xt}$$

--- u_{Yt}とu_{Xt}は誤差項（相互に相関してもよい）

--- 各式を別々にOLS推定する

--- パラメータ数は、変数の数$(1 +$ 変数の数 $\times p)$

$p = 12$なら、$2(1 + 2 \times 12) = 50$

--- 実証分析では、p を短めに選ぶBICが好まれる

4半期（月次）データなら、季節性を捉えるため$p = 4$（$p = 12$）を選ぶことも

- **グレンジャー因果性**

変数xの過去の情報が変数yの予測に有用なら、**XからYへのグレンジャー因果性が存在する**

--- H_0: $b_{11} = b_{12} = \cdots = b_{1p} = 0$（ $X \nrightarrow Y$）

H_1: H_0は誤りである（ $X \rightarrow Y$）

--- グレンジャー因果性は予測可能性であり、通常の因果関係とは異なる

$$Y_t = a_{11}Y_{t-1} + b_{11}X_{t-1} + u_{Yt}$$
$$X_t = a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + u_{Xt}$$

- **4種のインパルス応答関数（2つのショック、2つの変数）**

--- 0期にYのショックが1単位増加したとする

前提条件: $u_{Y0} = 1$、$Y_{-1} = X_{-1} = 0$、$u_{X0} = u_{X1} = \cdots = 0, u_{Y1} = \cdots = 0$

0期: $$Y_0 = a_{11}Y_{-1} + b_{11}X_{-1} + u_{Y0}$$
$$= a_{11} \times 0 + b_{11} \times 0 + 1 = 1$$
$$X_0 = a_{21}Y_{-1} + b_{21}X_{-1} + u_{X0}$$
$$= a_{21} \times 0 + b_{21} \times 0 + 0 = 0$$

1期: $$Y_1 = a_{11}Y_0 + b_{11}X_0 + u_{Y1}$$
$$= a_{11} \times 1 + b_{11} \times 0 + 0 = a_{11}$$
$$X_1 = a_{21}Y_0 + b_{21}X_0 + u_{X1}$$
$$= a_{21} \times 1 + b_{21} \times 0 + 0 = a_{21}$$

(例)国際金融市場の分析①

--- 2010年1月5日から2018年12月28日までの日次データ

--- Y_t: 日経平均株価の変化率 、X_t: ダウ平均株価の変化率

$p = 4$と設定(AICは4、BICは1を選択)

--- 推定するモデル

$$Y_t = \mu_1 + a_{11}Y_{t-1} + \cdots + a_{14}Y_{t-4} + b_{11}X_{t-1} + \cdots + b_{14}X_{t-4} + u_{Yt}$$
$$X_t = \mu_2 + a_{21}Y_{t-1} + \cdots + a_{24}Y_{t-4} + b_{21}X_{t-1} + \cdots + b_{24}X_{t-4} + u_{Xt}$$

---- X(ダウ)からY(日経)へのグレンジャー因果性

$$H_0: b_{11} = b_{12} = b_{13} = b_{14} = 0 \ (X \nrightarrow Y)$$

F 値は109.39、有意水準1%でH_0は棄却される

(ダウ平均から日経平均へのグレンジャー因果性がある)

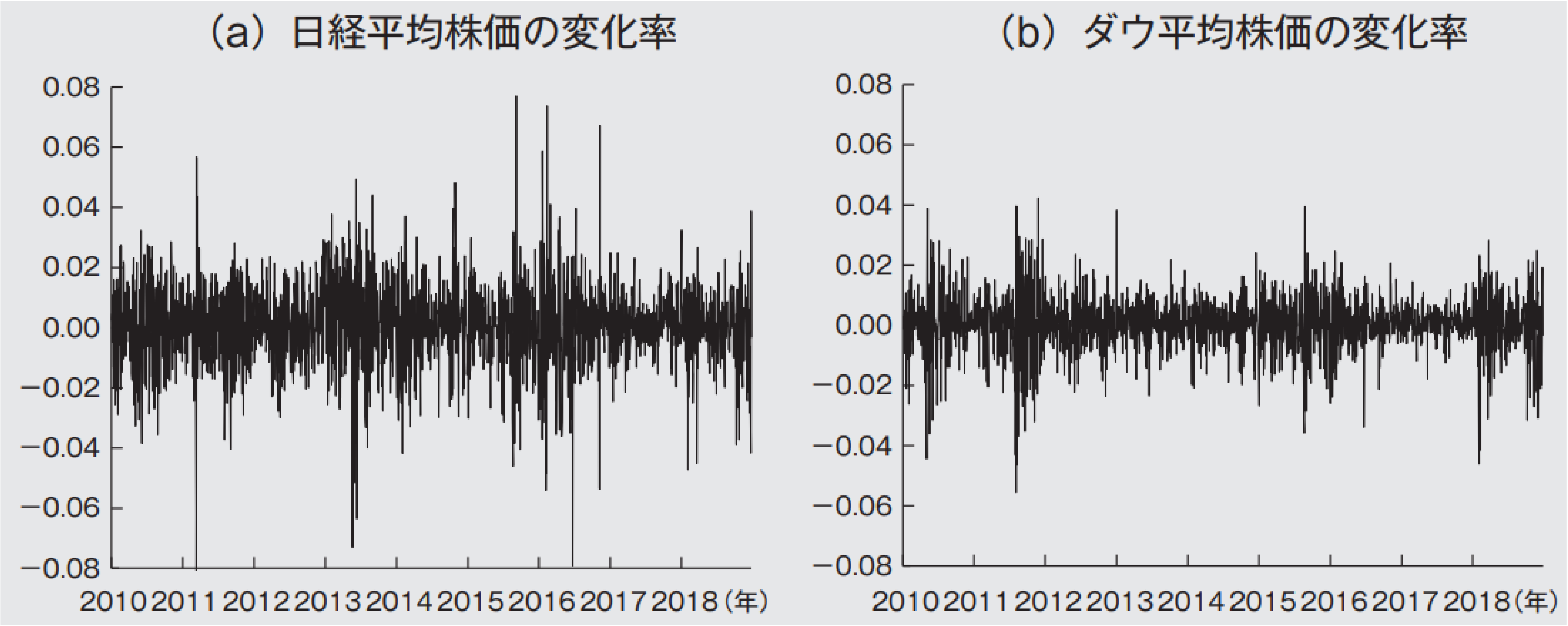
--- Y(日経)からX(ダウ)へのグレンジャー因果性

$$H_0: a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = 0 \ (Y \nrightarrow X)$$

F 値は1.44、H_0は棄却されない

(日経平均からダウ平均へのグレンジャー因果性なし)

図15 - 4　ボラティリティ・クラスタリング



構造VARモデル

$$Y_t = \mu_1 + a_{11}Y_{t-1} + \cdots + a_{1p}Y_{t-p} + \boldsymbol{b_{10}X_t} + b_{11}X_{t-1} + \cdots + b_{1p}X_{t-p} + \varepsilon_{Yt}$$
$$X_t = \mu_2 + \boldsymbol{a_{20}Y_t} + a_{21}Y_{t-1} + \cdots + a_{2p}Y_{t-p} + b_{21}X_{t-1} + \cdots + b_{2p}X_{t-p} + \varepsilon_{Xt}$$

--- Y_t（X_t）の式に同時点のX_t（Y_t）が含まれている

--- 誤差項($\varepsilon_{Yt}, \varepsilon_{Xt}$)は構造ショック、相互に無相関とする

--- 内生性の問題が発生している

--- 識別制約を課すことでパラメータを推定する

- **排除制約**($b_{10} = 0$)

$$Y_t = \mu_1 + a_{11}Y_{t-1} + \underline{\boldsymbol{b_{10}X_t}} + b_{11}X_{t-1} + \varepsilon_{Yt}$$
$$X_t = \mu_2 + \boldsymbol{a_{20}Y_t} + a_{21}Y_{t-1} + b_{21}X_{t-1} + \varepsilon_{Xt}$$

--- どちらの式でも内生性の問題は発生しない

--- 排除制約が正しいことを正当化する必要がある

例） 国際金融市場の分析②

--- 2010年1月1日から2018年12月31日までの日次データ

--- Y_t:日経平均株価の変化率、X_t:ダウ平均株価の変化率

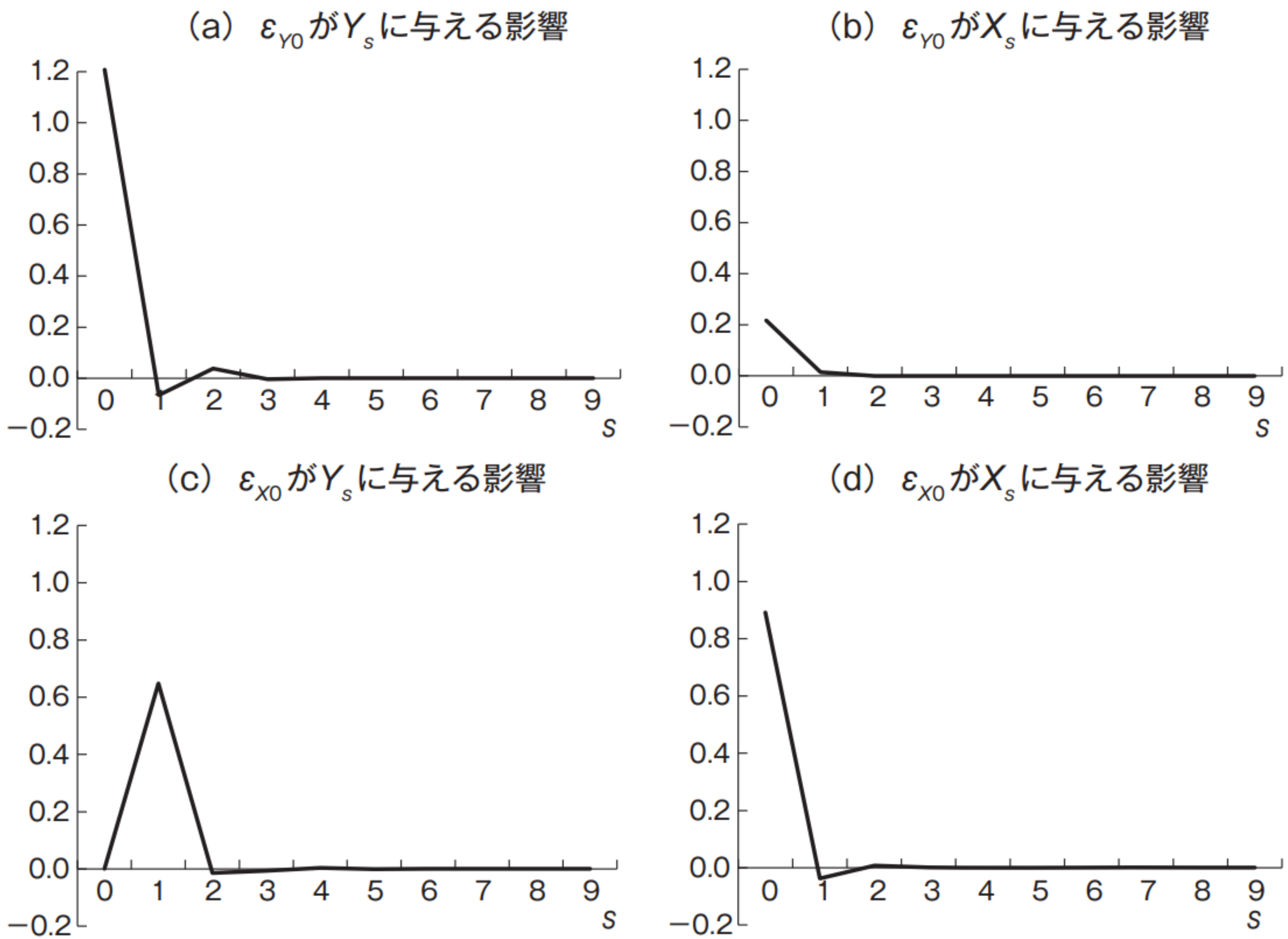
--- $b_{10} = 0$: 日本市場の取引時間は9:00-15:00

NY市場の取引時間は23:30-6:00

⇒ 同日のダウ平均X_tから、同日の日経平均Y_tへの影響はない

---日本市場からNY市場への影響は限定的である一方、NY市場から日本市場への影響は大きい

図15 - 5　国際金融市場のインパルス応答関数



まとめ

- **定常性**

- **自己回帰モデル**
  --- 定常性の条件、単位根
  --- インパルス応答関数

- ベクトル自己回帰**モデル**
  --- グレンジャーの因果性
  --- インパルス応答関数

- 構造VAR**モデル**
  --- 排除制約